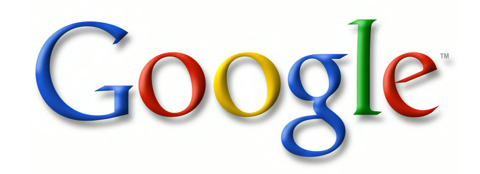




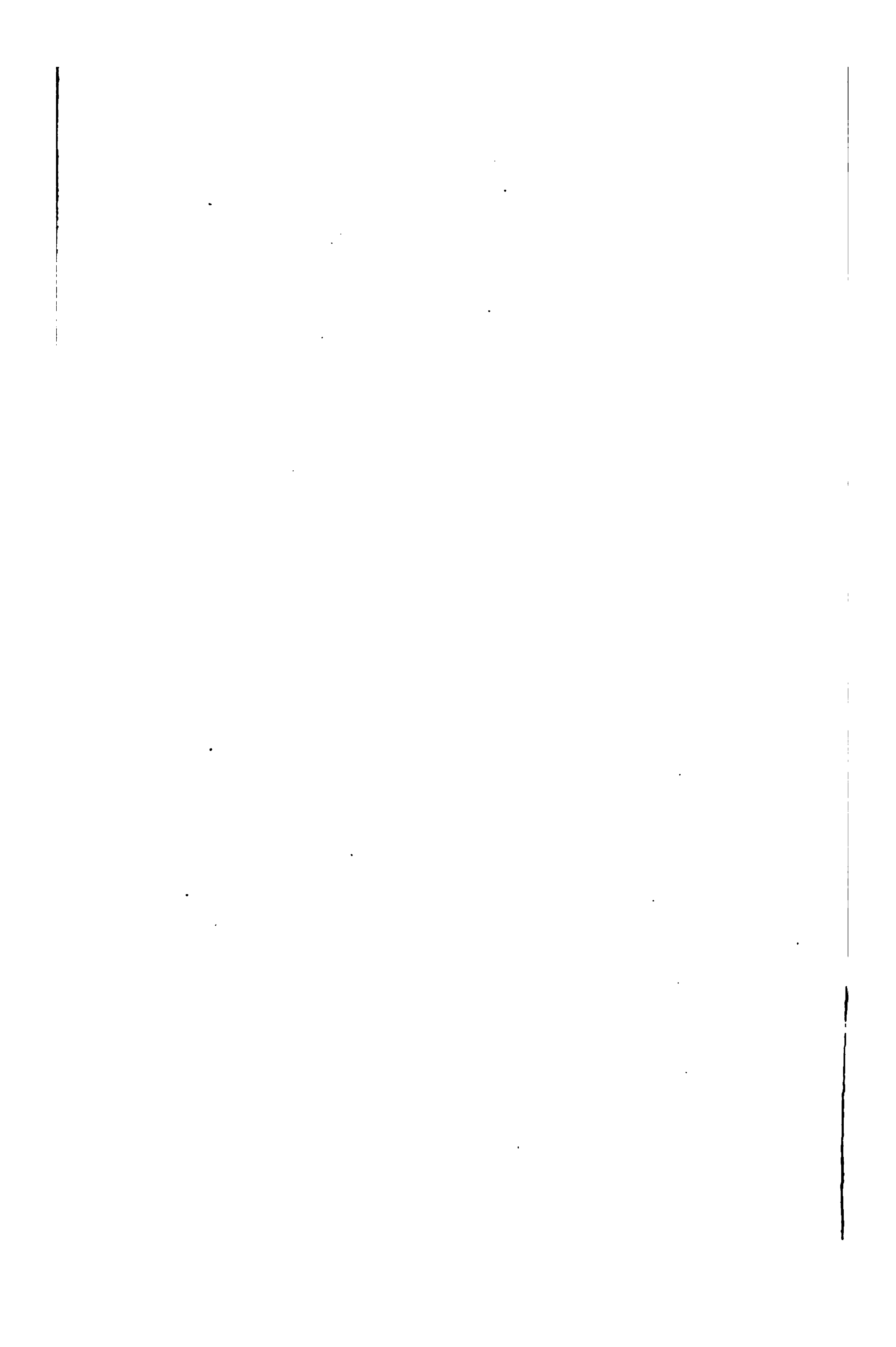






1900
TIMO-
SHENKO
COLL.





Lehrbuch der Optik

von

Dr. **Paul Drude,**

Professor der Physik an der Universität Giessen.

Mit 110 Abbildungen.

Leipzig

Verlag von S. Hirzel

1900.

Vorwort.

Das vorliegende Buch soll den mit den Grundbegriffen der Differential- und Integral-Rechnung vertrauten Leser in das Gebiet der Optik derart einführen, dass er auch die Ziele und Resultate der neuesten Forschung verstehen und an der Hand der Originalarbeiten ins Einzelne verfolgen kann.

Dieses Buch ist entstanden auf Wunsch des Verlegers, dem ich aber gern entsprochen habe, weil auch ich seine Ansicht theilte, dass ein das ganze Gebiet umfassendes modernes Lehrbuch fehlte, und weil ich für mich selbst lurch die Vertiefung des Ueberblicks, zu dem das Niederschreiben eines Buches nöthigt, Anregung zu eigenen neuen Ideen erhoffte. Einige derselben habe ich im II. und III. Abschnitt der physikalischen Optik verwendet, im Uebrigen habe ich lediglich schon publicirte Resultate möglichst einfach darzustellen gesucht. Da ich die Form eines Lehrbuches, nicht eines Handbuches im Auge hatte, so ist eine Anhäufung von Literaturcitaten, aus denen man die historische Entwickelung des betreffenden Arbeitsfeldes ersehen könnte, vermieden worden. Die wenigen Citate, die ich aufgenommen habe, sollen wesentlich dem Leser zur näheren Information an denjenigen Stellen dienen, welche im Texte nur kurze Darstellung finden konnten, besonders bei den neueren Untersuchungen, welche noch nicht Eingang in die Handbücher gefunden haben.

Um den Contact mit dem Experiment zu wahren und zum Zwecke der möglichst einfachen Darstellung des Gebietes habe ich einen synthetischen Gang gewählt. Die einfachsten Experimente führen zur geometrischen Optik, in ihr macht man die wenigsten Voraussetzungen über die Natur des Lichtes. So habe ich mit der Darstellung der geometrischen Optik begonnen, wobei ich mich

führt die Ionen-Hypothese bei den Metallen zu Dispersionsformeln, die die Continuität der optischen und der elektrischen Eigenschaften der Metalle wesentlich durch die Trägheit der Ionen darlegen und ebenfalls in dem bisher allerdings noch sehr beschränkten Beobachtungsintervall bestätigt werden.

Der II. Abschnitt des Buches beschäftigt sich mit der Verknüpfung der Optik mit der Thermodynamik und (im 3. Kapitel) mit der kinetischen Gastheorie. Theoretisch wurde hier durch Kirchhoff, Clausius, Botzmann und W. Wien Bahn gebrochen, und die vielen fruchtbaren experimentellen Untersuchungen über die Strahlung der Körper, welche in neuerer Zeit unternommen wurden, zeigen deutlich, dass Theorie und Experiment durch gegenseitige Anregung zur besten Blüthe sich entfalten.

Von dieser Ueberzeugung durchdrungen, habe ich auch dies Buch geschrieben, indem es die Theorie weiteren Kreisen zugänglich zu machen sucht, die sich nicht mit dem zum Theil zeitraubenden Studium der Originalarbeiten befassen wollen. Auf Vollständigkeit, wie sie das ausgezeichnete Lehrbuch von Mascart oder Winkelmann's Handbuch erstreben, kann ich dabei keinen Anspruch machen; ich habe manche interessanten und wichtigen Gebiete optischer Forschung der Kürze halber nicht behandelt. Meine Absicht ist hier erreicht, wenn diese Blätter den Leser in der Ansicht bestärken, dass die Optik nicht ein altes, abgearbeitetes Gebiet der Physik ist, sondern dass auch hier frisches Leben pulsirt, zu dessen weiterer Ernährung beizutragen für jeden Einzelnen lockend sein muss.

Herr stud. F. Kiebitz hat mich beim Lesen der Correcturen wirksam unterstützt.

Leipzig, Januar 1900.

Inhaltsverzeichniss.

Geometrische Optik.

Kapitel I.

Die Fundamentalgesetze.

Kapitel II.

Geometrische Theorie der optischen Abbildung.

Kapitel III.

Physikalische Herstellung der optischen Abbildung.

Kapitel IV.

Ueber die Strahlenbegrenzung und die von ihr abhängige Lichtwirkung.

Kapitel V.

Optische Instrumente.

Physikalische Optik.

I. Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften des Lichtes.

Kapitel I.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.

Kapitel II.

Interferenz des Lichtes.

Kapitel III.

Das Huygens'sche Princip.

Kapitel IV.

Beugung des Lichtes.

Kapitel V.

Polarisation.

II. Abschnitt.

Optische Eigenschaften der Körper.

Kapitel I.

Theorie des Lichtes.

Kapitel II.

Durchsichtige isotrope Körper.

Kapitel III.

Optische Eigenschaften durchsichtiger Krystalle.

Kapitel IV.

Absorbirende Körper.

Kapitel V.

Die Dispersion der Körper.

Kapitel VI.

Natürlich-active Körper.

Kapitel VII.

Magnetisch-active Körper.

A. Hypothese der Molecularströme.

B. Hypothese des Halleffectes.

Kapitel VIII.

Bewegte Körper.

III. Abschnitt.

Die Strahlung der Körper.

Kapitel I.

Die Strahlung in energetischer Deutung.

Kapitel II.

Anwendung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik auf reine Temperaturstrahlung.

Kapitel III.

Das Leuchten der Gase und Dämpfe.

GEOMETRISCHE OPTIK.

Es giebt ein grosses Gebiet von Lichterscheinungen, — und darunter befinden sich gerade diejenigen, welche die weitgehendste praktische Anwendung gefunden haben, — die auf vier Fundamentalgesetzen des Lichtes beruhen. Diese sind:

1. die geradlinige Ausbreitung des Lichtes,
2. die Unabhängigkeit der Theile eines Lichtbündels von einander,
3. das Reflexionsgesetz,
4. das Brechungsgesetz.

Diese vier Gesetze bieten sich als Erfahrungsthatsachen der Beobachtung leicht dar.

Wenn man sie zum Ausgangspunkt der Betrachtung macht, ohne andere Eigenschaften des Lichtes in Rücksicht zu ziehen, so erhält man Aufschluss über gewisse geometrische Beziehungen bei den Lichterscheinungen, da jene vier Fundamentalgesetze sich ebenfalls nur auf geometrische Bestimmungen der Lichtausbreitung beziehen. Jene Fundamentalgesetze bilden daher die ausreichende Grundlage für die sogenannte geometrische Optik, und man braucht zum folgerichtigen Aufbau derselben keine besonderen Hypothesen heranzuziehen, welche näher auf die Natur des Lichtes eingehen.

Im Gegensatz zur geometrischen Optik steht die physikalische Optik, welche andere als rein geometrische Eigenschaften des Lichtes behandelt, und welche näher auf das physikalische Verhalten der verschiedenen Körper gegenüber den Lichterscheinungen eingeht. Zur bequemen Zusammenfassung der grossen Mannigfaltigkeit dieser Erscheinungen hat man mit bestem Erfolge besondere Hypothesen über die Natur des Lichtes ersonnen.

Vom Standpunkte der physikalischen Optik aus erscheinen die vier angeführten Fundamentalgesetze der geometrischen Optik nur als allerdings meist sehr weitgehende Annäherungsgesetze. Es lässt sich aber wohl angeben, welches der Giltigkeitsbereich der geometrischen Optik ist, d. h. unter welchen Umständen ihre Folgerungen von der Wirklichkeit eine merkbare Abweichung besitzen.

An diesem Umstande muss man stets festhalten, wenn man in der geometrischen Optik sich nicht auf einem Uebungsfelde der reinen Mathematik, sondern in einer wirklich physikalischen Disciplin bewegen will. Die wirklich vollständige Theorie der optischen Instrumente lässt sich nur vom Standpunkte der physikalischen Optik aus entwickeln.

Da aber, wie schon vorhin bemerkt wurde, die Gesetze der geometrischen Optik in den meisten Fällen eine sehr grosse Annäherung an die Wirklichkeit besitzen, so erscheint es gerechtfertigt, zunächst diese geometrisch-optischen Gesetze bis zu ihren Consequenzen in complicirteren Fällen, wie sie z. B. in den optischen Instrumenten vorhanden sind, zu entwickeln.

Kapitel I.

Die Fundamentalgesetze.

1. Directe Erfahrungen. Unter den directen Erfahrungen sollen die vier eben angeführten Grundgesetze verstanden werden.

Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes wird bewiesen durch den Schatten, den eine kleine (punktförmige) Lichtquelle P von einem undurchsichtigen Gegenstande auf einem Schirme S entwirft. Hat der undurchsichtige Gegenstand ein Loch L, so findet man die Schattengrenze auf dem Schirme S als Durchschnitt von S mit einem Kegel, dessen Spitze in der Lichtquelle P liegt, und dessen Mantel durch die Umgrenzung des Loches L geht.

Wenn man das Loch L kleiner macht, so zieht sich die Schattengrenze auf dem Schirme S zusammen. Sie wird aber unscharf, wenn das Loch L sehr klein (unter 1 mm etwa) wird; nach Punkten des Schirmes S, welche innerhalb des geometrischen Schattens

liegen, gelangt noch Licht von der Quelle *P*. Es ist zwar zu berücksichtigen, dass eine streng punktförmige Lichtquelle *P* nie herzustellen ist, und dass schon wegen der Ausdehnung der Quelle *P* die Schattengrenze keine absolut scharfe sein kann, auch wenn sich das Licht geradlinig ausbreitet (Kernschatten und Halbschatten). Indess ist bei einem sehr kleinen Loche *L* (von etwa $^1/_{10}$ mm Grösse) die Lichtausbreitung hinter *L* auf dem Schirme *S* so weit, dass sicher in diesem Falle keine geradlinige Ausbreitung des Lichtes vorliegt.

Dieselben Resultate erhält man, wenn man die Lichtausbreitung anstatt mit Hülfe eines Loches *L* in einem undurchsichtigen Gegenstande durch den Schatten studirt, den ein undurchsichtiger Gegenstand *S'* auf dem Schirme *S* entwirft. Ist *S'* genügend klein, so findet keine geradlinige Ausbreitung des Lichtes von *P* aus statt. Man muss also daran festhalten, dass das Gesetz von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes nur dann gilt, wenn die freien Oeffnungen, durch welche das Licht hindurchtritt, oder die Schirme, welche den Durchtritt des Lichtes verhindern, nicht zu klein sind.

Um die Ausbreitung des Lichtes von einer Quelle *P* aus nach einem Schirme *S* hin anschaulich zu bezeichnen, pflegt man zu sagen, dass *P* Lichtstrahlen nach *S* entsende. Der Weg eines Lichtstrahles wird dadurch definirt, dass seine Wirkung auf *S* nur durch ein Hinderniss abgeschnitten wird, welches auf der Bahn des Lichtstrahls selbst liegt. Bei geradliniger Ausbreitung des Lichtes sind also auch die Lichtstrahlen gerade, z. B. wenn das Licht sich von *P* aus durch ein nicht zu kleines Loch *L* eines undurchsichtigen Gegenstandes ausbreitet. In diesem Falle pflegt man zu sagen, dass *P* ein Bündel gerader Lichtstrahlen durch *L* hindurchsende.

Da bei Verkleinerung von *L* die Lichtwirkung auf einem Schirme *S* sich so darstellt, als ob für gewisse, von *P* ausgesandte Lichtstrahlen die Wirkung auf *S* einfach aufgehoben ist, während sie für die anderen Lichtstrahlen unverändert geblieben ist, so sind die Theile eines Lichtbündels unabhängig von einander.

Auch dieses Gesetz besteht nicht mehr, wenn die Verkleinerung des Loches *L* zu weit geht. Dann hört aber überhaupt der Begriff der geraden, von *P* fortgepflanzten Lichtstrahlen auf.

Die Lichtstrahlen sind also ein zweckmässig eingeführter Begriff, man kann aber nicht einen einzelnen Lichtstrahl isoliren und

seine physikalische Existenz nachweisen. Denn je mehr man durch Verengerung eines Lichtstrahlenbündels diesem Ziele zustrebt, um so weniger breitet sich das Licht geradlinig aus und um so mehr verliert der Begriff der Lichtstrahlen seine physikalische Bedeutung.

Wenn die Homogenität des Raumes, in welchem sich die Lichtstrahlen befinden, gestört wird durch einen eingelagerten Körper, so erfahren die Lichtstrahlen an seiner Oberfläche plötzliche Richtungsänderungen: der Lichtstrahl spaltet sich in zwei, einen reflectirten und einen gebrochenen Strahl. — Ist die Oberfläche des Körpers, welche von dem Lichtstrahl getroffen wird, eine Ebene, so nennt man die durch die Normale N dieser Ebene und den Lichtstrahl gelegte Ebene die Einfallsebene, den Winkel zwischen jenen beiden Richtungen den Einfallswinkel (φ).

Es bestehen die Gesetze: Der reflectirte und der gebrochene Strahl liegen ebenfalls in der Einfallsebene, der Reflexionswinkel (Winkel zwischen N und reflectirtem Strahl) ist gleich dem Einfallswinkel, der Brechungswinkel φ' (Winkel zwischen N und gebrochenem Strahl) steht mit dem Einfallswinkel φ in der Beziehung:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = n, \tag{1}$$

wobei n für eine bestimmte Farbe des Lichtes eine Constante ist, und der Brechungsexponent (oder Brechungsindex) des Körpers gegen seine Umgebung genannt wird. — Wenn nichts anderes bemerkt ist, wollen wir unter n den Brechungsexponenten gegen Luft verstehen. — Für alle gut durchsichtigen, flüssigen und festen Körper ist derselbe grösser als 1.

Ist ein Körper A durch eine dünne, planparallele Platte eines anderen Körpers B von der Luft getrennt, so wird das Licht an beiden Grenzflächen der Platte gebrochen entsprechend der Formel (1) nach den Gesetzen:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = n_b, \quad \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi''} = n_{ab},$$

wobei φ den Einfallswinkel des Lichtes in Luft, φ' den Brechungswinkel im Körper B, φ'' den Brechungswinkel im Körper A, n_b den Brechungsexponenten von B gegen Luft, n_{ab} den Brechungsindex von A gegen B bedeutet. Es ist daher

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi''} = n_b \cdot n_{ab}.$$

Wenn die Platte des Körpers B unendlich dünn wird, so bleibt diese Formel bestehen; der Fall unterscheidet sich dann aber nicht mehr von dem zuerst betrachteten, dass eine einfache Brechung des Lichtes von Luft gegen den Körper A stattfindet. Die letzte Formel liefert also durch Vergleichung mit (1), wenn wir den Brechungsindex von A gegen Luft mit n_a bezeichnen:

$$n_a = n_b \cdot n_{ab},$$

oder (2)

$$n_{ab} = n_a : n_b,$$

d. h. der Brechungsexponent von A gegen B ist gleich dem Verhältniss der Brechungsexponenten von A und B gegen Luft.

Wenn wir den Fall betrachtet hätten, dass eine unendlich dünne Platte A auf dem Körper B läge, so würden wir durch dieselbe Schlussweise erhalten:

$$n_{ba} = n_b : n_a.$$

Es ist also

$$n_{ab} = 1 : n_{ba},$$

d. h. der Brechungsindex von A gegen B ist gleich dem reciproken Werthe des Brechungsindex von B gegen A.

Das Brechungsgesetz (1) erlaubt daher nun den Schluss, dass man auch φ' als Einfallswinkel im Körper, φ als Brechungswinkel in seiner Umgebung (Luft) betrachten kann, d. h. dass der Sinn der Lichtausbreitung auch ohne Aenderung der Strahlenrichtungen umgekehrt werden kann. Bei dem Reflexionsgesetz ist dies Princip der Umkehrbarkeit der Lichtwege ebenfalls giltig, wie hier ohne Weiteres ersichtlich ist.

Man erhält daher das Brechungsgesetz (1) beim Uebergang des Lichtes von einem Körper A zu einem Körper B oder umgekehrt in der symmetrischen Form:

$$n_a \cdot \sin \varphi_a = n_b \cdot \sin \varphi_b, \tag{3}$$

wobei φ_a und φ_b die Winkel des Lichtstrahls im Körper A bezw. B gegen die Normale N der Trennungsfläche bedeuten, und n_a bezw. n_b die Brechungsexponenten der beiden Körper gegen irgend einen dritten Vergleichskörper, z. B. Luft, oder auch gegen den luftleeren Raum, das Vacuum..

Was letzteren anbelangt, so unterscheidet sich der Brechungsexponent n eines Körpers gegen Luft nur sehr wenig von dem Brechungsexponenten n_o gegen das Vacuum. Nach (2) muss sein:

$$n_o = n : n', \tag{4}$$

wobei n' den Brechungsindex des Vacuums gegen Luft bedeutet. Derselbe hat bei Atmosphärendruck und 0 Grad Temperatur den Werth

$$n' = 1 : 1{,}00029. \tag{5}$$

Nach dem Brechungsgesetz (3) giebt es zu jedem einfallenden Lichtstrahl (φ_a) nur dann einen gebrochenen Strahl (φ_b), falls $n_a < n_b$ ist. Ist das Umgekehrte der Fall ($n_a > n_b$), so wird für

$$sin\ \varphi_a > \frac{n_b}{n_a} \tag{6}$$

$sin\ \varphi_b > 1$, d. h. es giebt keinen reellen Brechungswinkel φ_b. Dann tritt an der Grenzfläche keine Brechung, sondern nur Reflexion ein. Im reflectirten Strahl muss jetzt die ganze Wirkung des einfallenden Strahles enthalten sein; daher bezeichnet man diesen Fall als Totalreflexion.

In welcher Weise sich in den anderen Fällen (partielle Reflexion) die Wirkung des einfallenden Strahles auf den reflectirten und gebrochenen Strahl vertheilt, wird in der physikalischen Optik (im II. Abschnitt, Kapitel II) näher betrachtet werden. Hier mag die Bemerkung genügen, dass im Allgemeinen bei durchsichtigen Körpern der gebrochene Strahl weit mehr Lichtwirkung enthält, als der reflectirte. Nur bei den Metallen findet sich in letzterem fast die volle Wirkung des einfallenden Strahles. Es ist übrigens zu bemerken, dass bei so stark undurchsichtigen Körpern, wie den Metallen, das Reflexionsgesetz wohl bestehen bleibt, das Brechungsgesetz aber in der Form (1) oder (3) nicht mehr giltig ist. Auch dieses soll später näher betrachtet werden (im II. Abschnitt, Kapitel IV).

Im Licht empfinden wir verschiedene Qualitäten: die Farben. Der Brechungsindex hängt von der Farbe ab, er wird (gegen Luft gemessen) bei allen gut durchsichtigen Körpern grösser von roth über gelb zu blau. Die Ausbreitung weissen Lichtes beim Durchgang durch ein Prisma in ein Spectrum beruht auf der Aenderung des Brechungsindex mit der Farbe. Man nennt diese Eigenschaft des Körpers seine Dispersion.

Ist die Oberfläche eines Körpers, der von Lichtstrahlen getroffen wird, nicht eben, sondern gekrümmt, so kann man trotzdem die Oberfläche als aus sehr kleinen Stücken von Ebenen (den Tangentialebenen) zusammengesetzt denken und den Gang der Lichtstrahlen nach den obigen Gesetzen construiren. Dieses Verfahren ist aber nur statthaft, wenn die Krümmung der Oberfläche einen gewissen Betrag nicht übersteigt, so dass wir die Fläche noch als eine glatte bezeichnen können.

Rauhe Oberflächen zeigen unregelmässige (diffuse) Reflexion und Brechung, sie wirken ähnlich so, als ob sie selbst Licht ausstrahlen.

Die Grenzfläche eines Körpers ist überhaupt nur bei diffuser Reflexion oder Brechung sichtbar; dagegen ist die Oberfläche eines vollkommenen Spiegels nicht sichtbar, man sieht nur die an ihr reflectirten Strahlen, die von ausserhalb des Spiegels liegenden Lichtquellen herrühren, d. h. man sieht nur die letzteren.

2. Satz vom ausgezeichneten Lichtweg. Die vorhin angeführten directen Erfahrungsthatsachen über die Richtung der Lichtstrahlen lassen sich gemeinsam zusammenfassen in den Satz vom ausgezeichneten Lichtweg. Wenn ein Lichtstrahl durch eine beliebige Anzahl von Reflexionen und Brechungen von einem Punkte P nach einem Punkte P' gelangt, so ist die Summe der Producte aus Brechungsexponent je eines Mediums und der in ihm durchlaufenen Strecke $\Sigma n l$, ein Extremwerth, d. h. sie weicht von der gleichen Summe für alle, dem thatsächlichen Wege unendlich benachbarten höchstens um Glieder zweiter Ordnung ab. Es ist also, wenn wir die Aenderung erster Ordnung durch ein vorgesetztes δ bezeichnen:

$$\delta \Sigma n l = 0. \quad (7)$$

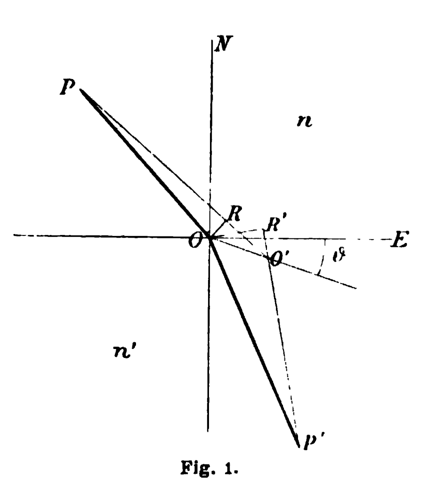


Fig. 1.

Das Product: Brechungsexponent mal durchlaufener Weg wird „Lichtweg“ oder „optische Länge“ des Strahles genannt.

Um den Satz für eine einzelne Brechung zu beweisen, sei POP' der thatsächliche Gang des Lichtes (Figur 1). OE sei der Durchschnitt der Einfallsebene PON mit der Grenzfläche (Tangentialebene) des brechenden Körpers. O' sei ein dem Punkte O unendlich benachbarter Punkt in der Grenzfläche des brechenden Körpers, und zwar möge OO' einen beliebigen Winkel ϑ mit der Einfallsebene, d. h. der Linie OE, einschliessen. Nun ist zu beweisen, dass bis auf Grössen der zweiten oder höheren Ordnung

$$n \cdot PO + n' \cdot OP' = n \cdot PO' + n' \cdot O'P' \quad (8)$$

ist, wenn n und n' die Brechungsexponenten der aneinander grenzenden Medien bedeuten.

Fällt man von O ein Lot OR auf PO' und ein Lot OR' auf $P'O'$, so ist bis auf Grössen zweiter Ordnung:

$$PO' = PO + RO', \quad O'P' = OP' - O'R'. \tag{9}$$

Ferner ist mit derselben Annäherung:

$$RO' = OO' \cdot \cos POO', \quad O'R' = OO' \cdot \cos P'OO'. \tag{10}$$

Um $\cos POO'$ zu berechnen, wollen wir die Richtungscosinus der Strecken PO und OO' in Bezug auf ein rechtwinkliges Axenkreuz hinschreiben, als das wir die Richtungen ON, OE und OD wählen, wobei OD senkrecht zu ON und OE gedacht ist. Bezeichnet φ den Einfallswinkel PON, so sind die Richtungscosinus von PO (die Vorzeichen lassen wir unberücksichtigt):

$$PO: \quad \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ o,$$

die Richtungscosinus von OO':

$$OO': \quad o,\ \cos\vartheta,\ \sin\vartheta.$$

Nach einem Satze der analytischen Geometrie, nach dem der Cosinus des Winkels zwischen zwei beliebigen Strecken gleich der Summe der Producte entsprechender Richtungscosinus der Strecken gegen ein rechtwinkliges Axenkreuz ist, folgt:

$$\cos POO' = \sin\varphi \cdot \cos\vartheta,$$

und analog:

$$\cos P'OO' = \sin\varphi' \cdot \cos\vartheta,$$

falls φ' den Brechungswinkel bedeutet.

Fig. 2.

Es ist daher nach (9) und (10):

$$n \cdot PO' + n' \cdot O'P' = n \cdot PO + n \cdot OO' \cdot \sin\varphi \cdot \cos\vartheta + n' \cdot OP' - n' \cdot OO' \cdot \sin\varphi' \cdot \cos\vartheta.$$

Da nun aber nach dem Brechungsgesetz (3) die Relation besteht:

$$n \cdot \sin\varphi = n' \cdot \sin\varphi',$$

so ist in der That die Relation (8) erfüllt für eine beliebige Lage des Punktes O', falls er nur unendlich nahe benachbart ist an O.

Für eine einzelne Reflexion lässt sich der Satz (7) einfacher beweisen. Derselbe nimmt hier die Form an:

$$\delta\,(PO + OP') = 0, \tag{11}$$

falls, wie in Figur 2 gezeichnet ist, PO und OP' den thatsächlichen Strahlengang bezeichnet. Denken wir uns denjenigen Punkt P_1 construirt, welcher zu P symmetrisch liegt in Bezug auf die Tangentialebene OE des brechenden Körpers, so ist für jeden beliebigen Punkt O' in der Tangentialebene $PO' = P_1 O'$. Der Lichtweg von P nach P' bei einer einmaligen Reflexion an der Tangentialebene OE ist also bei jeder beliebigen Lage des Treffpunktes O' gleich der Länge $P_1 O' + O'P'$. Diese Länge ist nun ein Minimum, wenn P_1, O' und P' in gerader Linie liegen. Dann fällt aber der Punkt O' in der That mit dem aus dem Reflexionsgesetz folgenden Punkte O zusammen. Da nun die Eigenschaft eines Minimums (ebenso wie eines Maximums) durch Verschwinden der ersten Variation, d. h. durch die Gleichung (11), sich ausdrückt, so ist unser Satz (7) für eine einmalige Reflexion bewiesen.

Es ist zu bemerken, dass das Verschwinden der ersten Variation sowohl der Ausdruck eines Minimums wie eines Maximums sein kann. In dem Falle, wo der brechende Körper thatsächlich von einer Ebene begrenzt ist, folgt aus der angegebenen Construction ohne Weiteres, dass bei der Reflexion der Lichtweg ein Minimum ist. Ebenso lässt sich beweisen, wie weiter unten näher ausgeführt werden wird, dass bei der Brechung der thatsächliche Lichtweg ein Minimum ist, falls der brechende Körper von einer Ebene begrenzt wird. Daher ist unser Princip auch oft das vom kürzesten Lichtweg genannt worden.

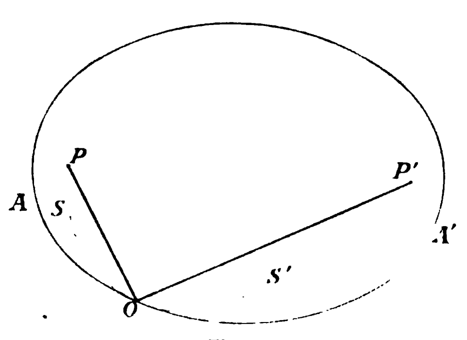


Fig. 3.

Wenn indess die Oberfläche des brechenden oder reflectirenden Körpers gekrümmt ist, so kommt es ganz auf die Art dieser Krümmung an, ob der Lichtweg ein Minimum oder ein Maximum ist. Allen Fällen gemeinsam ist nur das Verschwinden der ersten Variation, und dies genügt auch vollkommen zur Bestimmung des Strahlenganges.

Um die Verhältnisse klar zu übersehen, empfiehlt sich die Einführung der sogenannten aplanatischen Fläche, das ist diejenige Fläche, für deren sämmtliche Punkte A die Summe der Lichtwege

nach den zwei Punkten P und P' constant ist. Für diese Fläche verschwindet also für die Summe der Lichtwege nicht nur die Variation der ersten Ordnung, sondern alle Variationen beliebig hoher Ordnung.

Bei der Reflexion ist die aplanatische Fläche

$$PA + P'A = \text{Constante } C \qquad (12)$$

ein Rotationsellipsoid mit den Punkten P und P' als Brennpunkten.

Wenn SOS' das Stück eines reflectirenden Spiegels ist (vgl. Figur 3), und O ein Punkt auf demselben, für den die Richtungen PO und $P'O$ dem Reflexionsgesetz genügen, so muss die zu den Punkten P und P' zugehörige aplanatische Fläche AOA', welche durch den Punkt O geht, offenbar den Spiegel SOS' in O berühren, da für beide Flächen die erste Variation der Lichtwege verschwindet. Ist nun der Spiegel SOS', wie in der Figur, stärker concav gekrümmt als die aplanatische Fläche, so ist der Lichtweg $PO + OP'$ ein Maximum, sonst ein Minimum. Der Beweis hierfür ergiebt sich direct aus dem Anschauen der Figur, da für alle Punkte O' im Innern des Rotationsellipsoids AOA', dessen Gleichung durch (12) gegeben ist, die Summe $PO' + O'P'$ kleiner ist als die Constante C, während für alle äusseren Punkte O' die Summe $PO' + O'P'$ grösser ist als C, und für den thatsächlichen Reflexionspunkt O die Summe $PO + OP'$ gleich ist C.

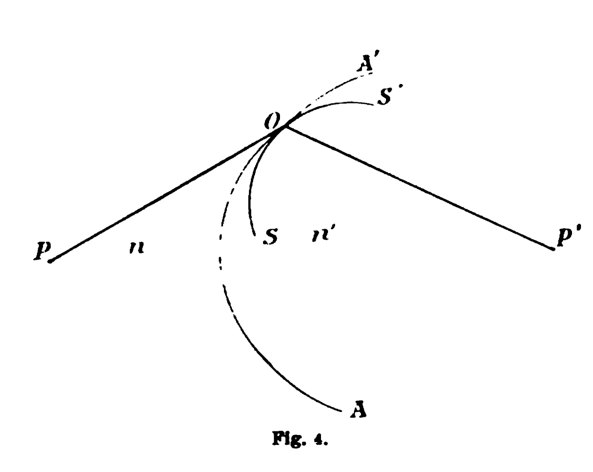


Fig. 4.

Bei der Brechung ist die aplanatische Fläche

$$n \cdot PA + n' \cdot P'A = \text{Constante } C$$

eine sogenannte Kartesische Ovale, welche nach dem schwächer brechenden Medium zu (es sei in der Figur 4 $n < n'$) convex sein muss, und zwar offenbar stärker als irgend eine um P' als Centrum beschriebene Kugel.

Diese aplanatische Fläche scheidet wiederum die Gebiete, für deren Punkte O' die Summe der Lichtwege $n \cdot PO' + n' \cdot P'O' > C$ ist, von denen, in welchen jene Summe $< C$ ist. Erstere Gebiete liegen von der aplanatischen Fläche aus nach dem schwächer brechenden Medium (links in der Figur), letztere nach dem stärker brechenden Medium (rechts in der Figur).

Wenn nun SOS' ein Stück der Grenzfläche zwischen beiden Medien ist, und PO, $P'O$ den thatsächlichen Strahlenverlauf, wie er nach dem Brechungsgesetze stattfindet, bezeichnet, so ist der Lichtweg über O ein Maximum oder Minimum, je nachdem SOS' stärker oder schwächer convex ist nach dem schwächer brechenden Medium zu, als die aplanatische Fläche AOA'. Der Beweis ergiebt sich direct aus der Figur.

Falls also z. B. SOS' eine Ebene ist, so ist der Lichtweg ein Minimum. In der Figur ist der Fall gezeichnet, dass der Lichtweg über O ein Maximum ist.

Da wir später sehen werden, dass der Brechungsexponent umgekehrt proportional der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist, so ist der optische Weg nl proportional der Zeit, welche das Licht zum Durchlaufen der Strecke l gebraucht hat. Das Princip des kürzesten Lichtweges deckt sich also mit Fermat's Princip der schnellsten Ankunft des Lichtes, man erkennt aber aus dem Vorigen, dass unter Umständen die Ankunft des Lichtes auch die langsamste sein kann.

Nach dem Princip der Superposition von Variationen können wir von der Gleichung $\delta \Sigma nl = 0$ für eine einzelne Reflexion oder Brechung sofort Anwendung machen auf den Fall beliebig vieler.

3. Der Satz von Malus. Es giebt zwei verschiedene Arten von geometrischen Strahlensystemen: solche, welche sich rechtwinklig von einer geeignet konstruirten Fläche F schneiden lassen (orthotomisches System), und solche, für welche eine derartige Fläche F nicht gefunden werden kann (anorthotomisches System). Unter Benutzung des vorigen Satzes lässt sich nun der Satz von Malus beweisen. Derselbe lautet: Ein orthotomisches System von Strahlen bleibt auch nach beliebig vielen Reflexionen und Brechungen ein orthotomisches. Nach der Wellentheorie des Lichtes, nach der die Strahlen die Normalen der Wellenfläche sind, ist der Satz selbstverständlich. Man kann ihn aber auch allein aus den bisher benutzten geometrischen Fundamentalgesetzen herleiten.

Seien (vgl. Figur 5) $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ zwei unendlich nahe benachbarte Strahlengänge, und zwar mögen sie senkrecht von einer Fläche F ausgehen. Ist die gesammte optische Länge von A bis E mit L bezeichnet, so lässt sich beweisen, dass alle Strahlen senkrecht auf einer Fläche F' stehen, die von den Endpunkten E, E' etc. aller Strahlengänge gebildet werden, für die die gesammten optischen Längen, von ihren Anfangspunkten A, A' aus gerechnet, denselben constanten Werth L besitzen. — Zum Beweise wollen wir uns $A'B$ und $E'D$ gezogen denken.

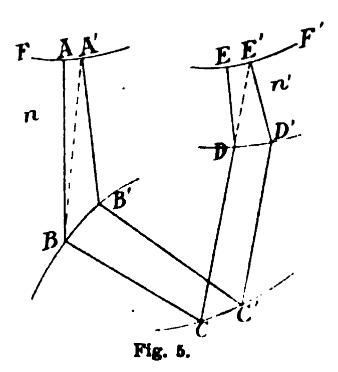


Fig. 5.

Nach dem vorigen Satze vom ausgezeichneten Lichtweg muss der gesammte Lichtweg $A'B'C'D'E'$ gleich sein dem nur unendlich wenig variirten $A'BCDE'$, d. h. gleich L, welches auch der Werth für den Lichtweg $ABCDE$ ist. Subtrahirt man nun von beiden Lichtwegen $A'BCDE'$ und $ABCDE$ die gemeinsamen Strecken, so folgt, dass sein muss:

$$n \cdot AB + n' \cdot DE = n \cdot A'B + n' \cdot DE',$$

falls mit n der Brechungsindex vor der Fläche F, mit n' der Brechungsindex vor F' bezeichnet wird. Da nun aber $AB = A'B$ ist, weil AB senkrecht gegen F gerichtet sein soll, so folgt auch

$$DE = DE',$$

d. h. DE steht senkrecht zur Fläche F'. Ebenso lässt sich für jeden anderen Strahl $D'E'$ beweisen, dass er senkrecht auf F' steht.

Strahlen, die von einem leuchtenden Punkte ausgehen, stehen senkrecht auf einer Fläche F, nämlich auf irgend einer um den leuchtenden Punkt als Centrum beschriebenen Kugel. Da jede Lichtquelle als ein Komplex leuchtender Punkte angesehen werden kann, so bilden also stets die Lichtstrahlen ein orthotomisches System.

Kapitel II.

Geometrische Theorie der optischen Abbildung.

1. Begriff des optischen Bildes. Wenn wir einen leuchtenden Punkt P haben, in dessen Umgebung brechende und reflectirende Körper beliebig angeordnet sind, so geht im Allgemeinen durch einen beliebigen Punkt P' des Raumes nur ein einziger Lichtstrahl, d. h. die Richtung, in welcher das Licht von P nach P' gelangt, ist eine eindeutig bestimmte. Es können aber auch Punkte P' gefunden werden, in denen sich mehrere Lichtstrahlen schneiden, z. B. zwei Lichtstrahlen, wenn P' der Durchschnittspunkt zweier von P ausgehender Lichtstrahlen ist. — Wenn ein Bündel von Lichtstrahlen, die von P ausgehen, sich in einem Punkte P' schneiden, so heisst P' das optische Bild von P. In P' wird offenbar ein Maximum von Lichtwirkung stattfinden. Das Bild P' wird reell genannt, wenn die Lichtstrahlen dort wirklich zum Schnitt kommen, dagegen virtuell, falls erst die rückwärtigen Verlängerungen der Lichtstrahlen sich in P' schneiden. Das einfachste Beispiel eines virtuellen Bildes bietet die Spiegelung einer Lichtquelle P in einem ebenen Spiegel. Das Bild P' ist der symmetrisch zu P in Bezug auf den Spiegel gelegene Punkt. Reelle Bilder kennzeichnen sich durch directe Erleuchtung einer geeignet gehaltenen rauhen Fläche, z. B. Tafel weissen Papiers, virtuelle Bilder nicht. Bei der Spiegelung dringt z. B. gar kein Licht zum Bildpunkte P'. Virtuelle Bilder können aber durch optische Vorrichtungen in reelle Bilder umgewandelt werden, z. B. sehen wir ein virtuelles Bild, indem dasselbe mit Hülfe des Auges in ein reelles Bild umgewandelt wird, welches eine bestimmte Stelle der Netzhaut erleuchtet.

Das im Bilde zur Vereinigung gebrachte Strahlenbündel kann ein endliches, oder auch ein unendlich dünnes räumliches oder eventuell sogar nur ebenes (Elementar-)Bündel sein. Denken wir uns z. B. den Fall einer einzigen Brechung. Wenn die Grenzfläche des brechenden Körpers die aplanatische Fläche für die beiden Punkte P und P' ist, so wird ein endliches Strahlenbündel, welches von P ausgeht, in P' zur Vereinigung gebracht; denn alle Strahlen, die von P ausgehen und die aplanatische Fläche treffen, müssen sich in P' schneiden, da für sie alle die gesammte optische Länge denselben Werth hat.

Wenn die Grenzfläche des brechenden Körpers nicht die Gestalt der aplanatischen Fläche besitzt, so kommen um so weniger Strahlen in P' zur Vereinigung, je stärker die Abweichung in der Gestalt beider Flächen (die sich nothwendig berühren müssen, cf. oben S. 12) ist. Damit ein ebenes Elementarbüschel sich in P' schneide, muss wenigstens in einer Ebene die Krümmung beider Flächen in ihrem Berührungspunkte O übereinstimmen. Stimmt die Krümmung beider Flächen in O für zwei Ebenen und damit überhaupt überein, so kommt in P' ein räumliches Elementarbündel zum Schnitt, und wenn schliesslich ein endliches Stück der Grenzfläche des brechenden Körpers zusammenfällt mit der aplanatischen Fläche, so gelangt ein endliches Strahlenbündel in P' zum Schnitt.

Vermöge der Umkehrbarkeit der Lichtwege können Lichtquelle P und Bild P' ihre Function vertauschen, d. h. P' als Lichtquelle hat sein Bild in P. Wegen dieser Umkehrbarkeit der Beziehung nennt man auch P und P' conjugirte Punkte.

2. Allgemeine Abbildungsformeln. Wir wollen annehmen, dass es durch irgend welche Mittel (Reflexionen und Brechungen) gelungen wäre, ein räumliches Continuum von Punkten P abzubilden in ein räumliches Continuum von Punkten P'. Ersteres Continuum heisst der Object-Raum, letzteres der Bild-Raum. Nach der Definition, nach der das optische Bild definirt ist, folgt, dass es zu jedem[1]) durch P gehenden Strahl einen durch P' gehenden conjugirten Strahl giebt. Zweien in P sich schneidenden Strahlen des Objectraumes müssen zwei conjugirte Strahlen im Bildraum entsprechen, welche sich ebenfalls schneiden, und zwar in dem zu P conjugirten Punkte P'. Es giebt also zu jedem P nur einen conjugirten Punkt P'. Wenn vier Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$ des Objectraumes in einer Ebene liegen, so schneiden sich die Strahlen, welche je zwei dieser Punkte verbinden, z. B. der Strahl $P_1 P_2$ schneide $P_3 P_4$ im Punkte A. Die conjugirten Strahlen $P'_1 P'_2$ und $P'_3 P'_4$ schneiden sich daher ebenfalls, nämlich im Bilde A' von A. Daher liegen die vier Bilder $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$ ebenfalls in einer Ebene. — Man kann also sagen, dass sich Punkte, Strahlen und Ebenen in beiden Räumen gegenseitig eindeutig entsprechen. Eine solche Beziehung beider Räume nennt die Geometrie eine collineare Verwandtschaft.

1) Die Abbildung soll nicht nur durch Elementarbüschel, sondern durch beliebig weite, endliche Büschel zu Stande kommen.

Der analytische Ausdruck der collinearen Verwandtschaft lässt sich leicht bilden. Nennen wir $x\,y\,z$ die Coordinaten eines Punktes P im Objectraum in Bezug auf ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem, $x'\,y'\,z'$ die Coordinaten des conjugirten Punktes P' in Bezug auf ein anderes, für den Bildraum angenommenes Coordinatensystem, so muss zu jedem $x\,y\,z$ ein und zwar nur ein Werthsystem $x'\,y'\,z'$ zugehören, und umgekehrt. Dies ist nur möglich bei dem Ansatz:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{ax + by + cz + d},$$
$$y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{ax + by + cz + d}, \qquad (1)$$
$$z' = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{ax + by + cz + d},$$

wobei die a, b, c, d gewisse Constanten sind. — In der That, für jedes x', y', z' berechnen sich nach (1) die x, y, z aus drei linearen Gleichungen; und umgekehrt gehört zu jedem x, y, z ein Werthsystem x', y', z'. Wenn die rechten Seiten der Gleichungen (1) nicht der Quotient zweier linearer Functionen von x, y, z wären, so würden zu gegebenem x', y', z' mehrere Werthsysteme x, y, z gehören; ausserdem muss der Nenner dieser Quotienten ein und dieselbe lineare Function sein $(ax + by + cz + d)$, weil sonst einer Ebene:

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0$$

nicht wiederum eine Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

entsprechen würde.

Wenn man die Gleichungen (1) nach x, y, z auflöst, so folgen ganz analoge Formen wie (1), nämlich:

$$x = \frac{a'_1 x' + b'_1 y' + c'_1 z' + d'_1}{a'x' + b'y' + c'z' + d'}, \text{ etc.} \qquad (2)$$

Aus (1) folgt

für $ax + by + cz + d = 0: \quad x' = y' = z' = \infty$,

aus (2) folgt

für $a'x' + b'y' + c'z' + d' = 0: \quad x = y = z = \infty$.

Die Ebene $ax + by + cz + d = 0$ heisst die Brennebene $\mathfrak{F}$ des Objectraumes. Ihren Punkten P entsprechen im Unendlichen liegende Bilder P'. Zwei Strahlen, die von einem Punkte P dieser

Brennebene ausgehen, entsprechen zwei Parallelstrahlen im Bildraume.

Die Ebene $a'x' + b'y' + c'z' + d' = 0$ heisst die **Brennebene** $\mathfrak{F}'$ **des Bildraumes**. Parallelstrahlen des Objectraumes besitzen conjugirte Strahlen im Bildraume, die sich in einem Punkte dieser Brennebene $\mathfrak{F}'$ schneiden.

In dem Falle, dass $a = b = c = 0$ ist, entsprechen, wie aus den Gleichungen (1) hervorgeht, allemal endlichen Werthen von x, y, z auch endliche Werthe von x', y', z' und umgekehrt. Es ist also dann auch $a' = b' = c' = 0$. In diesem Falle, der als **teleskopische Abbildung** bezeichnet wird, giebt es also keine, im Endlichen liegenden Brennebenen.

3. Centrirte Abbildung. Bei optischen Instrumenten ist vielfach der Fall realisirt, dass die Abbildung rings um die Axe symmetrisch ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn die Grenzflächen der brechenden bezw. reflectirenden Körper Rotationsflächen mit gemeinsamer Axe sind, oder specieller Kugelflächen, deren Centren auf einer Geraden liegen. — Diese Abbildung wird centrirte genannt.

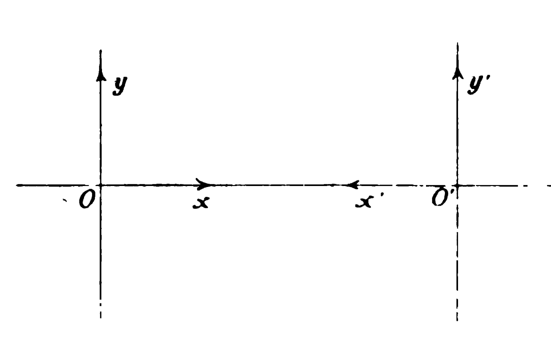


Fig. 6.

Nach Symmetrie muss das Bild P' eines Punktes P in der durch die Axe des Systems und durch den Punkt P gehenden (Meridian-)Ebene liegen, und es genügt zum Studium der Abbildung vollkommen, wenn die Beziehungen zwischen Object und Bild in einer solchen Meridian-Ebene bekannt sind.

Wählen wir als solche die xy-Ebene des Objectraumes und die $x'y'$-Ebene des Bildraumes, und legen wir die x-Axe bezw. x'-Axe in die Symmetrie-Axe der Abbildung, so können die z- bezw. z'-Coordinaten in den Abbildungsgleichungen gar nicht mehr auftreten, so dass sie sich reduciren auf:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + d_1}{ax + by + d}, \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + d_2}{ax + by + d}. \tag{3}$$

Die beiden Coordinatensysteme xy und $x'y'$ haben dann also

parallel gerichtete Coordinatenaxen, und zwar fallen die x-Axe und die x'-Axe in eine Richtung. Der Coordinatenanfang O' für den Bildraum kann aber eine gewisse Distanz von dem Coordinatenanfang O des Objectraumes haben. Die positive Richtung von x soll sich im Sinne der einfallenden Lichtstrahlen (von links nach rechts) erstrecken, die positive Richtung von x' dagegen entgegengesetzt, d. h. von rechts nach links. Die positiven y und y' sollen nach oben gerechnet sein (vgl. Figur 6).

Nach der Symmetrie der Abbildung darf nun x' seinen Werth nicht ändern, falls y sein Vorzeichen ändert. Dies giebt für die Gleichungen (3) die Bedingung $b_1 = b = 0$. Ebenso folgt aus der Symmetrie der Abbildung, dass y' einfach sein Vorzeichen wechselt, falls es y thut. Dies giebt die Bedingung $a_2 = d_2 = 0$. Die Gleichungen (3) reduciren sich daher auf:

$$x' = \frac{a_1 x + d_1}{ax + d}, \quad y' = \frac{b_2 y}{ax + d}. \tag{4}$$

Es bleiben also fünf Constanten übrig, aber nur ihre gegenseitigen Verhältnisse sind für die Abbildung massgebend. **Eine centrirte Abbildung hat also im Allgemeinen vier charakteristische Constanten.**

Die Umkehrung der Gleichungen (4) liefert:

$$x = \frac{dx' - d_1}{a_1 - ax'}, \quad y = \frac{a_1 d - a d_1}{b_2} \cdot \frac{y'}{a_1 - ax'}. \tag{5}$$

Die Brennebene $\mathfrak{F}$ des Objectraumes hat die Gleichung $ax + d = 0$, die Brennebene $\mathfrak{F}'$ des Bildraumes die Gleichung $ax' - a_1 = 0$. Die Durchschnitte mit der Axe des Systems werden die **Brennpunkte** F, F' genannt.

Legen wir den Anfang der x in den Brennpunkt F des Objectraumes, ebenso den Anfang der x' in den Brennpunkt F' des Bildraumes, so ist, falls x_0, x_0' die von den Brennebenen aus gerechneten Coordinaten bedeuten, ax_0 für $ax + d$ zu schreiben, und $-ax_0'$ für $a_1 - ax'$.

Aus den Gleichungen (4) gewinnt man dann:

$$x_0 x_0' = \frac{ad_1 - a_1 d}{a^2}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{b_2}{ax_0}. \tag{6}$$

Es bleiben also nur noch zwei charakteristische Constanten-Combinationen in den Gleichungen übrig. (Die anderen beiden Constanten sind in der Lage der beiden Brennebenen enthalten.) Wir wollen für diese beiden Constanten-Combinationen vereinfachte

Bezeichnungen einführen, indem wir schreiben (es werden jetzt wieder die Indices o an den x fortgelassen):

$$xx' = ff', \quad \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}. \tag{7}$$

Hierbei sind also die x bezw. x' die Entfernungen des Objectes bezw. Bildes von den Brennebenen $\mathfrak{F}$ bezw. $\mathfrak{F}'$.

Das Verhältniss $y' : y$ wird die Lateralvergrösserung genannt, oder auch die Vergrösserung schlechthin. Dieselbe ist gleich 1 für $x = f$, d. h. $x' = f'$. Hierdurch sind zwei zur Axe des Systems senkrecht liegende Ebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ charakterisirt, welche die Hauptebenen der Abbildung genannt werden. Die Durchschnitte mit der Axe des Systems heissen die Hauptpunkte H, H'.

Die Hauptebenen haben also die Eigenschaft, dass irgend einem Punkte P in der einen Hauptebene ein axenäquidistanter Punkt P' in der anderen Hauptebene conjugirt ist.

Die beiden, in den Abbildungsgleichungen (7) noch übrig bleibenden Constanten f und f' haben nach dem Vorigen die Bedeutung der Entfernung der Hauptebenen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ von den Brennebenen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$. Die Constante f heisst die Brennweite des Objectraumes, f' die Brennweite des Bildraumes. f ist positiv gerechnet, wenn die Lichtstrahlen zuerst die Brennebene $\mathfrak{F}$, dann die Hauptebene $\mathfrak{H}$ treffen; bei f' ist es umgekehrt. In Figur 7 sind beide Brennweiten positiv.

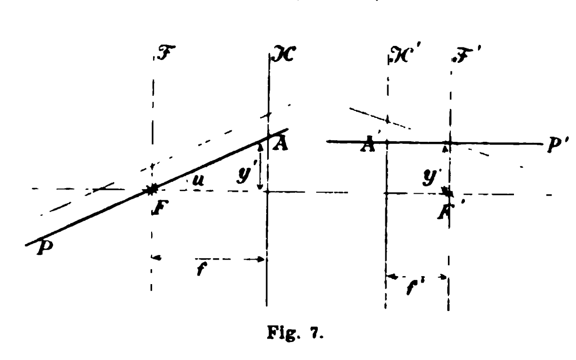


Fig. 7.

Die Bedeutung der Brennweiten kann man sich in folgender Weise klar machen: Parallelstrahlen im Objectraum müssen conjugirte Strahlen im Bildraume besitzen, die sich in einem Punkte der Höhe y' in der Brennebene $\mathfrak{F}'$ schneiden mögen. Diese Höhe y' hängt nun offenbar von dem Neigungswinkel u der einfallenden Strahlen gegen die Axe ab. Ist der Winkel $u = 0$, so folgt schon aus Symmetrie $y' = 0$, d. h. axenparallele Strahlen haben con-

jugirte Strahlen, die sich im Brennpunkt F' vereinigen. Wenn dagegen u von Null verschieden ist, so betrachten wir einen Strahl PFA (Figur 7) des Bündels, der durch den ersten Brennpunkt geht und die Hauptebene $\mathfrak{H}$ in A schneidet. Der conjugirte Strahl zu ihm: $A'P'$ muss offenbar ein axenparalleler Strahl sein, da der erste Strahl durch F geht, ferner hat A' die gleiche Höhe wie A, wegen der Eigenschaft der Hauptebenen. Folglich ist die gesuchte Höhe y' des Bildes der unter dem Winkel u einfallenden Parallelstrahlen, wie aus Figur 7 sofort hervorgeht:

$$y' = f \cdot tg\, u. \tag{8}$$

Man kann deshalb den Satz aussprechen: Die Brennweite des Objectraumes ist gleich dem Verhältniss der linearen Grösse eines in der Brennebene des Bildraumes gelegenen Bildes zur scheinbaren (angularen) Grösse seines unendlich entfernten Objectes. Eine analoge Definition gilt natürlich auch für die Brennweite f' des Bildraumes, wenn man sich nämlich ein schiefes Parallelstrahlbündel in ihm einfallend denkt, so dass es zu einem Bilde in der Brennebene $\mathfrak{F}$ vereinigt wird.

Wenn man sich in Figur 7 $A'P'$ als einfallenden Strahl denkt, so dass die Rolle von Bildraum und Objectraum vertauscht wird, so kann man auch folgende Definition der Brennweite f, die dann also die Brennweite des Bildraumes bedeutet, aussprechen:

Die Brennweite des Bildraumes ist gleich der Entfernung eines axenparallelen Strahles des Objectraumes von der Axe, dividirt durch die Tangente des Neigungswinkels des conjugirten Strahles.

Zu denselben Folgerungen, nämlich der Gleichung (8), gelangt man natürlich von den Gleichungen (7) durch Rechnung, indem man $tg\, u = y : x$, $tg\, u' = y' : x'$ setzt. — Wegen der entgegengesetzten Richtung der x und x' (cf. oben S. 19), der gleichen Richtung der y und y', ergiebt sich, dass u und u' in verschiedener Weise positiv gerechnet sind: Der Neigungswinkel u eines Strahles im Objectraum ist positiv (und kleiner als 90^0), falls der Strahl von links unten nach rechts oben geht; der Neigungswinkel u' eines Strahles des Bildraumes ist positiv, falls der Strahl von links oben nach rechts unten geht.

Die Lateralvergrösserung hängt, wie Gleichung (7) lehrt, von x, d. h. der Entfernung des Objectes vom Brennpunkte F, sowie

von der Brennweite f ab. Sie ist aber unabhängig von y, d. h. eine zur Axe des Systems senkrechte Figur wird **ähnlich** abgebildet. Dagegen wird ein Raumtheil nicht mehr ähnlich abgebildet, wie schon einerseits aus der Abhängigkeit der Lateralvergrösserung von x hervorgeht, andererseits kann man leicht aus (7) ableiten, dass die **Tiefenvergrösserung**, d. h. das Verhältniss eines Zuwachses dx' von x' zu einem Zuwachse dx von x proportional dem **Quadrat** der Lateralvergrösserung ist.

Ein Strahl im Objectraum möge die Hauptebene $\mathfrak{H}$ in A, die Axe in P schneiden (vgl. Figur 8).

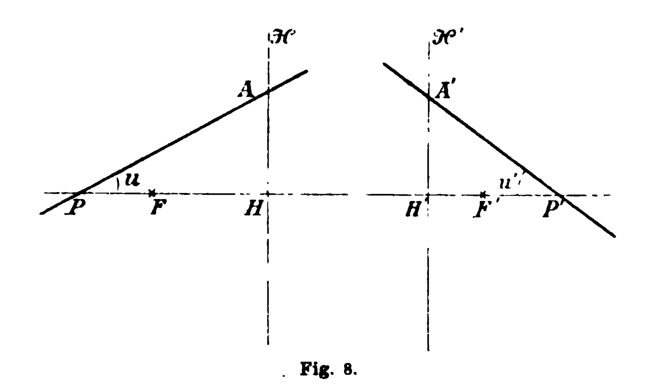


Fig. 8.

Sein Neigungswinkel u gegen die Axe folgt aus

$$tg\, u = \frac{AH}{PH} = \frac{AH}{f - x},$$

falls x die Entfernung des P von F mit richtigem Vorzeichen bedeutet.

Der Neigungswinkel u' des conjugirten Strahles gegen die Axe bestimmt sich aus

$$tg\, u' = \frac{A'H'}{P'H'} = \frac{A'H'}{f' - x'},$$

falls x' die Entfernung des P' von F' bedeutet, und P' der conjugirte Punkt zu P, A' der zu A ist. Wegen der Eigenschaft der Hauptebenen ist $AH = A'H'$, durch Division der beiden letzten Gleichungen folgt also mit Berücksichtigung von (7):

$$(9) \qquad \frac{tg\, u'}{tg\, u} = \frac{f - x}{f' - x'} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'}.$$

Das Verhältniss der Tangenten der Neigungswinkel conjugirter

Strahlen wird Convergenzverhältniss oder Angularvergrösserung genannt. Dasselbe ist also gemäss der Gleichung (9) von u oder u' unabhängig.

Die Angularvergrösserung wird $= -1$ für $x = f'$, oder $x' = f$. Die beiden hierdurch bestimmten (conjugirten) Punkte K und K' heissen die Knotenpunkte des Systems. Sie haben die Eigenschaft, dass einem Strahl durch den einen Knotenpunkt K ein paralleler Strahl durch den anderen Knotenpunkt K' conjugirt ist. — Die Lage der Knotenpunkte K, K' bei positiven Brennweiten f und f' ist in der Figur (9) gezeichnet. KA,

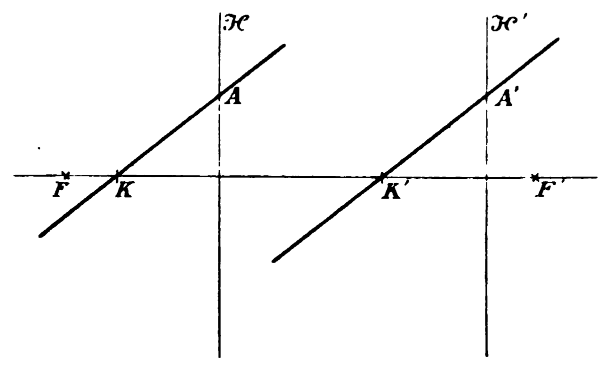


Fig. 9.

$K'A'$ sind zwei conjugirte Strahlen. Es folgt aus der Figur, dass die beiden Knotenpunkte dieselbe Entfernung von einander besitzen wie die beiden Hauptpunkte. — Falls $f = f'$ ist, fallen die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen.

Durch Multiplication der zweiten der Gleichungen (7) mit (9) leitet man ab:

$$\frac{y' \operatorname{tg} u'}{y \operatorname{tg} u} = -\frac{f}{f'} . \tag{10}$$

Nennt man e die Entfernung eines Objectes P von der Hauptebene $\mathfrak{H}$, ebenso e' die Entfernung seines Bildes P' von der Hauptebene $\mathfrak{H}'$, wobei e und e' positiv gerechnet werden sollen, wenn P vor (links von) $\mathfrak{H}$, und P' hinter (rechts von) $\mathfrak{H}'$ liegt, so ist

$$e = f - x, \; e' = f' - x'.$$

Daher liefert die erste der Gleichungen (7):

$$\frac{f}{e} + \frac{f'}{e'} = 1. \tag{11}$$

Dieselbe Gleichung gilt, falls e und e' die Entfernungen des P und P' von zwei beliebigen conjugirten Ebenen, die senkrecht zur Axe stehen, bedeutet und f und f' die Entfernungen der Brennpunkte von diesen Ebenen. Das Resultat ist leicht aus (7) abzuleiten.

4. Constructionen conjugirter Punkte. Die Formel (11) erlaubt eine bequeme graphische Construction (Figur 10). Wenn $ABCD$ ein Rechteck mit den Seiten f und f' ist, so schneidet jede Grade ECE' den rechten Winkel in zwei Distanzen $AE = e$, $AE' = e'$, welche der Gleichung (11) genügen.

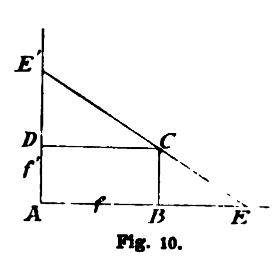


Fig. 10.

Man kann auch in anderer Weise verfahren, um zu P den conjugirten Punkt P' zu finden, indem man die Hauptebenen und Brennpunkte benutzt. Man ziehe (vgl. Figur 11) von P einen axenparallelen Strahl PA, und einen durch den Brennpunkt F gehenden Strahl PF. Zu PA ist $A'F'$ conjugirt, wobei A' dieselbe Höhe wie A hat, zu PFB ist ein axenparalleler Strahl $P'B'$ conjugirt, wobei B und B' gleiche Höhe haben. Der Schnittpunkt P' beider Strahlen ist der gesuchte conjugirte Punkt zu P. — Man könnte auch die Knotenpunkte bequem zur Construction heranziehen.

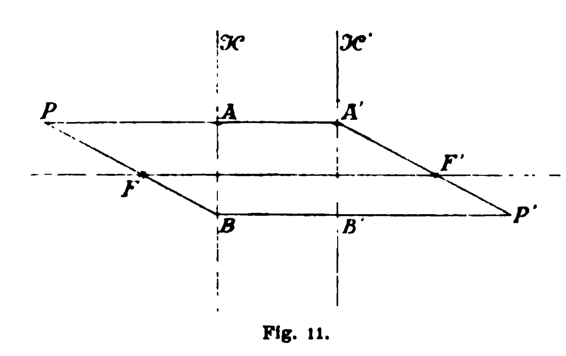


Fig. 11.

Die in Figur 11 benutzte Construction versagt in dem Falle, dass P und P' auf der Axe liegen. Ein von P ausgehender Strahl möge die Brennebene $\mathfrak{F}$ in der Höhe g, die Hauptebene $\mathfrak{H}$ in der Höhe h schneiden (vgl. Figur 12). Der conjugirte Strahl schneide $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{F}'$ in den Höhen $h' = h$ und g'. Aus der Figur folgt, dass

$$\frac{g}{h} = \frac{PF}{f + PF} = \frac{-x}{f - x}, \quad \frac{g'}{h} = \frac{P'F'}{f' + P'F'} = \frac{-x'}{f' - x'};$$

durch Addition folgt:

$$\frac{g + g'}{h} = \frac{2xx' - fx' - f'x}{ff' + xx' - fx' - f'x} = 1, \tag{12}$$

da nach Gleichung (7) $xx' = ff'$ ist. P' ist also dadurch zu finden, dass man die Höhe $g' = h - g$ in der Brennebene $\mathfrak{F}'$ abträgt und die Endpunkte der Strecken $h' = h$ in $\mathfrak{H}'$ und g' in $\mathfrak{F}'$ durch eine Linie verbindet. g und g' sind negativ zu nehmen, falls sie unter der Axe liegen.

5. Charakterisirung der verschiedenen Gattungen von Abbildungen. Die verschiedenen Gattungen von Abbildungen können nur durch die Vorzeichen der Brennweiten f und f' von einander verschieden sein.

Haben beide Brennweiten dasselbe Vorzeichen, so ist die Abbildung eine rechtläufige, d. h. wenn das Object von links

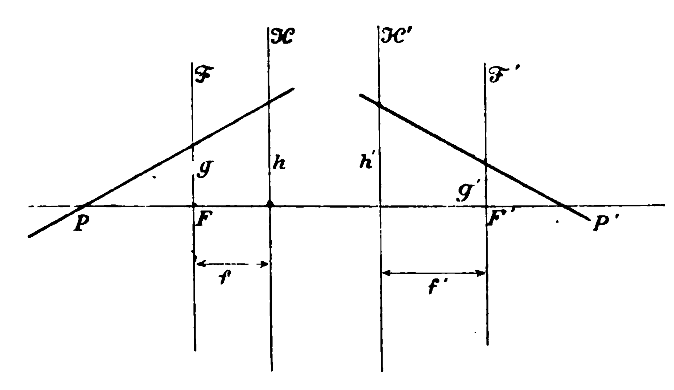


Fig. 12.

nach rechts rückt (d. h. x grösser wird), so rückt das Bild in gleichem Sinne, d. h. auch von links nach rechts (x' wird kleiner). Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung (7) und dem Sinne, in welchem x bezw. x' positiv gerechnet sind (vgl. oben S. 19). Wir werden später sehen, dass diese Art Abbildung vorliegt, falls sie nur durch Brechungen oder eine gerade Zahl von Reflexionen oder eine Combination beider zu Stande kommt. Diese Abbildung wird (weil dieselbe meist nur durch Brechungen realisirt wird), auch kurz als dioptrische bezeichnet.

Haben beide Brennweiten verschiedenes Vorzeichen, so ist die Abbildung rückläufig, d. h. wenn sich das Object von links nach rechts bewegt, so rückt das Bild von rechts nach links, wie aus der Formel $xx' = ff'$ hervorgeht. Dieser Fall liegt vor, wenn die Abbildung durch eine ungerade Zahl von Spiegelungen

zu Stande kommt oder durch Combination von Brechungen mit solchen. Diese Abbildung wird daher auch kurz als katoptrische bezeichnet. Bei diesen Abbildungen ist der Sinn der Lichtausbreitung im Bildraum umgekehrt wie im Objectraum, so dass man diese Fälle gemeinsam zusammenfassen kann unter das Gesetz: Bei jeder Abbildung folgen die conjugirten Punkte zweier conjugirter Strahlen auf einander im Sinne der Lichtausbreitung.

Unter den dioptrischen Abbildungen sind wiederum zu unterscheiden die mit positiven und die mit negativen Brennweiten. Erstere Abbildungen heissen collective, letztere dispansive; bei ersteren nämlich wird ein Parallelstrahlbündel in ein convergentes, bei letzteren in ein divergentes abgebildet, wenn man es von der Hauptebene $\mathfrak{H}'$ des Bildraumes im Sinne der Lichtfortpflanzung weiter verfolgt. Eine Unterscheidung zwischen beiden Abbildungen, je nachdem die Brennpunkte reell oder virtuell sind, kann nicht gemacht werden, denn wir werden später sehen, dass manche dispansive Systeme (Mikroskop z. B.) reelle Brennpunkte besitzen.

Unter den katoptrischen Abbildungen sind nach gleicher Definition die mit negativer Brennweite des Bildraumes als collective zu bezeichnen, da sich durch Reflexion der Sinn der Lichtfortpflanzung umkehrt (also nach unseren Festsetzungen von rechts nach links geht).

Es giebt daher folgende 4 Abbildungsarten:

Dioptrische	a) Collective:	$+f, +f'$.
	b) Dispansive:	$-f, -f'$.
Katoptrische	a) Collective:	$+f, -f'$.
	b) Dispansive:	$-f, +f'$.

6. Teleskopische Abbildung. Bisher ist angenommen, dass die Brennebenen im Endlichen liegen. Liegen sie in der Unendlichkeit, so liegt der Fall der teleskopischen Abbildung vor. In den Abbildungsgleichungen (4) verschwindet für diesen Fall der Coefficient a, so dass sich dieselben bei geeigneter Wahl des Coordinatenanfangs der x reduciren auf:

$$x' = \alpha x, \; y' = \beta y. \tag{13}$$

Da $x' = 0$ für $x = 0$ ist, so sieht man, dass irgend zwei conjugirte Punkte die Anfangspunkte der Zählung für x bezw. x' bilden. — Aus den Formeln (13) folgt, dass die Lateral- und Tiefenver-

grösserung constant ist, ebenso ist die Angularvergrösserung constant; denn haben wir irgend zwei conjugirte Strahlen OP und $O'P'$, so mögen ihre Schnitte mit der Axe der Abbildung zu Coordinatenanfangspunkten dienen. Hat dann ein Punkt P des ersten Strahles die Coordinaten x, y, der conjugirte Punkt P' des conjugirten Strahles die Coordinaten x', y', so gilt für die Neigungswinkel u, u':

$$tg\, u = y : x, \quad tg\, u' = y' : x'.$$

Daher folgt vermöge der Gleichungen (13)

$$tg\, u' : tg\, u = \beta : \alpha. \tag{14}$$

α muss positiv sein bei rückläufiger (katoptrischer) Abbildung, negativ bei rechtläufiger (dioptrischer). Bei letzterer sieht man also nach (14) in Berücksichtigung des positiven Sinnes von u und u' (cf. oben S. 21) bei positivem β aufrechte Bilder von unendlich entfernten Objecten, bei negativem β umgekehrte Bilder. Es giebt also je nach dem Vorzeichen von α und β vier verschiedenartige teleskopische Abbildungen.

Aus (14) und (13) erhält man

$$\frac{y'\, tg\, u'}{y\, tg\, u} = \frac{\beta^2}{\alpha}. \tag{15}$$

Ein Vergleich mit Formel (10) (S. 23) lehrt, dass bei der teleskopischen Abbildung beide Brennweiten (die beide unendlich gross sind) ein endliches Verhältniss besitzen. Es ist nämlich

$$\frac{f}{f'} = -\frac{\beta^2}{\alpha}. \tag{16}$$

Falls $f = f'$ ist, wie bei Fernrohren, und überhaupt bei jedem Instrument, bei dem der Brechungsindex des Objectraumes gleich dem des Bildraumes ist [vgl. dazu Kap. III, Formel (9)], so ist also $\alpha = -\beta^2$. Nach (14) ergiebt sich dann

$$tg\, u' : tg\, u = -1 : \beta.$$

Man bezeichnet dies Convergenzverhältniss (Angularvergrösserung) bei Fernrohren schlechthin als Vergrösserung Γ. Nach (13) ergiebt sich

$$y : y' = -\Gamma, \tag{14'}$$

d. h. beim Fernrohr ist die reciproke Lateralvergrösserung numerisch gleich der Angularvergrösserung.

7. Combination mehrerer Abbildungen. Eine Reihenfolge mehrerer Abbildungen muss einer einzigen Abbildung äquivalent

sein. Wir wollen uns hier wiederum auf centrirte Abbildungen beschränken. Nennt man (vgl. Figur 13) f, f' die Brennweiten der resultirenden Abbildung, f_1, f_1' die der ersten Abbildung, f_2, f_2' die der zweiten, so kann man leicht die Brennweiten und Brennpunktslagen der resultirenden Abbildung berechnen oder construiren, wenn man die Distanz $F_1'F_2 = \Delta$ kennt. Diese Distanz wollen wir kurz als Intervall der beiden Abbildungen 1 und 2 bezeichnen, und zwar sei dasselbe positiv, wenn F_1' links von F_2 liegt, sonst negativ.

Ein in der Höhe y einfallender axenparalleler Strahl S (Fig. 13) wird durch die Abbildung 1 in den Strahl S_1 abgebildet, welcher

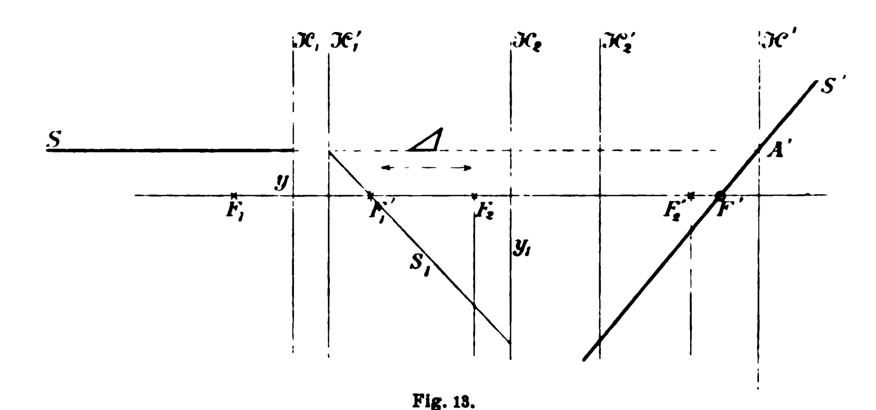


Fig. 13.

durch den Brennpunkt F_1' geht. Durch die Abbildung 2 wird S_1 in den Strahl S' abgebildet. Sein Schnittpunkt F' mit der Axe ist der Brennpunkt des Bildraumes der resultirenden Abbildung. Er bestimmt sich rechnerisch daraus, dass F_1' und F' conjugirte Punkte in Bezug auf die Abbildung 2 sind, d. h. es ist

$$F_2' F' = \frac{f_2 f_2'}{\Delta}, \tag{17}$$

wobei $F_2'F'$ positiv ist, falls F' rechts von F_2' liegt; constructiv erhält man F' aus der oben S. 25 angeführten Construction, indem die Durchschnittspunkte von S_1 und S' mit den Brennebenen $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_2'$ solche Entfernungen g und g' von der Axe besitzen, dass $g + g' = y_1$ ist.

Der Durchschnittspunkt A' von S' mit S muss in der Hauptebene $\mathfrak{H}'$ des Bildraumes der resultirenden Abbildung liegen. Dadurch ist also $\mathfrak{H}'$ und in Folge dessen auch die resultirende Brenn-

weite f' construirt, welches die Entfernung des resultirenden Brennpunktes F' von $\mathfrak{H}'$ ist. Aus der Construction und der Figur folgt, dass f' bei positivem $\varDelta$ negativ ist.

Rechnerisch folgt f' aus Berechnung des Neigungswinkels u' des Strahles S'. Für S_1 gilt:

$$tg u_1 = y : f_1',$$

und zwar ist u_1 mit entgegengesetztem Vorzeichen zu rechnen, falls S_1 als Objectstrahl für die Abbildung 2 aufgefasst wird. Nach (9) ist nun:

$$\frac{tg\, u'}{tg\, u_1} = \frac{\varDelta}{f_2'},$$

d. h. da $tg\, u_1 = -y : f_1'$ ist:

$$tg\, u' = -y \cdot \frac{\varDelta}{f_1' f_2'}.$$

Da nun aber (vgl. auch den Satz der S. 21) $y : f' = tg\, u'$ ist, so folgt

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\varDelta}. \tag{18}$$

Analog erhält man durch Betrachtung eines axenparallelen Strahles im Bildraum und seines conjugirten Strahles im Objectraum:

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\varDelta}, \tag{19}$$

und für die Entfernung des resultirenden Brennpunktes F von dem Brennpunkte F_1:

$$FF_1 = \frac{f_1 f_1'}{\varDelta}, \tag{20}$$

wobei FF_1 positiv ist, falls F links von F_1 liegt.

Die Gleichungen (17), (18), (19), (20) enthalten die Eigenschaften der resultirenden Abbildung, berechnet aus denen der zusammensetzenden Abbildungen.

Ganz ähnlich kann man verfahren, wenn mehr als zwei successive Abbildungen vorhanden sind.

Ist das Intervall $\varDelta$ zweier Systeme gleich Null, so werden die Brennweiten f und f' unendlich gross, man erhält also teleskopische Abbildung. Das Verhältniss der Brennweiten, welches endlich bleibt, folgt aus (18) und (19):

$$\frac{f}{f'} = \frac{f_1}{f_1'} \cdot \frac{f_2}{f_2'}. \tag{21}$$

Die Lateralvergrösserung $y' : y$ ergiebt sich aus Betrachtung eines einfallenden axenparallelen Strahles zu:

$$y' : y = \beta = -f_2 : f_1'. \tag{22}$$

Vermöge (21), (22) und (16) ist die Constante α, welche die Axenvergrösserung bedeutet [vgl. oben Formel (13)]

$$(23) \qquad \frac{x'}{x} = \alpha = -\frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}.$$

Folglich ist nach (14) die Angularvergrösserung:

$$(24) \qquad tg\,u' : tg\,u = \beta : \alpha = f_1 : f_2'.$$

Die Construction oder Berechnung einer resultirenden Abbildung, wenn unter den zusammensetzenden Abbildungen eine oder mehrere teleskopische auftreten, ist etwas zu modificiren gegenüber den bisherigen Betrachtungen. Das Resultat kann aber wiederum sofort erhalten werden, wenn man die successiven Abbildungen eines einfallenden axenparallelen Strahles construirt oder berechnet.

Kapitel III.

Physikalische Herstellung der optischen Abbildung.

Im vorigen Kapitel ist nach dem Vorgang von Abbe die geometrische Theorie der optischen Abbildung, welche das physikalische Zustandekommen derselben ganz unerörtert lässt, deshalb vorangestellt, weil wir die so erhaltenen, allgemeinen Gesetze in jedem speciellen Abbildungsfalle wieder finden müssen, einerlei, welche specielleren physikalischen Hilfsmittel zur Herstellung der Abbildung herangezogen werden. Der Begriff der Brennpunkte und Brennweiten z. B. ist also nur geknüpft an das Bestehen einer Abbildung, einerlei, ob dieselbe durch brechende Linsen oder reflectirende Spiegel oder durch andere Mittel realisirt wird.

In diesem Kapitel werden wir sehen, dass die optische Abbildung allerdings in dem idealen Sinne des vorigen Kapitels und ohne alle Beschränkungen physikalisch nicht hergestellt werden kann, es ist nämlich die Abbildung endlicher Räume durch beliebig weit geöffnete Strahlenbüschel nicht zu realisiren.

Wir haben zwar schon früher S. 15 gesehen, dass man durch Reflexion oder Brechung an einer aplanatischen Fläche die Abbildung eines Punktes durch weit geöffnete Büschel erzielen kann. Für andere Punkte ist dann aber keine Abbildung durch weit geöffnete Büschel vorhanden, da die Gestalt der aplanatischen Fläche vom Orte des Objectes abhängt. Deshalb bietet die genauere Behandlung specieller aplanatischer Flächen kein grosses physikalisches Interesse. Wir werden im Folgenden nur die Herstellung der Abbildung durch brechende oder reflectirende Kugelflächen behandeln, da diese wegen der leichteren technischen Herstellbarkeit bei den optischen Instrumenten allein verwandt werden, und andere

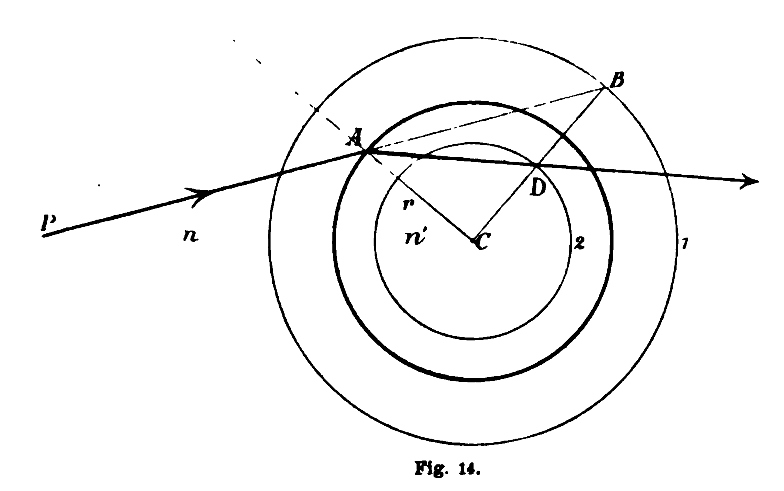


Fig. 14.

Gestalten der reflectirenden oder brechenden Flächen schon allein aus dem angeführten Grunde doch keine ideale optische Abbildung liefern können.

Wir werden sehen, dass man durch brechende oder reflectirende Kugelflächen optische Abbildung praktisch herstellen kann, wenn man gewisse Beschränkungen dabei zulässt, nämlich entweder in der Grösse der abgebildeten Räume, oder in der Weite der die Abbildung vermittelnden Strahlenbüschel.

1. Brechung an einer Kugelfläche. In einem Medium vom Brechungsindex n falle ein Strahl PA auf eine stärker brechende Kugel vom Brechungsindex n'. Der Radius der Kugel sei r, ihr Centrum C (vgl. Figur 14). Um den gebrochenen Strahl zu finden,

construire man (nach Weierstrass) um C zwei Kugeln 1 und 2 mit den Radien $r_1 = \frac{n'}{n} r$, und $r_2 = \frac{n}{n'} r$. Kugel 1 werde von PA in B getroffen; man ziehe BC, welches Kugel 2 in D schneide. Dann ist AD der gebrochene Strahl. Man kann dies leicht einsehen, da Dreieck ADC ähnlich dem Dreieck BAC ist. Denn es ist $AC : CD = BC : CA = n' : n$. Folglich ist $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ABC = \varphi'$ (Brechungswinkel), und da $\sphericalangle BAC = \varphi$ (Einfallswinkel) ist, so ist

$$\sin \varphi : \sin \varphi' = BC : AC = n' : n,$$

was nach dem Brechungsgesetz sein muss.

Wenn man so zu verschiedenen, von einem Punkte P ausgehenden Strahlen die gebrochenen construirt, so erkennt man schon aus der Zeichnung, dass dieselben sich nicht in einem einzigen Punkte P' schneiden; eine Abbildung durch weit geöffnete Strahlenbüschel findet also nicht statt. Aus der benutzten Construction geht aber unmittelbar hervor, dass alle Strahlen PA, welche nach dem Punkte B hinzielen, sämmtlich nach dem Punkte D hingebrochen werden. Umgekehrt haben alle Strahlen, welche von D ausgehen, ihren virtuellen Vereinigungspunkt in B. Es giebt also auf jeder durch das Centrum C einer Kugel vom Radius r gehenden Geraden zwei Punkte in den Entfernungen $r\frac{n'}{n}$ und $r\frac{n}{n'}$, welche durch alle Strahlen genau in einander abgebildet werden, allerdings nicht zu zwei reellen Bildern. Diese Punktepaare heissen die aplanatischen Punktepaare der Kugel.

Bezeichnen wir die Neigungswinkel zweier von den aplanatischen Punkten B und D ausgehenden Strahlen gegen die Axe BD mit u und u', d. h. setzen wir

$$\sphericalangle ABC = u, \sphericalangle ADC = u',$$

so ist, wie vorhin nachgewiesen wurde, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAC = u$. Aus Betrachtung des Dreiecks ADC folgt daher:

$$\sin u' : \sin u = AC : CD = n' : n. \tag{1}$$

Wir haben also hier ein von u unabhängiges Verhältniss der Sinus der Neigungswinkel conjugirter Strahlen, nicht wie nach Formel (9) der S. 22 ein constantes Verhältniss der Tangenten der Neigungswinkel. Der Unterschied beider Fälle ist darin begründet, dass früher eine Abbildung gewisser endlicher Raumtheile angenommen wurde, während hier nur eine Abbildung zweier Flächen durch

weit geöffnete Büschel stattfindet. Die sämmtlichen aplanatischen Punktepaare B, D bilden nämlich die beiden concentrischen Kugelflächen 1 und 2 der Figur 14. Allerdings ist diese Abbildung der beiden Flächen auch nicht eine collineare im früheren Sinne, denn die beiden Flächen sind nicht zwei Ebenen. Bezeichnet man die Grösse zweier conjugirter Flächenstücke in ihnen mit s und s', so ist, da ihr Verhältniss gleich dem der ganzen Kugelfläche 1 und 2 sein muss:

$$s' : s = n^4 : n'^4.$$

Daher kann man die Gleichung (1) auch schreiben:

$$\sin^2 u \cdot s \cdot n^2 = \sin^2 u' \cdot s' \cdot n'^2. \qquad (2)$$

Wir werden später sehen, dass diese Gleichung stets für die physikalische Abbildung zweier unendlich kleiner Flächenstücke s und s' gilt, einerlei, durch welche speciellen Anordnungen die Abbildung hergestellt ist.

Um eine räumliche optische Abbildung durch die Brechung an einer Kugelfläche zu erhalten, müssen wir die Oeffnung der die Abbildung vermittelnden Strahlenbüschel als sehr klein annehmen.

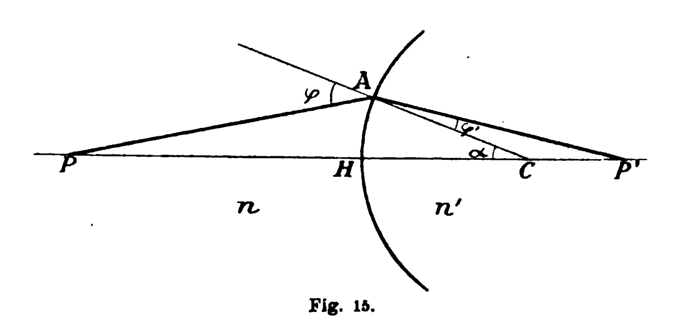


Fig. 15.

Sei (vgl. Figur 15) PA ein Strahl, welcher in AP' gebrochen wird, und sei PCP' die durch den Kugelmittelpunkt C gehende Centrale, so folgt aus Dreieck PAC:

$$\sin \varphi : \sin \alpha = PH + r : PA,$$

aus Dreieck $P'AC$:

$$\sin \varphi' : \sin \alpha = HP' - r : P'A.$$

Durch Division folgt

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \frac{n'}{n} = \frac{PH + r}{P'H - r} \cdot \frac{P'A}{PA}. \qquad (3)$$

Setzen wir nun voraus, dass A unendlich nahe an H liege, d. h. dass $\sphericalangle APH$ sehr klein sei, so ist $PA = PH$, $P'A = P'H$ zu setzen. Bezeichnen wir diese Entfernungen mit

$$PH = e,\quad P'H = e',$$

so folgt aus (3):

$$\frac{e+r}{e'-r}\cdot\frac{e'}{e} = \frac{n'}{n},$$

oder

$$\frac{n}{e} + \frac{n'}{e'} = \frac{n'-n}{r}. \tag{4}$$

Dabei ist r positiv gerechnet, wenn die Kugel gegen das einfallende Licht convex ist, d. h. C rechts von H liegt; e ist positiv, falls P links von H, e' ist positiv, falls P' rechts von H liegt. Zu jedem e gehört also ein ganz bestimmtes e', unabhängig von der Lage des Strahles PA, d. h. es findet eine Abbildung eines sich nahe an die Centrale PC anschliessenden Raumtheiles statt durch Strahlen, welche der Centrale nahe bleiben.

Eine Vergleichung der Formel (4) mit der früher auf S. 23 abgeleiteten Formel (11) lehrt, dass die Brennweiten der Abbildung sind:

$$f = r\frac{n}{n'-n},\quad f' = r\frac{n'}{n'-n}, \tag{5}$$

und dass die beiden Hauptebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ zusammenfallen in die im Scheitel H der Kugelfläche errichtete Tangentialebene. Die gleichen Vorzeichen von f und f' entsprechen dem oben auf S. 25 besprochenen Merkmale der dioptrischen oder rechtläufigen Abbildung. Ist $n' > n$, so giebt eine convexe Krümmung (positives r) eine collective Abbildung. Reelle Bilder ($e' > 0$) entstehen dabei, solange $e > f$ ist. Die Bilder sind dann zugleich umgekehrt.

Die Gleichung (10) der S. 23 wird:

$$\frac{y'\operatorname{tg} u'}{y\operatorname{tg} u} = -\frac{n}{n'}. \tag{6}$$

Nach früheren Festsetzungen sind die Neigungswinkel u, u' conjugirter Strahlen in verschiedenem Sinne gerechnet. Wenn sie in gleichem Sinne gerechnet werden, so wollen wir dies durch die Bezeichnung $'u$ an Stelle von u' ausdrücken. Es ist also $'u = -u'$ zu setzen. Man kann dann die letzte Gleichung schreiben:

$$ny\operatorname{tg} u = n'y'\operatorname{tg}{'u}. \tag{7}$$

Wir lernen durch diese Gleichung eine Grösse kennen, welche

durch die Brechung nicht geändert wird, **eine optische Invariante.** Dieselbe bleibt daher auch constant, wenn eine Brechung durch beliebig viele centrirte Kugelflächen stattfindet. Bezeichnen wir in diesem Falle mit n den Brechungsindex im ersten Medium, mit n' den im letzten, so gilt also auch Gleichung (7). Da nun aber allgemein nach der früheren Gleichung (10) der S. 23 für jede Abbildung gilt

$$\frac{y' \operatorname{tg}' u}{y \operatorname{tg} u} = \frac{f}{f'}, \tag{8}$$

so giebt die Vergleichung mit (7):

$$f : f' = n : n', \tag{9}$$

d. h. bei der Abbildung durch ein System centrirter, brechender Kugelflächen ist das Verhältniss der Brennweiten gleich dem Verhältniss der Brechungsindices des ersten und des letzten Mediums. Wenn also z. B. diese beiden Medien Luft sind, wie es bei den Linsen, den Spiegeln und den meisten optischen Instrumenten der Fall ist, so sind beide Brennweiten einander gleich.

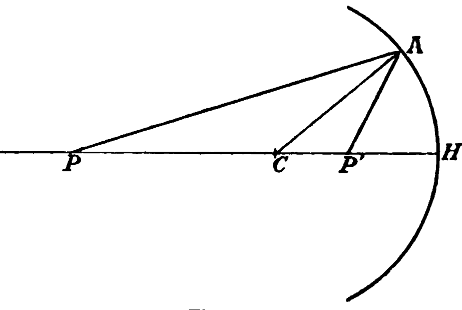


Fig. 16.

2. Reflexion an einer Kugelfläche. Der Radius r des Spiegels sei positiv für einen Convexspiegel, negativ für einen Hohlspiegel gerechnet. Nach dem Reflexionsgesetz muss (vgl. Figur 16) $\measuredangle PAC = \measuredangle P'AC$ sein. Es ist also nach einem Satze der Geometrie:

$$PA : P'A = PC : P'C. \tag{10}$$

Wenn der Strahl PA beliebig grosse Winkel mit der Axe PC bildet, so ist der Durchschnittspunkt P' der Axe mit dem conjugirten Strahl ein variabler. Es besteht dann auch keine Abbildung des Punktes P. Wenn aber der Winkel APC so klein bleibt, dass man anstatt seines Sinus den Winkel selbst setzen kann, so gehört zu jedem P ein bestimmtes conjugirtes P', d. h. dann besteht eine Abbildung. Man kann dann nämlich $PA = PH$, $P'A = P'H$ setzen, so dass (10) übergeht in

$$PH : P'H = PC : P'C, \tag{11}$$

oder wenn man $PH = e$, $P'H = -e'$ setzt, so folgt (in der Figur ist r negativ):

$$(12) \qquad -\frac{1}{e} + \frac{1}{e'} = \frac{2}{r}.$$

Ein Vergleich mit der früheren Formel (11) auf S. 23 lehrt, dass die Brennweiten der Abbildung sind:

$$(13) \qquad f = -\frac{1}{2}r, \; f' = +\frac{1}{2}r,$$

und dass die beiden Hauptebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ zusammenfallen in die im Scheitel H des Kugelspiegels errichtete Tangentialebene; die beiden Brennpunkte fallen zusammen (in die Mitte zwischen C und

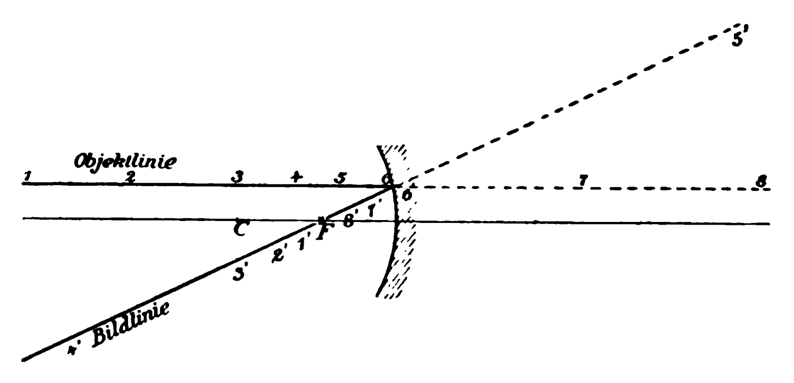


Fig. 17.

H), und die Knotenpunkte fallen auch zusammen, und zwar in das Centrum C des Kugelspiegels. — Die Grössen e und e' sind in demselben Sinne positiv gerechnet wie früher auf S. 23.

Das verschiedene Vorzeichen der Brennweiten f und f' entspricht dem oben auf S. 25 besprochenen Merkmale der katoptrischen oder rückläufigen Abbildung. Nach den Festsetzungen der S. 26 entspricht ein negatives r, d. h. ein Hohlspiegel, einer collectiven Abbildung, dagegen ein Convexspiegel einer dispansiven Abbildung.

Wie ein Vergleich der Formeln (13) und (5) dieses Kapitels lehrt, kann man die hier gewonnenen Resultate bei der Reflexion an einer Kugelfläche ableiten aus den früheren Resultaten für eine Brechung an derselben, falls man $n' : n = -1$ setzt. In der That geht ja auch für $n' : n = -1$ das Brechungsgesetz in das Reflexionsgesetz über. Von dieser Bemerkung kann man Gebrauch machen,

falls es sich um die Combination der Abbildungen an mehreren brechenden oder spiegelnden Kugelflächen handelt. Der Satz (9) bleibt für alle diese Fälle bestehen und zeigt, dass durch Zusammensetzung der Reflexionen an einer geraden Anzahl von Kugelflächen und beliebigen Brechungen allemal ein positives Verhältniss $f:f'$, d. h. eine dioptrische oder rechtläufige Abbildung entsteht (vgl. oben S. 25).

Den Zusammenhang zwischen Bild und Object kann man deutlich aus der Figur 17 entnehmen. Dieselbe bezieht sich auf einen Concav-(Hohl-)Spiegel. Die Zahlen *1, 2, 3, ... 8* bedeuten Objectpunkte in constanter Höhe über der Axe der Abbildung. Die Zahlen *7* und *8*, welche hinter dem Spiegel liegen, entsprechen virtuellen Objecten, d. h. die einfallenden Lichtstrahlen zielen nach diesen

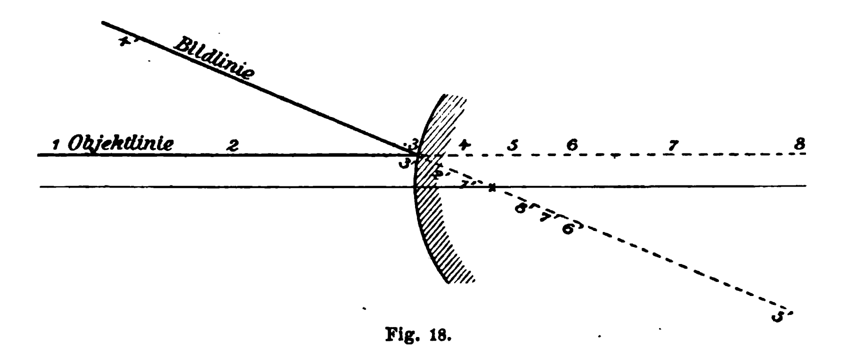


Fig. 18.

Punkten hin, kommen aber in ihnen nicht zum Schnitt, sondern treffen vorher auf den Spiegel und werden reflectirt. Das Gebiet der reellen Objecte ist in der Figur 17 durch eine ausgezogene, das der virtuellen Objecte durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet. Die Punkte *1', 2', 3' ... 8'* sind die Bilder der Punkte *1, 2, 3 ... 8*. Da letztere in einer axenparallelen Geraden liegen, so müssen erstere in einer Geraden liegen, welche durch den Brennpunkt *F* geht und durch den Punkt *6*, den Schnitt des Objectstrahles mit dem Spiegel, d. h. der Hauptebene. Die ausgezogene Bildlinie bedeutet reelle Bilder, die gestrichelte virtuelle. Irgend ein Bildpunkt, z. B. *2'*, kann dadurch construirt werden (nach S. 24), dass man durch das Object *2* und den Brennpunkt *F* eine Gerade zieht, welche den Spiegel, d. h. die Hauptebene, in einem Punkte A_2 schneiden möge. Zieht man dann durch A_2 eine Parallele

zur Axe, so schneidet diese die vorhin construirte schiefe Bildlinie im gesuchten Bildpunkt $2'$.

Aus der Figur ersieht man deutlich, dass ferne Objecte sich reell und umgekehrt abbilden, dass von Objecten, die innerhalb der Brennweite vor dem Spiegel liegen, virtuelle aufrechte Bilder entstehen, und dass zu virtuellen Objecten hinter dem Spiegel reelle, aufrechte Bilder vor dem Spiegel gehören.

Für einen Convexspiegel giebt ebenso Figur 18 die Lage von Object und Bild an. Man ersieht daraus, dass zu allen reellen Objecten virtuelle, aufrechte, verkleinerte Bilder gehören, dass bei virtuellen Objecten, die innerhalb der Brennweite hinter dem Spiegel liegen, reelle, aufrechte, vergrösserte Bilder entstehen; zu ferneren virtuellen Objecten gehören wieder virtuelle Bilder.

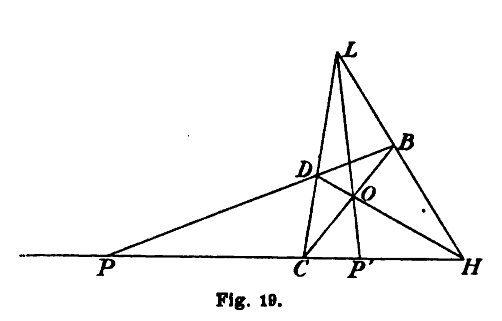


Fig. 19.

Die Gleichung (11) besagt, dass $PCP'H$ vier harmonische Punkte sind. Man kann also zu einem Objecte P sein Bild in folgender Weise nach einem Lehrsatze der synthetischen Geometrie construiren (vgl. Figur 19): Man ziehe von einem beliebigen Punkte L aus zwei Strahlen LC und LH, ferner ziehe man den beliebigen Strahl PDB. Der Schnittpunkt von DH mit BC sei O, dann schneidet LO die Gerade PH in dem zu P conjugirten Punkte P'. — Bei einem Convexspiegel ist die Construction ganz dieselbe, es vertauschen die beiden Punkte C und H nur ihre physikalischen Bedeutungen.

3. Linsen. Die Eigenschaften der Abbildung durch zwei centrirte Kugelflächen (Linsen) können wir direct aus dem § 7 des Kapitels II ableiten. Die Krümmungsradien r_1 und r_2 rechnen wir in dem früher (§ 1) festgesetzten Sinne positiv. Wir rechnen nämlich den Radius einer Kugelfläche als positiv, wenn sie convex nach links, d. h. gegen die einfallenden Strahlen convex ist. Wir wollen den Fall betrachten, dass die Linse den Brechungsindex n besitzt und in Luft liegt. Die Dicke der Linse, d. h. der Abstand ihrer Scheitelpunkte S_1 und S_2 (vgl. Figur 20), sei d. Wenn dann die Brennweiten für die Abbildung durch Brechung an der ersten

Grenzfläche der Linse mit f_1 und f_1', für die Abbildung an der zweiten Grenzfläche mit f_2 und f_2' bezeichnet werden, so ist das Intervall Δ beider Abbildungen (cf. oben S. 28) gegeben durch:

$$\Delta = d - f_1' - f_2 , \tag{14}$$

und nach (5) ist

$$f_1 = r_1 \frac{1}{n-1}, \quad f_1' = r_1 \frac{n}{n-1}, \quad f_2 = r_2 \frac{n}{1-n}, \quad f_2' = r_2 \frac{1}{1-n}. \tag{15}$$

Nach den Formeln (19) und (18) des Kapitels II (S. 29) werden also die resultirenden Brennweiten:

$$f = f' = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{r_1 r_2}{d(n-1) - nr_1 + nr_2}, \tag{16}$$

während die Lage der beiden resultirenden Brennpunkte F und F' aus den Formeln (17) und (20) des Kapitels II (S. 28, 29) berechnet

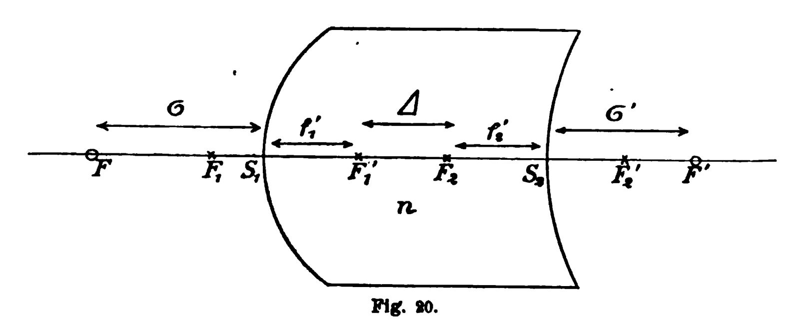


Fig. 20.

wird. Nach diesen Formeln wird die Entfernung σ des Brennpunktes F vor dem Linsenscheitel S_1 und die Entfernung σ' des Brennpunktes F' hinter dem Linsenscheitel S_2, da $\sigma = FF_1 + f_1$, $\sigma' = F_2'F' + f_2'$ ist:

$$\sigma = \frac{r_1}{n-1} \cdot \frac{d(n-1) + nr_2}{d(n-1) - nr_1 + nr_2}, \tag{17}$$

$$\sigma' = \frac{r_2}{n-1} \cdot \frac{-d(n-1) + nr_1}{d(n-1) - nr_1 + nr_2}. \tag{18}$$

Nennt man h die Entfernung der ersten Hauptebene $\mathfrak{H}$ von dem Linsenscheitel S_1, und h' die Entfernung der zweiten Hauptebene $\mathfrak{H}'$ hinter dem Linsenscheitel S_2, so ist $f + h = \sigma$ und $f' + h' = \sigma'$, d. h. es folgt nach (16), (17) und (18):

$$h = \frac{r_1 d}{d(n-1) - nr_1 + nr_2}, \tag{19}$$

$$h' = \frac{-r_2 d}{d(n-1) - nr_1 + nr_2}, \tag{20}$$

für die Distanz p der Hauptebene $\mathfrak{H}$ vor der Hauptebene $\mathfrak{H}'$ folgt, da $p = d + h + h'$:

$$(21)\qquad p = d\,(n-1)\,\frac{d - r_1 + r_2}{d\,(n-1) - nr_1 + nr_2}.$$

Die Knotenpunkte fallen in die Hauptpunkte, da $f = f'$ ist (vgl. oben S. 23).

Aus diesen Formeln geht hervor, dass die Krümmungen r_1 und r_2 allein noch nicht den Charakter der Abbildung bestimmen, sondern dass derselbe auch wesentlich von der Dicke d der Linse bestimmt ist. So wirkt z. B. eine biconvexe Linse (r_1 positiv, r_2 negativ) bei nicht zu grosser Dicke d collectiv, d. h. sie besitzt eine positive Brennweite, dagegen dispansiv, falls d sehr gross ist (biconvexe Stablinse).

4. Dünne Linsen. In der Praxis tritt oft der Fall ein, dass die Dicke d der Linse so klein ist, dass man $d\,(n-1)$ vernachlässigen kann gegen $n\,(r_1 - r_2)$. Von dem Falle $r_1 = r_2$, welcher bei einer convex-concaven Linse mit zwei gleichen Krümmungen eintritt, wollen wir hierbei absehen. Dann werden nach (16) die Brennweiten der Linse:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} f = f' &= \frac{-r_1 r_2}{(n-1)(r_1 - r_2)}, \text{ oder} \\ \frac{1}{f} &= (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \end{aligned}\right.$$

während nach (19), (20) und (21) die Hauptebenen nahe zusammenfallen mit den nahe zusammenfallenden Tangentialebenen in den Scheiteln S_1 und S_2 der Linse.

Genauer berechnet sich nach diesen Formeln, wenn man $d\,(n-1)$ gegen $n\,(r_1 - r_2)$ vernachlässigt:

$$(23)\qquad h = -\frac{d}{n}\cdot\frac{r_1}{r_1 - r_2},\quad h' = +\frac{d}{n}\cdot\frac{r_2}{r_1 - r_2},\quad p = d\,\frac{n-1}{n}.$$

Der Abstand p beider Hauptebenen von einander ist also von den Linsenkrümmungen unabhängig. Für $n = 1{,}5$ beträgt $p = \frac{1}{3}\,d$. Für biconvexe sowohl als biconcave Linsen liegen die Hauptebenen im Inneren der Linse (da h und h' negativ sind). Bei gleichen Krümmungen ($r_1 = -r_2$) ist für $n = 1{,}5 : h = h' = -\frac{1}{3}\,d$, d. h. die Hauptebenen liegen um je $\frac{1}{3}$ der Linsendicke von der Oberfläche entfernt. — Bei gleichem Vorzeichen von r_1 und r_2 (concav-convexe Linsen) können die Hauptebenen ausserhalb der Linse liegen.

Zu den Linsen mit positiver Brennweite (Sammellinsen) gehört die

Biconvex-Linse ($r_1 > 0$, $r_2 < 0$)
Planconvex-Linse ($r_1 > 0$, $r_2 = \infty$)
Concav-convex-Linse ($r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_2 > r_1$),

kurz alle Linsen, welche in der Mitte dicker sind als am Rande.

Zu den Linsen mit negativer Brennweite (Zerstreuungslinsen) gehört die

Biconcav-Linse ($r_1 < 0$, $r_2 > 0$)
Planconcav-Linse ($r_1 = \infty$, $r_2 > 0$)
Convex-concav-Linse ($r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_2 < r_1$),

d. h. alle Linsen, welche in der Mitte dünner sind als am Rande.[1])

Der Zusammenhang zwischen Bild und Object ergiebt sich

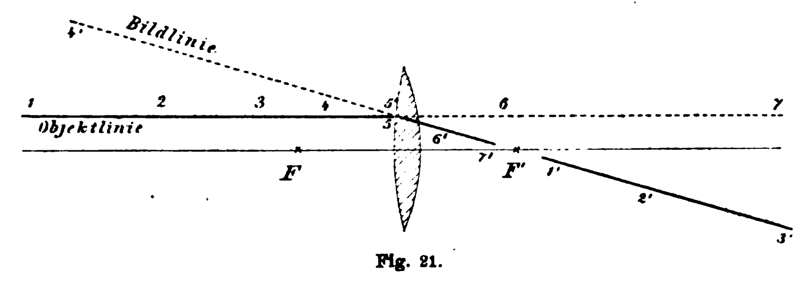


Fig. 21.

übersichtlich aus den Figuren 21 und 22, die in demselben Sinne zu verstehen sind wie die früheren Figuren 17 und 18. Aus ihnen ergiebt sich, dass bei der Sammellinse reellen Objecten je nach

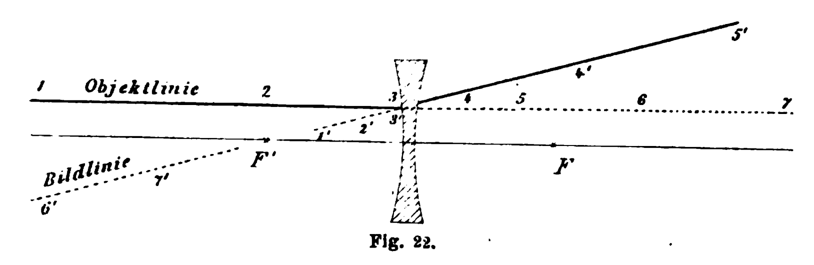


Fig. 22.

ihrer Distanz reelle oder virtuelle Bilder entsprechen, während bei der Zerstreuungslinse zu reellen Objecten nur virtuelle Bilder gehören. Reelle, aufrechte, vergrösserte Bilder entstehen durch eine

1) Die Bezeichnung: kollektive (dioptrische) Abbildung für solche mit positiven Brennweiten, dispansive für solche mit negativen Brennweiten ist

Zerstreuungslinse von virtuellen Objecten, die innerhalb der Brennweite hinter der Linse liegen.

Wenn zwei dünne Linsen der Brennweite f_1 und f_2 centrirt aufeinander gelegt werden, so ist das optische Intervall $\varDelta$ (vgl. oben S. 39) $\varDelta = -(f_1 + f_2)$. Nach Formel (19) des Kapitels II (S. 29) ist daher die resultirende Brennweite:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = f',$$

(24) oder

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Man pflegt die reciproke Brennweite einer Linse ihre Stärke zu nennen. Es besteht also der Satz: Die Stärke einer Combination mehrerer aufeinandergelegter dünner Linsen ist gleich der Summe der Stärken der einzelnen Linsen.

5. Experimentelle Bestimmung der Brennweite. Bei dünnen Linsen, bei denen man die beiden Hauptebenen als praktisch zusammenfallend ansehen kann, genügt die Bestimmung der Orte eines Objectes und seines Bildes, um die Brennweite daraus herzuleiten, z. B. nach Formel (11) des II. Kapitels, S. 23, die sich hier, da $f = f'$ ist, vereinfacht zu

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{e'} = \frac{1}{f}. \tag{25}$$

Da die Orte reeller Bilder durch Auffangen auf einen Schirm besonders bequem zu bestimmen sind, so combinirt man Concav-Linsen, die bei reellen Objecten nur virtuelle Bilder liefern, mit einer Convex-Linse gemessener Stärke, so dass die Combination reelle Bilder liefert. Nach (24) ist dann leicht die Brennweite der Concav-Linse zu erhalten, wenn man die resultirende Brennweite f der Combination experimentell ermittelt.

Dieses Verfahren ist nicht mehr statthaft bei dicken Linsen und überhaupt beliebigen optischen Systemen. Die Lage der Brennpunkte ist leicht zu ermitteln, falls man Parallelbüschel

---

dieser Eigenschaft der Linsen entnommen: eine Linse mit positiver Brennweite macht ein auffallendes Lichtbündel convergenter, eine Linse mit negativer Brennweite macht es divergenter. Bei Abbildungen, die durch ein System von Linsen entstehen, und bei denen die Hauptebenen nicht zusammenfallen mit z. B. der ersten brechenden Fläche, ist der Unterschied zwischen collectiven und dispansiven Systemen nicht so direct zu construiren. Man muss dann nach S. 26 definiren.

einfallen lässt. Bestimmt man nun den Ort eines Objectes und seines Bildes in Bezug auf die Brennpunkte, so ergeben sich nach den Formeln (7) auf S. 20 und (9) auf S. 22 sofort die Brennweiten. — Auf die im II. Kapitel S. 21 gegebene Definition der Brennweite [vgl. die dortige Formel (8)]

$$f = y' : tg\, u \tag{26}$$

kann man leicht ein strenges Verfahren zur Ermittelung der Brennweite gründen, indem man die angulare Grösse $tg\, u$ eines unendlich entfernten Objectes misst und die lineare Grösse seines Bildes y'. Dies ist besonders bequem auszuführen bei Objectiven von Fernrohren, die über einem Theilkreise drehbar sind, da man dann an ihm sofort den Sehwinkel $tg\, u$ ablesen kann.

Ist das Object der Grösse y nicht unendlich entfernt, sondern hat den Abstand e von der Hauptebene $\mathfrak{H}$, während sein Bild der Grösse y' den Abstand e' von der Hauptebene $\mathfrak{H}'$ hat, so ist

$$y' : y = -e' : e, \tag{27}$$

da, falls $f = f'$ ist, die Knotenpunkte in die Hauptpunkte fallen, d. h. Object und Bild von den Hauptpunkten aus unter gleichen Winkeln erscheinen.

Eliminirt man e' oder e aus (25) und (27), so folgt

$$f = \frac{e}{1 - \frac{y}{y'}} = \frac{e'}{1 - \frac{y'}{y}}. \tag{28}$$

Entweder wählt man nun e sehr gross, oder e'. In beiden Fällen kann man dann ohne merklichen Fehler e bezw. e' gleich der Entfernung vom optischen System (z. B. Linse) setzen, falls wenigstens nicht die Hauptebenen desselben sehr weit von ihm entfernt liegen. Man kann also dann eine der beiden Formeln (28) zur Bestimmung der Brennweite f benutzen, wenn man e bezw. e' und die Vergrösserung $y' : y$ misst.

Man umgeht die Bestimmung des Object- oder Bildortes, wenn man die Vergrösserung für zwei Objectlagen bestimmt, welche eine gemessene Distanz l von einander besitzen. Denn nach (7) S. 20 ist

$$\left(\frac{y}{y'}\right)_1 = \frac{x}{f}, \quad \left(\frac{y}{y'}\right)_2 = \frac{x+l}{f},$$

daher

$$f = \frac{l}{\left(\frac{y}{y'}\right)_2 - \left(\frac{y}{y'}\right)_1}. \tag{29}$$

Dabei bedeutet $(y:y')_1$ die reciproke Vergrösserung bei der Lage x des Objectes, $(y:y')_2$ die reciproke Vergrösserung bei der Lage $x+l$ des Objectes. l ist positiv, falls in der zweiten Lage das Object im Sinne des einfallenden Lichtes um die Strecke l verschoben ist (d. h. von links nach rechts).

Auf dieser Methode beruht das Focometer von Abbe, mit Hülfe dessen man namentlich die Brennweiten von Mikroskop-Objectiven bestimmen kann. Zur Messung der Bildgrössen y' dient ein Hülfsmikroskop. Mit einem solchen (bezw. einer einfachen Lupe) können natürlich ebensowohl von reellen, wie von virtuellen Bildern ihre Grössen gemessen werden, so dass diese Methoden z. B. auch für dispansive Linsen, d. h. überhaupt allgemein anwendbar sind.[1])

6. Astigmatische Abbildung. In unseren früheren Betrachtungen haben wir gesehen, dass durch centrirte Kugelflächen eine Abbildung vermittelt wird durch Elementar- (d. h. unendlich enge) Büschel, deren Strahlen nur eine geringe Neigung zur Axe haben und die von Punkten der Axe oder ihrer unmittelbaren Nachbarschaft ausgehen. In diesem Falle schneiden sich die sämmtlichen Strahlen des Büschels im Bildraum in einem Punkte (dem Bilde), oder, wie man kurz sagt, die Strahlenbüschel sind auch im Bildraume homocentrisch. Wir wollen nun einmal prüfen, was eintritt, wenn man eine der gemachten Beschränkungen fallen lässt, d. h. wenn ein beliebig schiefes Elementarbüschel von einem Punkte P ausgeht.

Im Allgemeinen ist dann das Bildbüschel nicht mehr homocentrisch. Die Constitution eines Elementarbüschels, welches von einem Lichtpunkte P ausgegangen ist und Reflexionen und Brechungen an irgend welchen, beliebig gestalteten Flächen erfahren hat, charakterisirt sich durch den oben auf S. 13 besprochenen Satz von Malus als ein orthotomisches Strahlenbündel, d. h. dasselbe lässt sich als die Normalen N auf einem gewissen Flächenstück Σ auffassen. Dieselben schneiden sich nun im Allgemeinen nicht in einem Punkte. Wie aber die Geometrie lehrt, giebt es auf jeder Fläche Σ zwei sich rechtwinklig schneidende Curvenschaaren (die sogenannten Krümmungslinien), deren Normalen, die zugleich senkrecht auf der Fläche Σ stehen, sich schneiden.

1) Näheres über das Focometer und über die Brennweitenbestimmung überhaupt findet man in Winkelmann, Handbuch der Physik. Optik, S. 285—296 (Autor Czapski).

Wenn man also ein **ebenes** Elementarbüschel ins Auge fasst, und zwar ein solches, dessen Bildstrahlen die Normalen eines Stückes l_1 einer Krümmungslinie sind, so wird durch dasselbe eine optische Abbildung vermittelt. Der Ort des Bildes ist der Krümmungsmittelpunkt jenes Stückes l_1 der Krümmungslinie, da sich dort die Normalen schneiden. Da jedes Stück l_1 einer Krümmungslinie senkrecht von einem Stück l_2 einer anderen Krümmungslinie geschnitten wird, so giebt es stets auch noch ein zweites ebenes Elementarbüschel, welches ebenfalls eine optische Abbildung vermittelt, aber der Bildort ist für dasselbe Object ein anderer, da die Krümmung von l_2 im Allgemeinen verschieden ist von der von l_1.

Wie wird nun im Allgemeinen die Abbildung beschaffen sein, welche ein beliebiges **räumliches** Elementarbüschel von einem Object P entwirft? Es seien (vgl. Figur 23) *1, 2, 3, 4* die vier

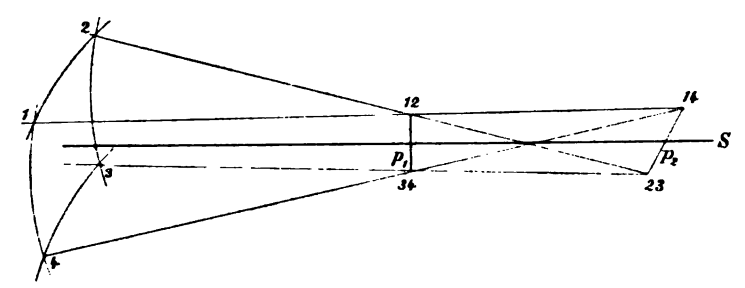


Fig. 23.

Schnittpunkte von vier benachbarten Krümmungslinien, welche ein Flächenelement $d\Sigma$ auf Σ abgrenzen. Die Krümmungslinienstücke *1—2* und *3—4* seien horizontal, die Stücke *2—3* und *1—4* vertical. Die Normalen in *1* und *2* schneiden sich im Punkte *12*, die Normalen in *3* und *4* im Punkte *34*. Da die Krümmung der Linie *1—2* sich nur unendlich wenig unterscheidet von der Krümmung der Linie *3—4*, so liegen auch die Schnittpunkte *12* und *34* nahezu in gleichem Abstand von der Fläche Σ. Die Verbindungslinie p_1 der Punkte *12* und *34* steht daher auch nahezu senkrecht zu dem Strahl S, welcher in der Mitte von $d\Sigma$ senkrecht zu $d\Sigma$ errichtet ist, und welcher der **Hauptstrahl** des räumlichen Elementarbüschels genannt wird, das aus der Gesammtheit der Normalen auf $d\Sigma$ besteht. Die Linie p_1 muss ferner offenbar wegen der Symmetrie der Figur parallel den Krümmungslinien *2—3* oder *1—4* verlaufen, d. h. vertical sein. Die Normalen irgend einer horizontalen

Krümmungslinie werden sich auf einem Punkte der Linie p_1 schneiden.

Ebenso werden die Normalen irgend einer verticalen Krümmungslinie sich in einem Punkte der Linie p_2, der Verbindungslinie der Punkte *14* und *23*, schneiden. p_2 muss auch nahezu senkrecht zu S stehen und horizontal liegen. Diese beiden Linien p_1 und p_2, welche senkrecht auf einander und senkrecht zum Hauptstrahl stehen, werden die beiden Brennlinien des Elementarbüschels, die durch den Hauptstrahl S und die beiden Brennlinien p_1, p_2 gelegten beiden Ebenen die Focalebenen des Büschels genannt. Man kann also sagen, dass im Allgemeinen sich ein Objectpunkt P durch ein beliebiges Elementarbüschel in zwei Brennlinien abbildet, die senkrecht auf einander und zum Hauptstrahl stehen und einen gewissen Abstand von einander besitzen. Dieser Abstand wird die astigmatische Differenz genannt. Erst in specielleren Fällen, nämlich wenn die Krümmung beider Schaaren von Krümmungslinien die gleiche ist, hat man es mit homocentrischer Strahlenvereinigung, d. h. mit der eigentlichen Abbildung im früheren Sinne, zu thun. Zur Unterscheidung wird die hier betrachtete allgemeinere Abbildung die astigmatische[1]) genannt.

Ein erkennbares, scharfes Bild entsteht bei einer Reihenfolge von Objectpunkten P bei astigmatischer Abbildung nicht. Nur wenn das Object aus einer geraden Linie besteht, kann ein ebenfalls aus einer Geraden bestehendes scharfes Bild entstehen, nämlich wenn die Objectlinie so orientirt ist, dass die Brennlinien, in die sich jeder Punkt P der Objectlinie abbildet, zur Deckung kommen. Da von jedem Punkte P zwei verschiedene, sich rechtwinklig kreuzende Brennlinien p_1, p_2 entstehen, so giebt es also zwei, ebenfalls um 90^0 verschiedene Orientirungen der Objectlinie, bei denen eine Abbildung wahrzunehmen ist. Die Bilder liegen an verschiedenen Stellen des Raumes.

Ebenso giebt es für ein System paralleler Geraden als Object zwei Orientirungen, bei denen eine Abbildung als parallele Gerade zu Stande kommt.

Ist das Object ein rechtwinkliges Kreuz (oder ein rechtwinkliges Kreuzgitter), so giebt es eine bestimmte Orientirung, bei der eine Abbildung der einen Linie des Kreuzes (oder des

---

1) Stigma wird dabei als Bezeichnung des Brennpunktes gebraucht, und astigmatisch ist also ein Strahlenbündel, welches keinen eigentlichen Brennpunkt hat.

einen Systems der Linien des Kreuzgitters) zu Stande kommt in einer gewissen Ebene $\mathfrak{P}_1$ des Bildraumes; in einer anderen Ebene $\mathfrak{P}_2$ des Bildraumes entsteht dann ein Bild der anderen Linie des Kreuzes (oder des anderen Systems der Linien des Kreuzgitters). Diese Erscheinung ist ein gutes Erkennungszeichen von vorhandenem Astigmatismus.

Astigmatische Abbildung muss im Allgemeinen eintreten, wenn die brechende oder spiegelnde Fläche zwei verschiedene Krümmungen besitzt. So bieten z. B. Cylinder-Linsen deutlich die Erscheinung des Astigmatismus. Aber auch ein auf eine Kugelfläche schief auftreffendes, homocentrisches Elementarbüschel muss nach der Brechung oder Reflexion zu einem astigmatischen werden.

Wir wollen diesen Fall einer näheren Berechnung unterziehen. In der Ebene der Zeichnung (Figur 24) möge der Objectpunkt P, das Kugelcentrum C und der Punkt A der Kugelfläche liegen, in welchem sie vom Hauptstrahl (d. h. dem mittleren Strahl) des von P ausgehenden Elementarbüschels getroffen wird. Die Strecke PA

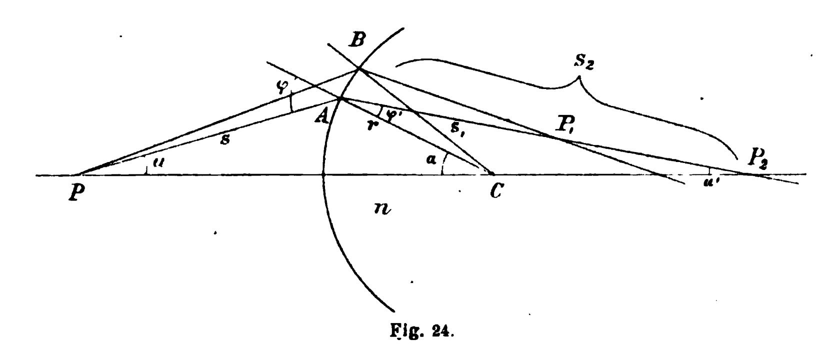


Fig. 24.

möge mit s, die Strecke AP_2 mit s_2 bezeichnet werden. Da nun ist:

$$\text{Dreieck } PAP_2 = \text{Dreieck } PAC + \text{Dreieck } CAP_2,$$

so folgt:

$$s s_2 \sin(\varphi - \varphi') = s r \sin \varphi + s_2 r \sin \varphi',$$

falls φ und φ' Einfalls- bezw. Brechungswinkel bedeuten, während r der Kugelradius ist. Da nun nach dem Brechungsgesetz $\sin \varphi = n \cdot \sin \varphi'$, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$s s_2 (n \cos \varphi' - \cos \varphi) = s r n + s_2 r, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s_2} = \frac{n \cos \varphi' - \cos \varphi}{r}. \tag{30}$$

In demselben Punkte P_2 müssen offenbar alle diejenigen von P ausgehenden Strahlen nach der Brechung die Axe treffen, welche gleichen Neigungswinkel u mit derselben besitzen. Diese Strahlen werden ein Sagittalbüschel genannt. Dasselbe hat also den Bildpunkt P_2.

Dagegen wird ein elementares Meridionalbüschel, dessen Strahlen sämmtlich in der Ebene PAC liegen, einen anderen Bildpunkt P_1 besitzen. Sei PB ein dem Strahl PA benachbarter Strahl, welcher den Neigungswinkel $u + du$ gegen die Axe besitze und der in die Richtung BP_1 gebrochen werde. Dann ist $\measuredangle BP_1A$ als Increment du' von u' zu bezeichnen, und $\measuredangle BCA$ als Increment da. Es ergiebt sich nun sofort:

$$s \cdot du = AB \cos \varphi, \quad s_1 \cdot du' = AB \cdot \cos \varphi', \quad r \cdot da = AB. \tag{31}$$

Da nun ferner ist

$$\varphi = a + u, \quad \varphi' = a - u',$$

so folgt mit Rücksicht auf (31):

$$\begin{aligned} d\varphi &= da + du = AB\left(\frac{1}{r} + \frac{\cos\varphi}{s}\right), \\ d\varphi' &= da - du' = AB\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos\varphi'}{s_1}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Aus dem Brechungsgesetz $\sin \varphi = n \sin \varphi'$ folgt aber durch Differentiation:

$$\cos \varphi \cdot d\varphi = n \cos \varphi' \cdot d\varphi'.$$

Setzen wir hierin für $d\varphi$ und $d\varphi'$ die aus (32) folgenden Werthe, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{\cos^2\varphi}{s} + \frac{n\cos^2\varphi'}{s_1} = \frac{n\cos\varphi' - \cos\varphi}{r}. \tag{33}$$

Aus (33) und (30) ergeben sich verschiedene Werthe s_1 und s_2, die zu gleichem s gehören, d. h. P wird astigmatisch abgebildet. Die astigmatische Differenz wird um so bedeutender, je schiefer das Büschel einfällt, d. h. je grösser φ ist. — Die astigmatische Differenz verschwindet nur, d. h. es ist $s_1 = s_2 = s'$, falls $s = -ns'$ ist, wie aus (30) und (33) hervorgeht. Diese Bedingung führt auf die beiden, oben S. 32 erwähnten aplanatischen Punkte der Kugel.

Der Fall einer reflectirenden Kugelfläche leitet sich nach der oben S. 36 gemachten Bemerkung aus den Formeln (30) und (33) dadurch ab, dass man $n = -1$, d. h. $\varphi' = -\varphi$ setzt. Es ergiebt sich demnach für einen Kugelspiegel[1]):

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s_2} = -2\frac{\cos\varphi}{r}, \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{s_1} = -\frac{2}{r\cos\varphi}. \tag{34}$$

1) Für einen Convexspiegel ist r positiv, für einen Concavspiegel r negativ.

Durch Subtraction dieser beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} = \frac{2}{r}\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi\right),$$

oder

$$\frac{s_2 - s_1}{s_1 s_2} = \frac{2}{r} \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi. \tag{35}$$

Man erkennt hieran deutlich, in welchem Maasse der Astigmatismus mit dem Einfallswinkel wächst, und zwar ist dies in so hohem Maasse der Fall, dass man mit geeigneten Mitteln an einem Flüssigkeitsniveau, etwa einem Quecksilberspiegel, den durch die Krümmung der Erde verursachten Astigmatismus der an ihm reflectirten Büschel noch bemerken könnte. Betrachtet man nämlich das Spiegelbild eines sehr weit befindlichen Kreuzgitters mittelst eines Fernrohrs von 7,5 m Brennweite (Oeffnung etwa $^1/_2$ m), so ist die astigmatische Differenz gleich 0,1 mm, d. h. es sind die Orte, wo das eine oder das andere System von Gitterstäben deutlich ist, um $^1/_{10}$ mm von einander getrennt. Wendete man aber gar das Riesenfernrohr des Lick-Observatoriums in Kalifornien zur Beobachtung an, so würde jene Differenz bis auf 0,7 mm steigen. — Die Erscheinung des Astigmatismus lässt sich also gut dazu verwenden, um Spiegel auf ihre Ebenheit zu prüfen. Anstatt der Differenz der Bildorte eines Kreuzgitters, das man möglichst streifend im Spiegel reflectiren lässt, kann man auch die verschiedene Schärfe der Bilder der Kreuzgitterlinien als Kriterium verwenden. Man verwendet zu dem Zwecke passend gestrichelte Linien im Kreuzgitter.

7. Die Erweiterung der Abbildungsgrenzen. Im Vorangegangenen haben wir gesehen, dass durch Brechung oder Reflexion an centrirten Kugelflächen nur die Abbildung eines nahe der Axe anliegenden fadenförmigen Raumes durch räumliche Elementarbüschel von geringer Neigung gegen die Axe erzeugt werden kann. Sind die Elementarbüschel stärker geneigt gegen die Axe, so muss man, wie im letzten Paragraphen gezeigt wurde, sich sogar auf ebene Büschel beschränken, falls man noch Abbildung erhalten will.

Diese bisher betrachtete physikalische Herstellung der Abbildung wäre nun praktisch sehr unbrauchbar. Denn nicht nur würden die Bilder sehr lichtschwach sein, wenn sie durch Elementarbüschel erzeugt werden, sondern aus der physikalischen Theorie des Lichtes ergiebt sich auch, dass (wegen der Beugung des Lichtes

cf. I. Abschnitt, Kapitel IV) Elementarbüschel nie scharfe Bilder erzeugen können, sondern stets nur Beugungsscheibchen.

Wir müssen also uns nothwendig nach Mitteln umsehen, die Abbildungsgrenzen zu erweitern. Zunächst kommt uns die beschränkte Empfindlichkeit des Auges hierbei zu statten: Wir können zwei Lichtpunkte schon dann nicht mehr als getrennt unterscheiden, wenn sie unter einem Sehwinkel von etwa einer Winkelminute erscheinen. Eine mathematisch exacte punktförmige Abbildung brauchen wir daher nicht nothwendig, und schon dadurch brauchen die die Abbildung vermittelnden Strahlenbüschel nicht elementare im mathematischen Sinne, d. h. solche von unendlich kleinem Oeffnungswinkel, zu sein.

Durch eine gewisse Theilung der Ansprüche kann man nun noch eine grössere Erweiterung der Abbildungsgrenzen erreichen. Man kann nämlich entweder ein bei der Axe gelegenes Flächenelement durch weit geöffnete Strahlenbüschel abbilden, oder ein ausgedehntes Object durch enge Strahlenbüschel. Je weiter man den ersten Fall realisirt, desto weniger tritt gleichzeitig der zweite ein, und umgekehrt.

Dass man einen Punkt auf der Axe durch weit geöffnete Strahlenbüschel abbilden kann, haben wir schon oben S. 32 bei Betrachtung der aplanatischen Flächen gesehen. Aber auch durch Anwendung geeignet gestalteter centrirter Kugelflächen kann man dies Ziel näherungsweise erreichen. Es ergiebt sich dies aus der theoretischen Berechnung der sogenannten sphärischen Aberration. — Benachbarte Punkte würden nun allerdings im Allgemeinen noch nicht durch weit geöffnete Strahlenbüschel abgebildet werden. Soll dies eintreten, d. h. will man ein zur Axe senkrechtes Flächenelement durch weit geöffnete Büschel abbilden, so wird man auf die sogenannte Sinus-Bedingung geführt. Die Objective von Mikroskopen und Fernrohren müssen diesen Anforderungen genügen.

Der Aufgabe, grössere Räume durch relativ enge Büschel abzubilden, müssen die Oculare der optischen Instrumente und die photographischen Systeme genügen. Bei letzteren können die Büschel auch schon ziemlich weit sein, weil es sich unter Umständen (Porträt-Photographie) um Herstellung nur mässig scharfer Bilder handelt. Im Folgenden sollen diese verschiedenen Aufgaben der Abbildung näher besprochen werden. Eine Abbildung im früheren idealen Sinne zu erreichen, nämlich beliebig grosser Räume durch

weit geöffnete Strahlenbüschel, ist allerdings unmöglich, schon allein aus dem Grunde, weil, wie wir sehen werden, die Sinus-Bedingung nie gleichzeitig für mehr als eine Objectlage erfüllt werden kann.

8. Sphärische Aberration. Wenn von einem Axenpunkte P zwei Strahlen S_1 und S_2 ausgehen, von denen S_1 einen sehr kleinen Winkel, S_2 aber einen endlichen Winkel u mit der Axe bildet, so schneiden ihre Bildstrahlen S_1' und S_2' nach Brechung durch centrirte Kugelflächen die Axe im Allgemeinen in zwei verschiedenen Punkten P_1' und P_2'. Die Distanz zwischen diesen Punkten wird als sphärische Aberration (Longitudinal-Aberration) bezeichnet. Um dieselbe zu berechnen, kann man, falls der Neigungswinkel u des Strahles S_2 gegen die Axe nicht zu gross ist, eine Entwickelung nach steigenden Potenzen von u vornehmen. Wenn dagegen u beträchtlich ist, so empfiehlt sich eine directe trigonometrische Durchrechnung der einzelnen Wege eines Strahles. Diese Rechnungen sollen hier nicht im Detail mitgetheilt werden.[1] Bei relativ dünnen Collectivlinsen ist für sehr weit entfernte Objecte P der Vereinigungspunkt P_1 der der Axe nahen Strahlen entfernter von der Linse, als der Vereinigungspunkt P_2 der stärker geneigten Strahlen. Man spricht dann von sphärischer Untercorrection. Umgekehrt besitzt eine Dispansivlinse sphärische Uebercorrection. Beschränkt man sich auf das erste Glied in der Potenzentwickelung nach u (dasselbe enthält u^2 als Factor), so ergiebt sich für diese sogenannte Aberration erster Ordnung, falls das Object P sehr weit entfernt ist:

$$\varepsilon = P_1'P_2' = -\frac{h^2\left\{2 - 2n^2 + n^3 + \sigma(n + 2n^2 - 2n^3) + \sigma^2 n^3\right\}}{f \cdot 2n(n-1)^2(1-\sigma)^2}. \tag{36}$$

Dabei bezeichnet h den Radius der Oeffnung der Linse, f ihre Brennweite, n ihren Brechungsexponenten und σ das Verhältniss ihrer Krümmungsradien:

$$\sigma = r_1 : r_2. \tag{37}$$

r_1 und r_2 sind in dem oben S. 38 definirten Sinne positiv gerechnet, für eine Biconvexlinse ist z. B. r_1 positiv, r_2 negativ.

1) Näheres hierüber vgl. in Winkelmann's Handbuch der Physik, Optik, S. 99ff. (Autor Czapski), oder Müller-Pouillet's Lehrbuch d. Physik, 9. Aufl., S. 487ff. (Autor Lummer), oder Heath, Geometrische Optik, deutsch von Kanthack, Berlin 1894, S. 146ff.

$P_1'P_2'$ ist negativ für sphärische Untercorrection, positiv für Uebercorrection. Das Verhältniss $h:f$ wird auch die relative Oeffnung der Linse genannt. Es ergiebt sich dann aus (36), dass das Verhältniss der Aberration $P_1'P_2'$ zur Brennweite f proportional dem Quadrat der relativen Oeffnung der Linse zunimmt, falls σ constant bleibt.

Bei bestimmten f und h erreicht die Aberration für ein bestimmtes Radienverhältniss σ' ein Minimum;[1]) dasselbe folgt aus (36) zu:

$$\sigma' = -\frac{4+n-2n^2}{n(1+2n)}. \tag{38}$$

Für $n = 1{,}5$ folgt $\sigma' = -1:6$. Dies entspricht entweder einer Biconvex- oder Biconcavlinse. Die stärker gekrümmte Fläche muss dem einfallenden Lichte zugekehrt sein. Wenn dagegen das Object etwa in Brennweitenabstand von der Linse entfernt läge, so würde sie das beste Bild liefern, wenn ihre schwächer gekrümmte Fläche nach dem Object zu läge,[2]) da man ja diesen Fall aus dem vorhin betrachteten (sehr entferntes Object) ableiten kann, wenn Object und Bild ihre Rolle gegenseitig vertauschen. — Für $n = 2{,}0$ folgt aus (38) $\sigma' = +\,{}^1/_5$. Dies würde einer convex-concaven Linse entsprechen, welche die convexe Seite nach dem fernen Object P zuwendet.

Folgende Tabelle ergiebt eine Anschauung von der Grösse der Longitudinal-Aberration ε bei zwei verschiedenen Brechungsindices und verschiedenen Radienverhältnissen σ. Es ist dabei f constant gleich 1 m und $h:f = {}^1/_{10}$, d. h. $h = 10$ cm gesetzt. Die sogenannte Lateral-Aberration ζ, d. h. der Radius des Kreises, welchen die Randstrahlen der Linse auf einem Schirme bilden, der durch den Bildpunkt P_1' geht, ergiebt sich, wie man sofort aus dem Strahlengange erhält, durch Multiplication der Longitudinal-Aberration mit der relativen Oeffnung h/f, d. h. hier mit ${}^1/_{10}$. Die Lateral-Aberration giebt den Radius der Bildscheibchen, welche die Randstrahlen von einem leuchtenden Punkte P in einer Ebene entwerfen, in welcher P durch axennahe Strahlen scharf abgebildet wird.

---

1) Dies Minimum ist immer noch von Null verschieden. Man kann ein völliges Verschwinden der Aberration erster Ordnung erst dann erreichen, wenn auch die Linsendicke geeignet gewählt wird.

2) Schon hieraus folgt, dass die Gestalt der Linse minimalster Aberration von der Lage des Objectes abhängt.

$f = 1$ m. $h = 10$ cm.

	$n = 1,5$			$n = 2$		
Gestalt der Linse	σ	$-\varepsilon$	ζ	σ	$-\varepsilon$	ζ
Ebene Vorderfläche	∞	4,5 cm	4,5 mm	∞	2 cm	2 mm
Gleichseitig	-1	1,67 „	1,67 „	-1	1 „	1 „
Ebene Hinterfläche	0	1,17 „	1,17 „	0	0,5 „	0,5 „
Günstigste Form	$-1/6$	1,07 „	1,07 „	$+1/5$	0,44 „	0,44 „

Dass eine planconvexe Linse Bilder von geringerer Aberration liefert, falls ihre convexe Seite dem fernen Object zugekehrt ist, als umgekehrt, ist schon aus dem Grunde plausibel, weil im ersten Falle die Strahlen an beiden Flächen der Linse gebrochen werden, im letzteren nur an einer, und es ist plausibel, dass eine möglichst gleichmässige Vertheilung der Brechungen günstig ist, da dann an jeder brechenden Fläche die kleinsten Winkeländerungen von einfallendem und gebrochenem Strahl eintreten. — Die Tabelle lehrt ferner, dass die günstigste Linsenform wenig Vortheil bietet vor der geeignet gestellten planconvexen Linse. Aus dem Grunde leichterer Herstellung wird daher letztere oft in praxi angewendet.

Schliesslich lehrt die Tabelle, dass die Aberrationsfehler ganz bedeutend kleiner werden, wenn bei gegebener Brennweite der Brechungsindex möglichst hoch ist. Dieses Resultat bleibt auch bestehen, wenn man die Aberration höherer Ordnung berücksichtigt, welche nicht mehr allein abhängt vom ersten Gliede in der Potenzentwickelung nach dem Neigungswinkel u der Objectstrahlen. — Ebenfalls vermindert sich die Aberration bedeutend, wenn man eine einzige Linse ersetzt durch ein System mehrerer Linsen von gleicher Gesammtbrennweite.[1]) Wählt man letztere sogar noch von verschiedener Gestalt, so hat man die Möglichkeit, die Aberration erster Ordnung und auch noch höherer Ordnungen zum Verschwinden zu bringen.[2]) — Man kann dies auch gleichzeitig für mehrere Objectlagen erreichen, aber allerdings nie für ein endliches Stück der Axe.

1) Man büsst dann allerdings etwas an der Bildhelligkeit ein wegen der vermehrten Reflexionsverluste.

2) So kann man durch zwei Linsen, von denen die eine collectiv, die andere dispansiv ist, die Aberration erster Ordnung aufheben.

Bei beträchtlichen Neigungswinkeln u wird die Potenzentwickelung der Aberration unbrauchbar, z. B. bei Mikroskop-Objectiven, bei denen u unter Umständen fast 90° erreicht. Es ist dann praktischer, durch trigonometrische Rechnung den Gang mehrerer Strahlen zu verfolgen und durch Probiren die besten Linsengestalten und Anordnungen zu ermitteln. Es bietet sich indess durch Benutzung der oben S. 32 erwähnten aplanatischen Punkte der Kugel ein Weg, um bei nahen Objecten die Divergenz ihrer austretenden Strahlen streng aberrationsfrei beliebig zu verkleinern, d. h. auch ein aberrationsfreies, beliebig grosses, virtuelles Bild des Objectes zu erzeugen.

Die erste Linse 1 (Frontlinse) möge planconvex (z. B. Halbkugel vom Radius r_1) sein, und zwar kehre sie ihre ebene Fläche dem Object P zu (vgl. Figur 25). Wenn P in einem Medium eingebettet ist vom gleichen Brechungsexponenten n_1, wie diese Frontlinse, so findet erst an der Hinterfläche derselben eine Brechung der vom Object ausgehenden Strahlen statt, und zwar wenn P den Abstand r_1/n_1 vom Krümmungscentrum C_1 jener Hinterfläche besitzt, so erzeugen die austretenden Strahlen ein aberrationsfreies virtuelles Bild P_1 im Abstand $n_1 r_1$ von C_1. Bringt man nun hinter der Frontlinse eine zweite concav-convexe Linse 2 an, deren Vorderfläche ihr Krümmungscentrum in P_1 hat, während ihre Hinterfläche einen derartigen Radius r_2 besitzt, dass P_1 im aplanatischen Punkte dieser Kugel r_2 (für den Brechungsindex n_2 der Linse) liegt, so werden die Lichtstrahlen nur an dieser Hinterfläche gebrochen, und zwar derart, dass sie vom virtuellen Bilde P_2 herkommen, welches den Abstand $n_2 r_2$ vom Krümmungscentrum C_2 der Hinterfläche der Linse 2 besitzt und wiederum völlig aberrationsfrei ist. Durch Anwendung einer dritten, vierten etc. concav-convex-Linse kann man successive weiter nach links liegende virtuelle Bilder P_3, P_4 etc. vom Object P erzeugen, d. h. auch die

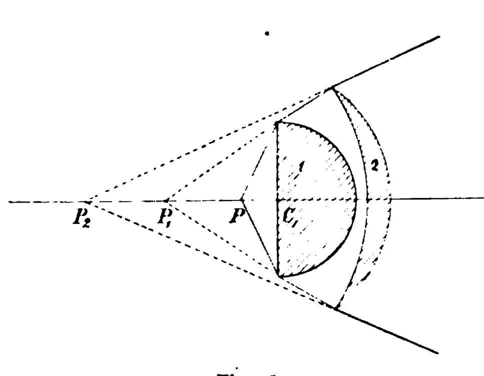


Fig. 25.

Divergenz der Lichtstrahlen successive verkleinern, ohne dass Aberrationsfehler entstehen.

Dieses Princip (von Amici herrührend) benutzt man in der That vielfach bei der Construction der Mikroskop-Objective, wobei man allerdings höchstens die beiden ersten Linsen desselben nach diesem Princip construirt, weil sonst zu starke, uncompensirbare chromatische Fehler (vgl. hierüber weiter unten) entstehen.

9. Der Sinussatz. Wenn ein Axenpunkt P durch weit geöffnete Strahlenbüschel aberrationsfrei in einem Punkte P' abgebildet wird, so ist damit im Allgemeinen noch nicht die Abbildung ein bei P senkrecht zur Axe gelegenen Flächenelementes $d\sigma$ in ein bei P' gelegenes Flächenelement $d\sigma'$ verknüpft, sondern es muss dazu noch die sogenannte Sinusbedingung erfüllt sein, dass nämlich $\sin u : \sin u' =$ constans ist, falls u und u' die Neigungswinkel irgend welcher durch P und P' gehender conjugirter Strahlen sind.

Nach Abbe werden diejenigen abbildenden Systeme, welche aberrationsfrei für zwei Axenpunkte P und P' sind, und für diese Punkte die Sinusbedingung erfüllen, aplanatische Systeme genannt. Die Punkte P und P' heissen die aplanatischen Punkte des Systems. Die früher S. 32 genannten aplanatischen Punkte der Kugel entsprechen diesen Bedingungen, da nach der dortigen Formel (2) das Sinusverhältniss constant ist. Die beiden Brennpunkte eines ellipsoidischen Hohlspiegels sind aber nicht aplanatische Punkte, sondern nur aberrationsfreie.

Früher (S. 22, Formel (9), Kapitel II) hatten wir gesehen, dass bei der collinearen Abbildung beliebig grosser Räume das Verhältniss $tg\, u : tg\, u' =$ const. ist. Diese Bedingung tritt, sobald u und u' nicht sehr kleine Winkel sind, mit der Sinusbedingung in Widerspruch, und hieraus ergiebt sich, da die letztere nothwendig bei physikalischer Abbildung zweier Flächenelemente erfüllt werden muss, dass eine punktförmige Abbildung beliebig grosser Räume durch weit geöffnete Strahlenbüschel physikalisch nicht herzustellen ist.

Erst wenn die Winkel u und u' sehr klein sind, können beide Bedingungen neben einander bestehen. In diesem Falle entsteht auch, falls P ein Bild P' erzeugt, allemal ein Bild $d\sigma'$ bei P' von einem Flächenelemente $d\sigma$ bei P. Bei weiten Oeffnungswinkeln u werden aber, falls die Sinusbedingung nicht erfüllt ist, selbst bei vollkommenster Aufhebung der sphärischen Aberration für Axenpunkte, die Bilder benachbarter Punkte, die seitlich der Axe

liegen, so undeutlich, dass ihre Zerstreuungskreise von derselben Grössenordnung sind, wie die Abstände der Punkte von der Axe. Nach Abbe hat diese undeutliche Abbildung seitlicher Axenpunkte ihren Grund darin, dass die verschiedenen Zonen des sphärisch corrigirten abbildenden Systems von einem Flächenelement Bilder von verschiedener Linearvergrösserung entwerfen.

Die mathematische Bedingung für die Constanz dieser Linearvergrösserung ist nach Abbe[1]) die Sinusbedingung. Andere Beweise dafür, die auf photometrischen und energetischen Grundsätzen

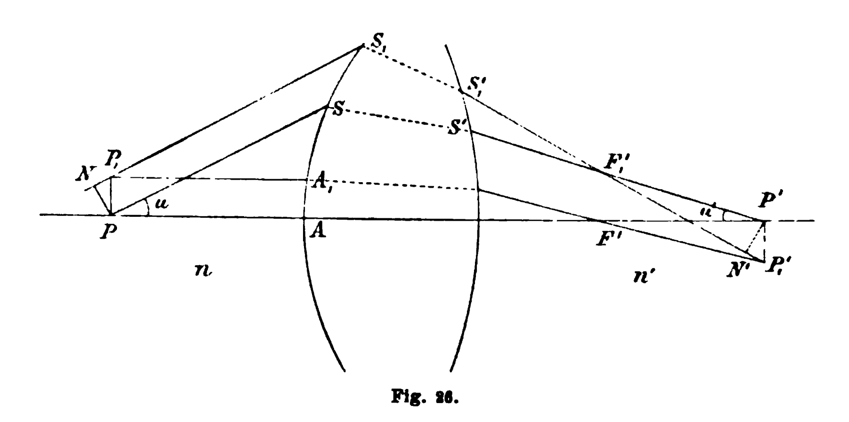


Fig. 26.

beruhen, gab Clausius[2]) und v. Helmholtz.[3]) Diese Schlussweisen werden weiter unten im III. Abschnitt auseinandergesetzt werden. Es möge hier ein einfacher Beweis folgen, den Hockin[4]) gegeben hat und der nur den Satz benutzt, dass die optischen Längen aller Strahlenwege zwischen conjugirten Punkten einander gleich sein müssen[5]) (vgl. oben S. 9).

Es möge (vgl. Figur 26) P durch einen Axenstrahl PA und einen unter dem Winkel u geneigten Strahl PS im Axenpunkte P' abgebildet werden. Ebenso möge der unendlich nahe Punkt P_1

---

1) Carl's Repert. f. Physik, 1881, 16, S. 303.

2) R. Clausius, Mechanische Wärmetheorie, 1887, 3. Aufl., 1, S. 315.

3) Pogg. Ann. Jubelbd., 1874, S. 557.

4) Journ. Roy. Microscop. Soc. 1884, (2), 4, S. 337.

5) Nach Bruns (das Eikonal, Abhandl. d. sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 21, S. 325, math.-phys. Kl.) kann man den Sinussatz auf noch allgemeinere Grundsätze zurückführen, nämlich allein auf das Vorhandensein conjugirter Strahlen und den Malus'schen Satz (cf. oben S. 13).

durch einen axenparallelen Strahl $P_1 A_1$ und einen zu S parallelen Strahl $P_1 S_1$ im Punkte P_1' abgebildet werden. Der zu $P_1 A_1$ conjugirte Strahl $F' P_1'$ muss offenbar durch den Brennpunkt F' des Bildraumes gehen. Bezeichnet man nun die optische Länge zwischen den Punkten P und P' auf dem Wege über A durch (PAP'), auf dem Wege über S, S' durch $(PSS'P')$, und analog die optischen Längen der von P_1 ausgehenden Strahlen, so ist nach dem Princip vom ausgezeichneten Lichtweg:

$$(PAP') = (PSS'P'); \quad (P_1 A_1 F' P_1') = (P_1 S_1 S_1' P_1'),$$

daher auch

$$(PAP') - (P_1 A_1 F' P_1') = (PSS'P') - (P_1 S_1 S_1' P_1'). \tag{39}$$

Da nun F' conjugirt ist zu einem unendlich entfernten Object T auf der Axe, so wäre $(TPAF') = (TP_1 A_1 F')$. Nun sind aber offenbar die Längen TP und TP_1 einander gleich, da PP_1 senkrecht zur Axe stehen soll. Daher folgt aus der letzten Beziehung durch Subtraction dieser Längen $TP = TP_1$:

$$(PAF') = (P_1 A_1 F'). \tag{40}$$

Ferner folgt, da $P' P_1'$ senkrecht steht zur Axe: $F'P' = F'P_1'$, wenigstens falls $P'P_1'$ sehr klein ist. Addirt man diese Gleichung zu (40), so ergiebt sich:

$$(PAF'P') = (P_1 A_1 F' P_1'),$$

d. h. die linke Seite der Gleichung (39) verschwindet, d. h. es wird:

$$(PSS'P') = (P_1 S_1 S_1' P_1'). \tag{41}$$

Nennt man nun F_1' den Schnittpunkt der Strahlen $P'S'$ und $P_1' S_1'$, so ist F_1' conjugirt zu einem unendlich entfernten Objectpunkte T_1, dessen Strahlen den Winkel u mit der Axe bilden. Fällt man daher von P ein Lot PN auf $P_1 S_1$, so entsteht, analog wie oben die Gleichung (40):

$$(PSS'F_1') = (NS_1 S_1' F_1'). \tag{42}$$

Durch Subtraction dieser Gleichung von (41) entsteht:

$$(F_1'P') = -(NP_1) + (F_1'P_1'). \tag{43}$$

Ist nun n der Brechungsindex des Objectraumes, n' der des Bildraumes, so ist, falls die geometrischen Längen ohne Klammern bezeichnet werden:

$$(NP_1) = n \cdot NP_1 = n \cdot PP_1 \cdot \sin u. \tag{44}$$

Zieht man ferner $P'N'$ senkrecht zu $F_1'P'$, so ist, da $P'P_1'$ unendlich klein ist,

$$(F_1'P_1') - (F_1'P') = n' \cdot N'P_1' = n' \cdot P'P_1' \cdot \sin u'. \tag{45}$$

Daher giebt die Gleichung (43), wenn man (44) und (45) berücksichtigt:

$$n \cdot PP_1 \cdot \sin u = n' \cdot P'P_1' \cdot \sin u'.$$

Nennt man y die lineare Grösse PP_1 des Objectes, ebenso y' die des Bildes $P'P_1'$, so ergiebt sich also:

$$(46) \qquad \frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n}\frac{y'}{y}.$$

Hiermit ist die Constanz des Sinusverhältnisses bewiesen, und zwar ist auch zugleich der Werth der Constanten ermittelt. Der-

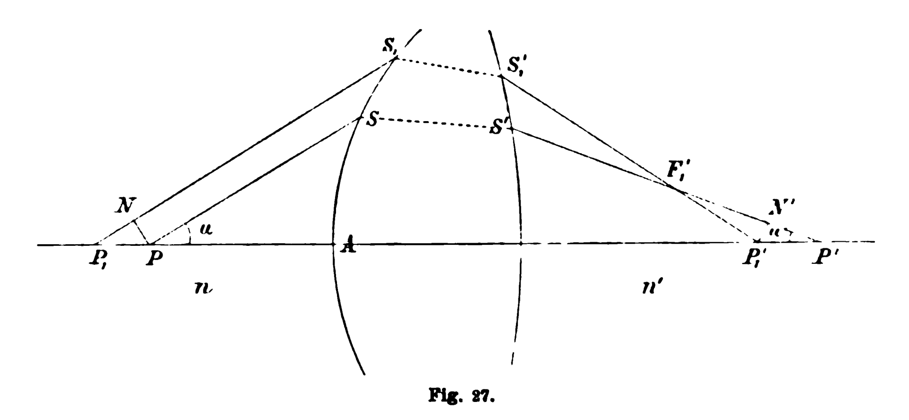


Fig. 27.

selbe stimmt überein mit der bei den aplanatischen Punkten der Kugel früher (S. 33) erhaltenen Formel (2).

Für zwei verschiedene Axenpunkte kann man nicht die Sinusbedingung erfüllen. Denn wenn (vgl. Figur 27) P und P_1 die Bilder $P_1'P_1'$ besitzen, so muss nach dem Princip gleicher optischer Längen sein:

$$(47) \qquad (PAP') = (PSS'P'), \quad (P_1AP_1') = (P_1S_1S_1'P_1').$$

PS und P_1S_1 mögen zwei einander parallele Strahlen vom Neigungswinkel u sein. Durch Subtraction beider Gleichungen (47) von einander folgt dann durch dieselben Schlussfolgerungen wie vorhin:

$$(P_1'P') - (P_1P) = -(P_1N) + (N'P'),$$

oder

$$n \cdot P_1P\,(1 - \cos u) = n' \cdot P_1'P'\,(1 - \cos u'), \text{ d. h.}$$

$$(48) \qquad \frac{\sin^2 \frac{1}{2} u}{\sin^2 \frac{1}{2} u'} = \frac{n' \cdot P'P_1'}{n \cdot PP_1}.$$

Diese Gleichung ist also die Bedingung dafür, dass zwei benachbarte Punkte der Axe, d. h. ein unendlich kleines Stück derselben, durch weit geöffnete Strahlenbüschel abgebildet wird.

Diese Bedingung kann aber nicht gleichzeitig mit der Sinusbedingung (46) erfüllt werden. Man kann also nur für eine Objectivlage ein abbildendes System aplanatisch machen.

Für die Mikroskop-Objective ist die Erfüllung der Sinusbedingung besonders wichtig. Man hat dieselbe bei der Construction der älteren Mikroskope theoretisch noch nicht gekannt, man kann aber nach Abbe experimentell nachweisen, dass die älteren Mikroskop-Objective, welche, rein nach empirischen Grundsätzen hergestellt, gute Bilder liefern, thatsächlich der Sinusbedingung genügen.

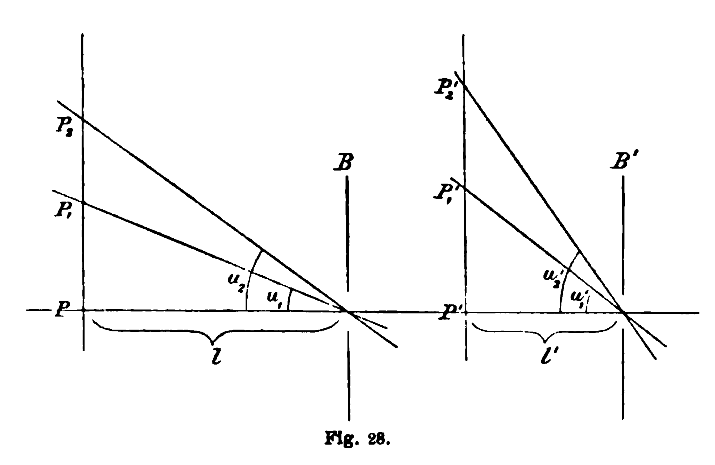


Fig. 28.

10. Abbildung grosser Flächen durch enge Büschel. Vor allem muss der Astigmatismus gehoben sein (vgl. oben S. 44). Es lässt sich auf theoretischem Wege kein Satz für diese Bedingung ableiten, wenigstens wenn die Neigung der abbildenden Strahlen gegen die Axe beliebig gross ist. Man ist also wesentlich hierbei auf praktische Erfahrungen und trigonometrische Durchrechnung angewiesen. Es mag hervorgehoben werden, dass auf den Astigmatismus nicht nur die Gestalt der einzelnen Linsen, sondern auch der Ort einer Blende Einfluss hat.

Noch zwei weitere Forderungen pflegt man an die Abbildung zu stellen, welche allerdings keine unbedingten sind und zum Theil nur der Bequemlichkeit dienen: das Bild soll eben sein (ohne Wölbung) und in seinen einzelnen Theilen gleiche Vergrösserung

besitzen (es soll frei von Verzerrung sein). Erstere Forderung wird besonders an photographische Objective gestellt, über die analytischen Bedingungen vgl. Winkelmann, Handb. d. Physik, Optik, S. 124 (Autor Czapski).

Die analytische Bedingung für Verzerrungsfreiheit lässt sich leicht aufstellen: Es sei (vgl. Figur 28) P, P_1, P_2 eine Objectivebene; P', P_1', P_2' die conjugirte Bildebene. Die abbildenden Strahlenbüschel des Objectes werden stets durch eine bestimmte Blende B (Eintrittspupille) begrenzt (eventuell ist diese einfach der Rand einer Linse, oder eine speciell angebrachte Blende), und zwar sind die von den Objecten P_1, P_2 etc. nach dem Mittelpunkt B der Eintrittspupille hinzielenden Strahlen die Hauptstrahlen (mittleren Strahlen) der abbildenden Büschel. Ebenso werden die

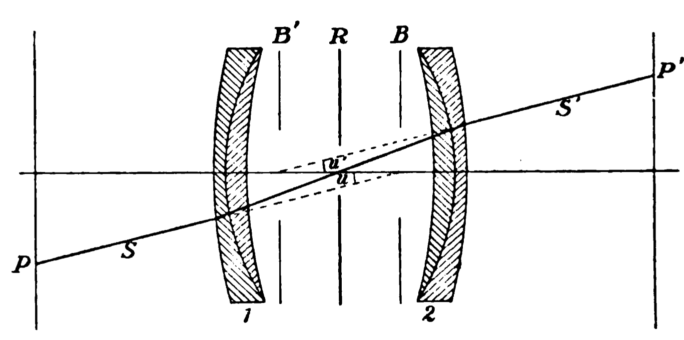


Fig. 29.

Bildstrahlen durch eine Blende B' (Austrittspupille), welche das conjugirte Bild zur Eintrittspupille[1]) ist, begrenzt. Wenn l und l' die Entfernungen der Pupillen von der Object-, bezw. Bildebene ist, so ergiebt sich aus der Figur:

$$tg\, u_1 = PP_1 : l, \quad tg\, u_2 = PP_2 : l,$$
$$tg\, u_1' = P'P_1' : l', \quad tg\, u'_2 = P'P_2' : l'.$$

Wenn nun die Vergrösserung constant sein soll, so muss sein:

$$P'P'_1 : PP_1 = P'P_2' : PP_2,$$

daher auch

$$\frac{tg\, u_1'}{tg\, u_1} = \frac{tg\, u_2'}{tg\, u_2} = \text{constans.} \tag{49}$$

Bei constanter Vergrösserung müssen also conjugirte

1) Näheres hierüber vgl. im Kapitel IV.

Hauptstrahlen ein constantes Tangentenverhältniss ihrer Neigungswinkel besitzen. Man pflegt in diesem Falle die Schnittpunkte der Hauptstrahlen mit der Axe, d. h. die Mittelpunkte der Pupillen, „orthoskopische“ Punkte zu nennen, man kann also auch sagen: die Centra der Perspective von Object und Bild müssen orthoskopische Punkte sein, falls das Bild ohne Verzerrung sein soll.

Aus diesem Grunde ist die Lage der Pupillen von Bedeutung. An einem Beispiele, welches der photographischen Optik entnommen ist, mag gezeigt werden, wie man bei einem Projectionssystem der Bedingung der Orthoskopie am einfachsten genügen kann: Man bringt nämlich zu beiden Seiten einer körperlichen Blende R vollkommen symmetrische Linsensysteme 1 und 2 an. (Das ganze System nennt man dann ein symmetrisches Doppelobjectiv.) In der Figur 29 sind zwei conjugirte Hauptstrahlen S, S' gezeichnet. Das optische Bild B der Blende R in Bezug auf das System 1 ist offenbar die Eintrittspupille, denn alle Hauptstrahlen müssen thatsächlich durch die Mitte der Blende R gehen, die einfallenden Hauptstrahlen S müssen daher nach der Mitte von B, dem optischen Bilde von R in Bezug auf 1, hinzielen. Ebenso ist B', das optische Bild von R in Bezug auf 2, die Austrittspupille. Aus der Symmetrie der Anordnung ergiebt sich nun sofort, dass stets $u = u'$ ist, d. h. die Bedingung (49) der Orthoskopie ist erfüllt.

Solche symmetrischen Doppelobjective besitzen, Kraft ihrer Symmetrie, noch zwei andere Vortheile:

Einmal ist eine bessere Vereinigung der Meridionalbüschel zu erzielen,[1]) andererseits sind auch chromatische Fehler (die im nächsten Paragraphen ausführlicher behandelt werden sollen) leichter zu vermeiden. Das Resultat $u = u'$, d. h. die Parallelität conjugirter Hauptstrahlen, ist ganz unabhängig von den Brechungsexponenten des Systems, d. h. auch von der Farbe des Lichtes. Wenn nun jedes der beiden Theilsysteme 1 und 2 einzeln für sich achromatisirt ist in Bezug auf den Bildort, der von der körperlichen Blende R entsteht, d. h. wenn die Orte der Eintritts- und Austrittspupille unabhängig von der Farbe sind,[2]) so fallen conjugirte

1) Es handelt sich hier um Aufhebung des sogenannten Comafehlers. Vgl. darüber Müller-Pouillet, Optik (von Lummer), S. 774.

2) Diese Achromatisirung kann, wie wir sehen werden, praktisch genügend nahe erreicht werden, dagegen kann nicht gleichzeitig erreicht werden, dass auch die Grössen der von R entstehenden Bilder unabhängig von der Farbe sind.

Hauptstrahlen von einem Objecte P_1 und seinem Bilde P_1' für alle Farben stets zusammen. Dadurch entstehen dann aber auch in der Bildebene gleichgrosse Bilder für alle Farben. Der Ort der schärfsten Bildebene ist allerdings streng genommen für die verschiedenen Farben etwas verschieden, wenn aber z. B. ein Schirm auf Gelb scharf eingestellt ist, so ist die Unschärfe für andere Farben nur gering und ihre Bilder liegen an den Schnittpunkten der Hauptstrahlen. Falls also diese für alle Farben zusammenfallen, so wird das Bild nur wenig durch chromatische Fehler gestört.

Von der Entfernung der Einzelsysteme 1 und 2 von der Blende R hängt der Astigmatismus und die Bildwölbung ab. Im Allgemeinen wird das Bild mit zunehmender Entfernung der Einzelsysteme gestreckter, d. h. die Bildwölbung nimmt ab, während die astigmatische Differenz zunimmt. Nur in Folge Verwendung der neuen Gläser von Schott in Jena, bei denen hohe Dispersion mit niedrigem Brechungsindex und geringe Dispersion mit hohem Brechungsindex gepaart vorkommt, ist eine anastigmatische Bildebnung ermöglicht worden. Es soll dies unten (Kapitel V über optische Instrumente) noch näher besprochen werden.

11. Die chromatischen Abweichungen in dioptrischen Systemen. Bisher ist immer nur vom Brechungsexponenten eines Körpers schlechthin die Rede gewesen; aber es ist zu bedenken, dass derselbe für die verschiedenen, im weissen Lichte enthaltenen Farben ein verschiedener ist. Für alle gut durchsichtigen Körper wächst der Brechungsexponent continuirlich, wenn man vom rothen Ende der Spectralfarbenscala zum blauen Ende übergeht. Um eine Anschauung zu geben, sind in folgender Tabelle die Brechungsexponenten für 3 Farben: n_C für rothes Licht (der Fraunhofer'schen Linie C des Sonnenspectrums, die identisch mit der rothen Wasserstofflinie ist), n_D für gelbes Licht (Natriumlinie), n_F für blaues Licht (blaue Wasserstofflinie) bei zwei verschiedenen Glassorten angegeben.

Glassorte	n_C	n_D	n_F	$\nu = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$
Calcium-Silicat-Crown	1,5153	1,5179	1,5239	0,0166
Gewöhnl. Silicat-Flint	1,6143	1,6202	1,6314	0,0276

In der letzten Kolumne ist das sogenannte Dispersionsvermögen ν des Körpers angegeben. Dasselbe ist also definirt durch:

$$\nu = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}. \tag{50}$$

Es ist übrigens für ν ziemlich gleichgiltig, ob im Nenner n_D oder der Brechungsexponent für irgend eine andere Farbe gewählt wird. Denn dadurch würde sich ν um höchstens 2% ändern.

Da nun die Abbildungsfactoren vom Brechungsexponenten abhängig sind, so muss im Allgemeinen das von einem weissen Objecte entstehende Bild farbige (chromatische) Abweichungen zeigen, d. h. die verschiedenen im weissen Objecte enthaltenen Farben entwerfen Bilder, welche nach Ort und Grösse von einander etwas verschieden sind.

Will man das rothe und blaue Bild vollständig zur Deckung bringen, d. h. will man das abbildende System für roth und blau achromatisiren, so ist dazu erforderlich, dass nicht nur die Brennweiten, sondern auch beide Hauptebenen für beide Farben identisch werden.[1]) In vielen Fällen genügt aber schon eine theilweise Achromatisirung des Systems, z. B. entweder nur der Brennweite, oder der Lage eines Brennpunktes, je nach den praktischen Zwecken, denen das System dient, nach denen entweder mehr Gewicht auf die Bildvergrösserung oder den Bildort zu legen ist.

Durch eine Achromatisirung des Systems für zwei Farben, z. B. roth und blau, ist aber im Allgemeinen noch nicht eine Achromatisirung für alle anderen Farben erreicht, weil das Verhältniss der Dispersionen in verschiedenen Theilen des Spectrums von Substanz zu Substanz variirt. Die so noch übrig bleibenden chromatischen Abweichungen der Bilder, welche man secundäres Spectrum nennt, sind aber meist schon unerheblich für praktische Zwecke. Man kann ihren Einfluss noch weiter reduciren entweder durch Wahl geeigneter brechender Körper, bei denen die Disproportionalität des Dispersionsvermögens möglichst klein ist, oder durch Achromatisirung für 3 Farben. (Die dann noch übrig bleibenden chromatischen Bildabweichungen heissen tertiäres Spectrum.)

Die Wahl der zum Zwecke praktischer Achromatisirung zu vereinigenden Farben hängt vom Zwecke des optischen Instru-

---

1) Bei weit geöffneten Strahlenbüscheln giebt es noch mehr Bedingungen, die zur völligen Achromasie nothwendig sind; cf. weiter unten.

mentes ab. Bei einem photographischen Systeme, für welches das blaue Licht das wirksamste ist, wird man beide Farben mehr nach dem blauen Ende des Spectrums zu wählen, als bei einem dem menschlichen Auge dienenden Instrumente, für welches das gelbgrüne Licht das wirksamste ist. In letzterem Falle kann man experimentell leicht entscheiden, welche beiden Farben man am zweckmässigsten vereinigt in folgender Weise: Man stellt zwei Prismen verschiedener Glassorten auf den Tisch eines Spectrometers so zusammen, dass sie nahezu achromatische Spaltbilder liefern, z. B. die Farben C und F bei bestimmter Stellung des Spectrometertisches vereinigen. Dreht man denselben, so wird das Spaltbild im Allgemeinen farbig gesehen, bei einer Stellung des Spectrometertisches wird aber das Spaltbild am wenigsten gefärbt erscheinen. Man berechnet dann aus dieser, hier gerade vorhandenen Lage der Prismen die beiden Farben, welche thatsächlich genau parallel aus den Prismen austreten. Dieses sind dann diejenigen beiden Farben, welche zur Achromatisirung bei subjectiver Beobachtung am zweckmässigsten zu vereinigen sind.

Schon mit einer einzigen dicken Linse kann man Achromatisirung der Brennweite oder der Brennpunktsorte erreichen.

Praktisch wichtiger sind aber die Fälle, in denen dünne Linsen verwandt werden. Werden dieselben auf einander gelegt, so können wir näherungsweise von der chromatischen Abweichung der Hauptebenen absehen, da diese bei dünnen Linsen einfach immer in die Linsen fallen (vgl. oben S. 40). Wenn man also dann die Brennweite achromatisirt, so ist das System nahezu vollständig achromatisirt, d. h. sowohl für Bildort als auch Bildgrösse.

Es ist nun die Brennweite f_1 einer dünnen Linse vom Brechungsindex n_1 bei einer bestimmten Farbe nach Formel (22) der S. 40 gegeben durch

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) = (n_1 - 1)\, k_1, \tag{51}$$

wobei k_1 eine Abkürzung für die Differenz der Linsenkrümmungen bedeutet.

Ferner ist nach (24) der S. 42 die resultirende Brennweite f zweier auf einander gelegter dünner Linsen der Brennweiten f_1 und f_2 gegeben durch

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \tag{52}$$

Für einen Zuwachs dn_1 des Brechungsindex n_1 bei Uebergang zu

einer anderen Farbe folgt nun aus (51) der Zuwachs der reciproken Brennweite:

$$d\left(\frac{1}{f_1}\right) = dn_1 \cdot k_1 = \frac{dn_1}{n_1 - 1} \cdot \frac{1}{f_1} = \frac{\nu_1}{f_1}, \tag{53}$$

wobei ν_1 das Dispersionsvermögen der Substanz der Linse 1 zwischen den beiden benutzten Farben bedeutet. Soll daher die resultirende Brennweite f für beide Farben die gleiche sein, so folgt aus (52) und (53):

$$d\frac{1}{f} = d\left(\frac{1}{f_1}\right) + d\left(\frac{1}{f_2}\right) = \frac{\nu_1}{f_1} + \frac{\nu_2}{f_2} = 0. \tag{54}$$

Die Bedingung der Achromatisirung ist also in (54) enthalten. Diese Gleichung sagt aus, da ν_1 und ν_2 beständig dasselbe Vorzeichen besitzen, was für Körper 1 und 2 man auch verwenden möge, dass die Einzelbrennweiten einer dünnen achromatischen Doppellinse entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

In Verbindung mit (52) folgen die Einzelbrennweiten zu

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f}\,\frac{\nu_2}{\nu_2 - \nu_1}, \quad \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f}\,\frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1}. \tag{55}$$

Bei positiver Gesammtbrennweite hat daher die Linse mit kleinerem Dispersionsvermögen eine positive, die mit grösserem Dispersionsvermögen eine negative Brennweite.

Wenn f vorgeschrieben ist und die Glassorten gewählt sind, so sind zur Erreichung der Brennweiten f_1 und f_2 vier Krümmungsradien verfügbar. Es bleiben daher noch zwei frei verfügbar. Will man die beiden Linsen aneinander kitten, so ist $r_1' = r_2$ zu setzen. Es bleibt dann noch ein Krümmungsradius verfügbar. Derselbe kann zweckmässig so gewählt werden, dass die sphärische Aberration möglichst klein wird.

Bei mikroskopischen Objectiven werden achromatische Paare dieser Art sehr allgemein verwendet; es besteht hierbei jedes aus einer planconcaven Linse aus Flintglas, welche mit einer biconvexen Linse von Crownglas verkittet ist, wobei die plane Linsenfläche dem einfallenden Licht zugekehrt wird.

Wenn wir zwei dünne Linsen in einem grösseren Abstand a von einander verwenden wollen, so ist ihr optisches Intervall Δ (vgl. oben S. 28)

$$\Delta = a - (f_1 + f_2),$$

daher nach (19) S. 29 die resultirende Brennweite:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2}. \tag{56}$$

Soll die Brennweite achromatisirt werden, so folgt aus (56) und (53):

$$0 = \frac{\nu_1}{f_1} + \frac{\nu_2}{f_2} - \frac{a(\nu_1 + \nu_2)}{f_1 f_2},$$

oder

$$a = \frac{\nu_2 f_1 + \nu_1 f_2}{\nu_1 + \nu_2}. \tag{57}$$

Bestehen beide Linsen aus gleichem Material ($\nu_1 = \nu_2$), so bilden sie also in der Distanz

$$a = \frac{f_1 + f_2}{2} \tag{58}$$

ein hinsichtlich der Brennweite achromatisches System. Diese Achromasie findet dann zugleich für alle Farben statt, da stets $\nu_1 = \nu_2$ ist.

Will man das System nicht nur hinsichtlich der Brennweite achromatisiren, sondern vollständig, d. h. nach Bildort und Bildgrösse, so ergiebt die Figur 30:

$$\frac{y_1}{y} = -\frac{e_1'}{e_1}, \quad \frac{y'}{y_1} = -\frac{e_2'}{e_2}, \text{ d. h.}$$

das Vergrösserungsverhältniss:

$$y' : y = e_1' e_2' : e_1 e_2. \tag{59}$$

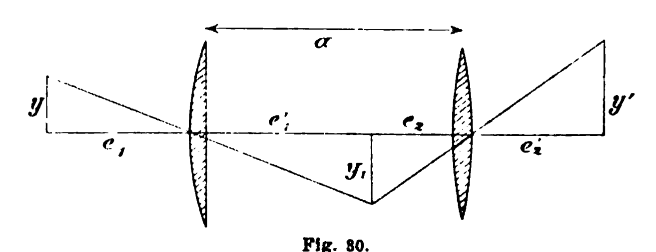


Fig. 30.

Wenn daher die Vergrösserung und der Bildort achromatisirt werden soll, so muss sein, da e_1 für alle Farben constant ist:

$$d\left(\frac{e_1' e_2'}{e_2}\right) = 0, \quad de_2' = 0. \tag{60}$$

Da nun aber $e_1' + e_2 = a$ (Abstand der Linsen) auch für alle Farben constant ist, so folgt $de_1' = -de_2$, während aus (60) folgt $d(e_1'/e_2) = 0$.

Hieraus ergiebt sich $de_1' = 0$, $de_2 = 0$, d. h. die beiden Einzellinsen müssen schon für sich achromatisirt sein, d. h. müssen aus achromatischen Paaren bestehen.

Man kann daher auch allgemein schliessen: **Ein Gesammtsystem, welches aus mehreren getrennten Einzelsystemen besteht, ist nur dann vollständig** (d. h. nach Bildort und Bildgrösse) **achromatisirt, wenn dies schon die Einzelsysteme für sich sind.**

Wenn der Oeffnungswinkel der die Abbildung vermittelnden Strahlenbüschel erheblicher wird, so ist mit der Achromasie des Bildortes oder der Brennweite noch nicht das Zustandekommen eines guten Bildes gewährleistet, auch wenn es für eine Farbe entstehen sollte. Es muss auch die sphärische Aberration für zwei Farben möglichst aufgehoben sein und (bei Abbildung von Flächenelementen) die Bedingung des Aplanatismus (Sinusbedingung) für zwei Farben erfüllt sein. Abbe nennt Systeme, die frei von secundärem Spectrum sind und zugleich aplanatisch für mehrere Farben, „**apochromatische**“ Systeme. Dieselben besitzen dann noch eine chromatische Differenz der Vergrösserung; dieselbe kann durch andere Mittel unschädlich gemacht werden (vgl. weiter unten bei Besprechung des Mikroskops).

Kapitel IV.

Ueber die Strahlenbegrenzung und die von ihr abhängige Lichtwirkung.

1. Eintrittspupille und Austrittspupille. Die Strahlen, welche die Abbildung durch ein optisches System vermitteln, sind naturgemäss stets begrenzt, entweder in Folge der beschränkten Grösse der Linsen bezw. Spiegel, oder in Folge besonders angebrachter körperlicher Blenden. Sei P ein bestimmt gelegener Objectpunkt

(vgl. Figur 31), so findet man zunächst diejenige von den vorhandenen Blenden (oder denjenigen Linsenrand), welche die Oeffnung der abbildenden Büschel am meisten einschränkt, in folgender Weise: Man construire von jeder Blende B das optische Bild B_1, welches der zwischen B und dem Object P liegende Theil S_1 des optischen Systems entwirft. Dasjenige unter diesen Bildern B_1, welches vom Object P unter dem kleinsten Sehwinkel erscheint, begrenzt offenbar die abbildenden Strahlenbüschel; dieses Bild heisst die Eintrittspupille des ganzen abbildenden Systems, die körperliche Blende B selbst wird die Apertur- oder Oeffnungsblende (oder auch Iris) genannt.[1]) Der Sehwinkel $2U$, unter welchem die Ein-

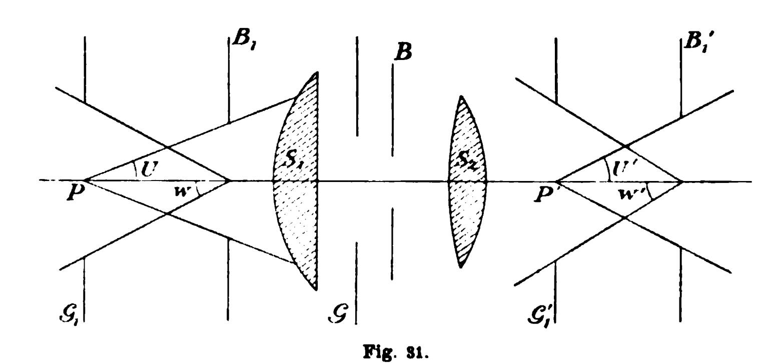


Fig. 31.

trittspupille vom Object aus erscheint, d. h. der Winkel zweier in einer Meridianebene verlaufenden Randstrahlen, heisst der Oeffnungswinkel des Systems.

Das optische Bild B_1', welches das ganze System von der Eintrittspupille entwirft, wird seine Austrittspupille genannt. Dieselbe begrenzt offenbar die von dem Bilde P' des Objectes P ausgehenden Strahlen. Der Winkel $2U'$, unter dem die Austrittspupille von P' aus erscheint, heisst der Projectionswinkel des Systems. Aus der Vertauschbarkeit von Bild und Object folgt ohne Weiteres, dass die Austrittspupille B_1' das Bild der Aperturblende B in Bezug auf den Theil S_2 des ganzen optischen Systems ist, welcher von B nach dem Bildraume zu folgt. Beim Fernrohr ist oft der Rand der Vorderlinse (des Objectivs) die Aperturblende,

1) Wenn die Iris vor der ersten Linse des Systems liegt, so ist sie mit der Eintrittspupille identisch.

das von dem Ocular entworfene Bild dieses Linsenrandes daher die Austrittspupille. Man sieht die Austrittspupille als reelles oder virtuelles Bild, wenn man das Instrument in genügender Entfernung vom Auge gegen einen hellen Hintergrund hält.

Unter Umständen kann aber auch die Iris des beobachtenden Auges die Aperturblende bilden, deren von der Hornhaut und Augenwasser entworfenes Bild die Pupille genannt wird. Nach diesem Falle ist die allgemeine Bezeichnung „Eintrittspupille“ und „Iris“ gewählt.

Die Lage der Pupillen ist, wie wir schon oben S. 59 sahen, von Wichtigkeit bei der Abbildung ausgedehnter Objecte durch enge Büschel. Soll das Bild dem Objecte ähnlich sein, so müssen die Mittelpunkte der Eintritts- bezw. Austrittspupille „orthoskopische“ Punkte sein. Ausserdem ist die Lage der Pupillen

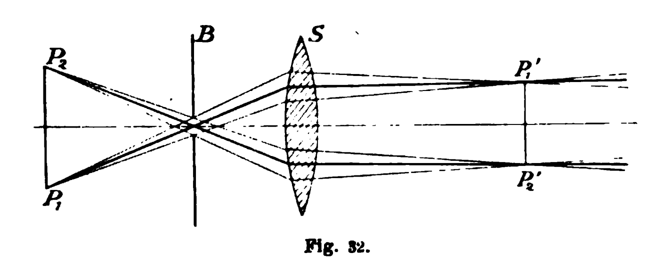


Fig. 32.

wesentlich für den Gang der Hauptstrahlen, d. h. der mittleren Strahlen der die Abbildung vermittelnden Büschel. Sind, was wir voraussetzen wollen, die Pupillen Kreise, deren Centren auf der Axe des abbildenden Systems liegen, so sind die von einem beliebig liegenden Object P bezw. seinem Bilde P' nach dem Mittelpunkt der Eintritts- bezw. Austrittspupille hinzielenden Strahlen die Hauptstrahlen der Object- bezw. Bildstrahlenbündel. Der Verlauf der Hauptstrahlen im abbildenden System bezeichnet man des Näheren als seinen Strahlengang.

2. Telecentrischer Strahlengang. Durch besondere Lage der „Iris“ kann man es erreichen, dass entweder die Eintritts- oder Austrittspupille (oder bei teleskopischer Abbildung beide zugleich) ins Unendliche rücken. Man braucht dazu nur die Iris in den hinteren Brennpunkt von S_1 oder in den anderen Brennpunkt von S_2 zu legen (vgl. oben Figur 31). Dieser Fall wird als „telecentrischer“ Strahlengang bezeichnet, und zwar der erstere als „tele-

centrisch nach der Objectseite", der letztere als „telecentrisch nach der Bildseite". Im ersteren Falle sind alle Hauptstrahlen des Objectraumes axenparallel, im letzteren alle Hauptstrahlen des Bildraumes. Figur 32 bezieht sich auf diesen Fall, d. h. auf einen telecentrischen Strahlengang nach der Bildseite. Die Iris B liegt im vorderen Brennpunkt der Linse S, welche von dem Object $P_1 P_2$ das reelle Bild $P_1' P_2'$ entwirft. Die von den Punkten P_1 und P_2 ausgehenden Hauptstrahlen sind stark gezeichnet, die Randstrahlen schwach. — Dieser Strahlengang ist vortheilhaft anzuwenden, wenn das Bild $P_1' P_2'$ auf einer mit Theilstrichen versehenen Pointirungsebene (Mikrometer) ausgemessen werden soll. Auch wenn sie nicht genau mit dem Bilde $P_1' P_2'$ zusammenfällt, so ergiebt sich doch immer dieselbe Bildgrösse, weil bei unscharfer Einstellung der Schnitt der Hauptstrahlen mit der Pointirungsebene als Ort des (unscharfen) Bildes aufgefasst wird. Wenn nun die Hauptstrahlen des Bildraumes axenparallel sind, so müssen auch die unscharfen Bilder auf der nicht genau eingestellten Mikrometerebene stets dieselbe Grösse behalten. Bei schiefem Gange der Hauptstrahlen würde aber die scheinbare Grösse des Bildes stark mit der Lage der Pointirungsebene wechseln.

Wenn man das System telecentrisch nach der Objectseite macht, so ist aus ähnlichem Grunde die Bildgrösse unabhängig von einer genauen Einstellung auf das Object. Dieser Strahlengang ist daher bei den Mikrometer-Mikroskopen vortheilhaft anzuwenden, während der erstere bei Fernrohren zu realisiren ist, bei denen die Object-Distanz immer gegeben ist (unendlich gross), aber das Ocularmikrometer verstellt werden kann.

3. Gesichtsfeld. Ausser der Blende B (Iris), welche selbst, bezw. deren optische Bilder Eintritts- bezw. Austrittspupille bilden, sind stets noch weitere Blenden oder Linsenränder vorhanden, welche die Grösse des abzubildenden Objectes, das Gesichtsfeld, bestimmen. Man findet diejenige Blende (die sogenannte Gesichtsfeldblende), welche hierfür massgebend ist, indem man wiederum von sämmtlichen Blenden ihre optischen Bilder construirt, die der Theil S_1 des ganzen optischen Systems entwirft, der zwischen Object und der betreffenden Blende liegt. Dasjenige Bild G_1 unter diesen, welches von der Mitte der Eintrittspupille aus unter dem kleinsten Winkel $2w$ erscheint, ist für das Gesichtsfeld bestimmend. Der Sehwinkel $2w$ heisst der Gesichtsfeldwinkel. Die Richtigkeit dieser Behauptung geht aus einer Zeichnung, z. B. Figur 31

auf S. 68, unmittelbar hervor. In dieser Figur sind ausser der Iris B noch die Ränder der Linsen S_1 und S_2 und das Diaphragma G als Blenden vorhanden. Das Bild der letzteren in Bezug auf S_1 ist G_1, und da wir annehmen wollen, dass G_1 von der Mitte der Eintrittspupille unter kleinerem Winkel erscheine, als der Rand von S_1 und das Bild, welches S_1 vom Linsenrand S_2 entwirft, so wirkt G als Gesichtsfeldblende. — Das optische Bild G_1', welches das ganze System $S_1 + S_2$ von G_1 entwirft, begrenzt das Gesichtsfeld im Bilde. Der Winkel $2w'$, unter dem G_1' von der Mitte der Austrittspupille aus erscheint, heisst der Bildwinkel.

In der Figur 31 ist angenommen, dass das Bild G_1 der Gesichtsfeldblende in die Ebene des abzubildenden Objectes P fällt. Dieser Fall zeichnet sich dadurch aus, dass dann das Gesichtsfeld scharf begrenzt ist, weil jeder Objectpunkt P entweder die Eintrittspupille vollständig mit Strahlen erfüllen kann, oder gar keine Strahlen zu denselben senden kann, da sie alle von G_1 aufgehalten werden. Wenn die Objectebene nicht mit dem objectseitigen Bilde G_1 der Gesichtsfeldblende zusammenfällt, so ist das Gesichtsfeld unscharf begrenzt, d. h. durch eine Zone continuirlich abnehmender Helligkeit. Denn dann giebt es nach dem Rande des Gesichtsfeldes zu offenbar Objectpunkte P, deren Strahlen die Eintrittspupille nur theilweise erfüllen können.

Bei Instrumenten, welche zur subjectiven Beobachtung dienen, ist es günstig, wenn die Pupille des Auges mit der Austrittspupille des Instrumentes zusammenfällt, damit das Gesichtsfeld möglichst ausgenutzt wird. Denn wenn die Augenpupille in einiger Entfernung von der Austrittspupille liegt, so kann erstere als Gesichtsfeldblende wirken und das Gesichtsfeld unter Umständen sehr einschränken. Die Austrittspupille wird daher auch oft als Augenkreis (Ocularkreis), ihr Mittelpunkt als Augenort bezeichnet.

Bisher ist der Einfluss der Blenden im Wesentlichen allein auf den geometrischen Verlauf des Strahlenganges discutirt, die Blenden haben nun aber auch noch die grösste Bedeutung für die Helligkeit der Bilder. Bei Betrachtung derselben verlassen wir den Boden der rein geometrischen Optik, wir wollen aber diese Betrachtungen hier einschalten, da ohne dieselben die Beschreibung der Wirkungsweise der verschiedenen optischen Instrumente zu unvollständig ausfallen würde.

4. Photometrische Grundsätze. Wir bezeichnen als Gesammtlichtmenge M einer Lichtquelle Q diejenige Lichtmenge,

welche Q auf irgend eine geschlossene, sie umgebende Fläche S sendet. Auf die speciellere Gestalt von S kommt es dabei nicht an, indem die Voraussetzung (oder besser Definition) gemacht wird, dass bei der Ausbreitung des Lichtes in einem vollständig durchsichtigen [1]) Medium die Gesammtlichtmenge weder verkleinert noch vergrössert wird.

Ebenso wird vorausgesetzt (definirt), dass die Lichtmenge constant bleibt für jeden Querschnitt einer Röhre, deren Seiten von Lichtstrahlen gebildet werden (Lichtröhre). [2]) Vernachlässigen wir bei einer Lichtquelle Q zunächst ihre seitliche Ausdehnung, d. h. setzen wir sie als punktförmig voraus, so sind die Lichtstrahlen gerade Linien, die vom Punkte Q ausgehen. Eine Lichtröhre ist also ein Kegel, dessen Spitze in Q liegt. Als Oeffnungswinkel (oder räumlicher Winkel) Ω des Kegels wird die Flächengrösse verstanden, welche der Kegel aus einer um seine Spitze als Centrum beschriebenen Kugel vom Radius 1 (1 cm) ausschneidet.

Fassen wir nun einen Elementarkegel von dem sehr kleinen räumlichen Winkel $d\Omega$ ins Auge, so ist die in ihm enthaltene Lichtmenge:

$$dL = K \cdot d\Omega. \tag{61}$$

Die Grösse K wird die Lichtstärke (Leuchtkraft) der Lichtquelle Q in Richtung der Kegelaxe genannt. Sie hat die physikalische Bedeutung, dass sie diejenige Lichtmenge bedeutet, welche Q auf die Flächeneinheit in der Einheit der Entfernung sendet, falls diese Fläche senkrecht zu den Lichtstrahlen liegt, denn dann ist $d\Omega = 1$.

Die Lichtstärke kann im Allgemeinen von der Richtung der Lichtstrahlen abhängen. Die Gesammtlichtmenge M drückt sich daher nach (61) aus durch

$$M = \int K \cdot d\Omega, \tag{62}$$

wobei das Integral ganz um die Lichtquelle Q herum zu summiren

1) Im Folgenden wird stets vollkommene Durchsichtigkeit des Mediums vorausgesetzt.

2) Die hier vorangestellten Definitionen ergeben sich als nothwendig, sowie man die Lichtmenge als die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt der Röhre hindurchgehende Energie auffasst. Solche tiefer gehende physikalische Vorstellungen sollen aber hier vermieden werden, um nicht zu sehr den Boden der geometrischen Optik zu verlassen.

ist. Falls K unabhängig von der Richtung der Lichtstrahlen wäre, so würde folgen

$$M = 4\pi K,$$

da die Summe der räumlichen Oeffnungen aller um Q befindlichen Elementarkegel gleich der Oberfläche einer um Q mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel ist, d. h. gleich 4π. Die mittlere Lichtstärke K_m wird definirt durch

$$K_m = \frac{\int K\,d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{M}{4\pi}. \tag{63}$$

Schneidet nun der Elementarkegel $d\Omega$ aus einer beliebig liegenden Fläche S ein kleines Stück dS heraus, dessen Normale den Neigungswinkel Θ mit der Kegelaxe bildet, und welches in der Entfernung r von der Spitze Q des Kegels, d. h. der Lichtquelle, liegt, so ergiebt eine einfache geometrische Betrachtung die Beziehung:

$$d\Omega \cdot r^2 = dS \cdot \cos\Theta. \tag{64}$$

Aus (61) folgt also für die auf dS fallende Lichtmenge:

$$dL = K\frac{dS \cdot \cos\Theta}{r^2}. \tag{65}$$

Die auf die Flächeneinheit fallende Lichtmenge wird die Beleuchtungsstärke B genannt. Aus (65) ergiebt sich für sie

$$B = K\frac{\cos\Theta}{r^2}, \tag{66}$$

d. h. die Beleuchtungsstärke ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung von der punktförmigen Lichtquelle und proportional dem Cosinus des Neigungswinkels der Normale der beleuchteten Fläche gegen die Lichtstrahlen.

Wenn die hier aufgestellten Definitionen wirklich brauchbar sind, so muss unserem Auge ein Schirm gleichhell beleuchtet erscheinen, wenn die Beleuchtungsstärke dieselbe ist. Das zeigt nun in der That der Versuch, wenn man mehrere gleiche Lichtquellen Q, sagen wir z. B. Stearinkerzen, auf ihre Beleuchtungswirkung hin prüft. Eine Kerze in 1 m Entfernung vor einem Schirm S lässt denselben nämlich in gleicher Helligkeit erscheinen, wie vier dicht zusammengestecllte Kerzen in 2 m Entfernung.

Wir besitzen daher ein einfaches Mittel, um Lichtstärken relativ zu vergleichen: Man lässt zwei Lichtquellen Q_1 und Q_2 in solchen Entfernungen r_1 und r_2 einen Schirm (bei gleichem Θ) be-

leuchten, dass die Beleuchtungsstärke auf ihm gleich erscheint. Dann verhalten sich die Lichtstrahlen K_1 und K_2 der beiden Lichtquellen wie die Quadrate der Entfernungen $r_1^2 : r_2^2$. Um eine solche Vergleichung scharf ausführen zu können, dient das Photometer. Das vollkommenste dieser Instrumente[1]) ist das von Lummer und Brodhun construirte.

Der wesentlichste Theil dieses Instrumentes ist ein Glaswürfel, der aus zwei mit ihren Hypothenusenflächen gut eben aufeinander abgeschliffenen rechtwinkligen Prismen A, B besteht (vgl. Figur 33). Nachdem an der Hypothenusenfläche des einen Prismas A durch

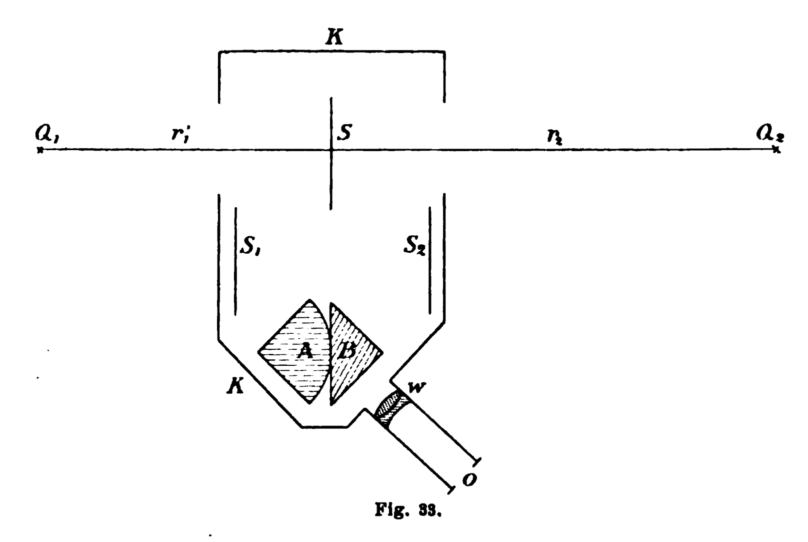


Fig. 33.

Anschleifen einer Kugelfläche die obere Glasschicht bis auf eine scharf begrenzte Kreisfläche entfernt ist, wird dieses Prisma so fest gegen das andere (B) gepresst, dass an der Berührungsstelle keine Luftschicht zwischen den Prismen bleibt. Ein Auge bei o, welches mit Hülfe einer Lupe w senkrecht zur Kathetenfläche des Prismas B blickt, erhält durchgehendes und totalreflectirtes Licht unmittelbar neben einander. Zwischen die beiden zu vergleichenden Lichtquellen Q_1 und Q_2 wird ein auf beiden Seiten gleich beschaffener Schirm S von weissem Gyps gestellt; das von S diffus

1) Eine vollständige Uebersicht über diese Instrumente, sowie überhaupt über die Grundsätze der Photometrie ist in Winkelmanns Handbuch d. Physik, Optik, S. 450 ff. (Autor Brodhun) gegeben.

ausgestrahlte Licht wird durch die beiden Spiegel S_1 und S_2 zu den Glaswürfeln A, B reflectirt. Sind die Beleuchtungsstärken beider Seiten von S einander gleich, so erblickt das Auge in o den Glaswürfel gleichmässig erhellt, d. h. die Figur, welche durchgehendes und reflectirtes Licht trennt, verschwindet. Die Lichtquellen Q_1 und Q_2 werden nun in solche Entfernungen r_1 und r_2 vom Schirm S gebracht, bis dass dieses Verschwinden der Trennungsfigur im Glaswürfel eintritt. — Um sich frei von einem Fehler zu machen, der durch etwaige Ungleichheit beider Seiten von S entstehen kann, ist es zweckmässig, eine zweite Messung auszuführen, bei der die Lage der beiden Lichtquellen Q_1 und Q_2 die umgekehrte ist, d. h. so, dass Q_1 rechts von S und Q_2 links von S steht. Der Schirm S ist mit den Spiegeln S_1, S_2 und dem Glaswürfel fest im Instrument durch den Kasten KK verbunden.

Als Lichteinheit, d. h. als diejenige Lichtstärke, auf welche alle anderen Lichtstärken bezogen werden, benutzt man meist entweder die 50 mm hohe Flamme der deutschen Vereins-Paraffinkerze, oder besser, weil mit viel grösserer Genauigkeit reproducirbar, das Hefnerlicht, eine durch v. Hefner-Alteneck eingeführte Lampe, die mit Amylacetat gespeist wird und deren Flammenhöhe 40 mm betragen soll.

Hat man die Lichtstärke irgend einer Lichtquelle gemessen, so berechnet sich die Beleuchtungsstärke an irgend einer Stelle nach (66). Die Maasseinheit der Beleuchtungsstärke ist die Meterkerze, d. h. diejenige Beleuchtungsstärke, welche eine Kerze in 1 m (horizontaler) Entfernung auf einen senkrecht gegen die Lichtstrahlen liegenden Schirm wirft. So z. B. bedeutet eine Beleuchtungsstärke von 50 Meter-Kerzen, welche beim Lesen gefordert wird, die gleiche Beleuchtungsstärke, welche 50 Kerzen in 1 m Entfernung auf dem senkrecht gegen das Licht gehaltenen Buche hervorbringen, oder 12—13 Kerzen in $^1/_2$ m Entfernung, oder 1 Kerze in $^1/_7$ m Entfernung.

Die Photometrirung verschiedenfarbigen Lichtes bietet grosse Schwierigkeiten. Nach Purkinje variirt die Helligkeitsdifferenz zweier verschieden gefärbter Flächen mit der Grösse der Beleuchtungsstärke.[1])

1) Selbst in dem Falle, dass beide Lichtquellen farblos erscheinen, aber aus verschiedenen Farben zusammengesetzt sind, kann die Photometrirung durch physiologische Einflüsse unsicher werden. Vgl. darüber A. Tschermak, Arch. f. ges. Physiologie, 70, S. 297, 1898.

Wenn wir die Lichtquelle Q nicht als sehr klein (punktförmig), sondern als Fläche auffassen müssen, so hängt die ausgestrahlte Lichtmenge nicht nur von der Grösse der Fläche, sondern auch von ihrer Neigung gegen die Lichtstrahlen ab.

Eine glühende Metallkugel erscheint dem Auge gleichmässig hell. In allen Elementarkegeln von gleichem Oeffnungswinkel $d\omega$, deren Spitze im Auge liegt, und die die Metallkugel treffen, muss daher ein und dieselbe Lichtmenge enthalten sein. Da nun aber [vgl. dazu die frühere Formel (64)] diese Kegel aus der Metallkugel ein Flächenstück ds der Grösse

$$ds = \frac{d\omega \, . \, r^2}{\cos \vartheta} \tag{67}$$

herausschneiden, falls ϑ den Neigungswinkel von ds gegen die Kegelaxe bezeichnet, so ist das Flächenstück, welches die gleiche Lichtmenge liefert, um so grösser (proportional mit $1 : \cos \vartheta$), je schiefer es zu den Lichtstrahlen liegt.

Wir erhalten daher für die Lichtmenge dL, welche ein Flächenelement ds einem anderen Flächenelement dS zustrahlt, durch Berücksichtigung der früheren Formel (65):

$$dL = \frac{i \, . \, ds \, . \, dS \, . \, \cos \vartheta \, . \, \cos \Theta}{r^2} \, . \tag{68}$$ [1]

Dabei bezeichnet r die Entfernung der beiden Flächenelemente von einander und ϑ, Θ die Neigungen der Normalen von ds und dS gegen ihre Verbindungslinie. i wird die specifische Lichtintensität der Fläche ds genannt. Dieselbe ist also diejenige Lichtmenge, welche die Flächeneinheit einer um die Längeneinheit entfernten anderen Flächeneinheit zustrahlt, falls beide Flächenstücke senkrecht zu ihrer Verbindungsstrecke liegen.

In der Formel (68) ist ihre Symmetrie in Bezug auf das strahlende und das bestrahlte Flächenstück beachtenswerth. Diese Symmetrie kann man in die Worte fassen: Die Lichtmenge, welche ein Flächenstück der Intensität i einem anderen Flächenstück zustrahlt, ist dieselbe, als ob letzteres mit der Intensität i dem ersteren Flächenstück Licht zustrahle.

---

1) Diese Formel, welche oft kurz das Cosinusgesetz der Strahlung genannt wird, ist aber nur angenähert richtig. Streng genommen variirt i stets etwas mit ϑ, bei verschiedenen Körpern in verschiedener Weise. Es wird davon noch einmal später bei Besprechung des Kirchhoff'schen Gesetzes (III. Abschnitt, Kapitel II) die Rede sein. — Wir wollen aber hier mit der Näherungsformel weiter rechnen, d. h. i als constant annehmen,

Wir können die Formel (68) in eine einfachere Gestalt bringen, wenn wir den räumlichen Oeffnungswinkel $d\Omega$ einführen, unter dem dS von ds aus erscheint. $d\Omega$ steht nämlich mit dS in der durch die Gleichung (64) angegebenen Beziehung. Es lässt sich daher (68) auch so schreiben:

$$dL = i \cdot ds \cdot \cos\vartheta \cdot d\Omega. \tag{69}$$

Andererseits kann man aber auch den räumlichen Oeffnungswinkel $d\omega$ einführen, unter dem ds von dS aus erscheint; seine Grösse ist nach (67) gegeben. Daher wird:

$$dL = i \cdot dS \cdot \cos\Theta \cdot d\omega. \tag{70}$$

Die Lichtintensität i steht in einer leicht angebbaren Beziehung zur Gesammtlichtmenge M, welche die Fläche ds ausstrahlt.

Zunächst ergiebt ein Vergleich der Formeln (61) und (69), dass die Lichtstärke K der Fläche ds in einer Richtung, die den Winkel ϑ mit ihrer Normalen bildet, den Werth hat

$$K = i\, ds \cos\vartheta. \tag{71}$$

Wir wollen nun zunächst die Lichtmenge berechnen, welche enthalten ist zwischen zwei Kegeln, deren erzeugende Gerade den Winkel ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ mit der Normale auf ds bilden. Den zwischen beiden Kegeln enthaltenen Raum kann man ansehen als einen ringförmigen Elementarkegel der Oeffnung

$$d\Omega = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta, \tag{72}$$

denn er schneidet aus einer Kugel vom Radius 1 einen Kreisring der Breite $d\vartheta$ und vom Radius $\sin\vartheta$ aus. Nach den Formeln (69) und (72) ist daher die im ringförmigen Elementarkegel enthaltene Lichtmenge

$$dL = 2\pi\, i\, ds \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta.$$

In einem endlichen Kegel, dessen erzeugende Gerade den Winkel U mit der Normale auf ds einschliessen, ist daher die Lichtmenge enthalten:

$$L = 2\pi\, i\, ds \int_0^U \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta = \pi\, i\, ds \sin^2 U. \tag{73}$$

Um die Gesammtlichtmenge M zu finden, ist hierin $U = \pi/2$ zu setzen und das Resultat mit 2 zu multipliciren, falls das Flächenelement ds nach beiden Seiten mit der Intensität i strahlt. Dies giebt

$$M = 2\pi\, i\, ds. \tag{74}$$

5. Die Intensität und Beleuchtungsstärke optischer Bilder. Auf der Axe eines centrirten optischen Systems liege ein senkrecht zur Axe stehendes Flächenelement ds, welches mit der Intensität i leuchte. Bezeichnet U den Winkel, den die Randstrahlen, d. h. die von ds zum Rande der Eintrittspupille hinzielenden Strahlen mit der Axe des Systems bilden, so ist nach (73) die Lichtmenge, welche in das System gelangt

$$L = \pi\, i\, ds\, sin^2\, U. \tag{75}$$

Dieselbe ist also um so grösser, je grösser U, d. h. je grösser die Eintrittspupille des Systems ist. Wenn nun ds' das optische Bild von ds ist, und U' der Winkel, den die Randstrahlen des Bildes, d. h. die vom Rande der Austrittspupille zum Bilde hinzielenden Strahlen, mit der Axe des Systems machen, so wollen wir zunächst nach der Intensität i' des optischen Bildes fragen. Nach der Formel (73) würde die Lichtmenge, welche vom Bilde ausstrahlt, gegeben sein durch

$$L' = \pi\, i'\, ds'\, sin^2\, U'. \tag{76}$$

Nun kann aber L' höchstens gleich L sein, falls nämlich Lichtverluste durch Reflexion und Absorption ganz ausgeschlossen wären, da dann nach der Festsetzung der S. 72 die Lichtmenge innerhalb einer Lichtröhre constant bleibt. Setzen wir den günstigsten Fall voraus, so folgt aus (75) und (76):

$$i' = i\, \frac{ds\, sin^2\, U}{ds'\, sin^2\, U'}. \tag{77}$$

Wenn nun aber ds' das optische Bild von ds ist, so folgt aus dem Sinussatz [Formel (46) S. 58]

$$\frac{ds\, sin^2\, U}{ds'\, sin^2\, U'} = \frac{n'^2}{n^2}, \tag{78}$$

falls n der Brechungsindex des Objectraumes und n' der Brechungsindex des Bildraumes ist. Daher ergiebt sich aus (77)

$$i' = i\, \frac{n'^2}{n^2}. \tag{79}$$

Sind die Brechungsindices des Bild- und Objectraumes einander gleich, so ist also die Intensität des optischen Bildes höchstens gleich der Intensität des Objectes.

Wenn wir also z. B. durch ein Brennglas ein reelles Sonnenbild entwerfen, so ist die Intensität in ihm nicht gesteigert gegen-

über der der Sonne. Trotzdem ist aber die Beleuchtungsstärke durch das Brennglas sehr verstärkt, um so mehr, je grösser seine Oeffnung und je kürzer seine Brennweite ist. Die Beleuchtungsstärke B wird erhalten, indem man in (76) L' durch ds' dividirt. Falls $n = n'$, so folgt daher aus (76) $B = \pi\, i\, sin^2\, U'$. Die Verstärkung der Beleuchtungsstärke durch das System wird am anschaulichsten, wenn wir bedenken, dass alle Lichtröhren, welche durch das Bild ds' gehen, auch durch die Austrittspupille hindurchtreten. Die gesammte Lichtmenge, welche im Bilde ds' vereinigt wird, ist daher nach dem Lehrsatz der S. 76 dieselbe, als ob die ganze Austrittspupille mit der Intensität i der Sonne dem Elemente ds' Licht zustrahle. Die Wirkung des Brennglases ist also ganz dieselbe, als ob das Element ds' ohne Brennglas der Sonne so nahe gebracht wäre, dass sie von ds' aus unter demselben Sehwinkel erscheint, wie die Austrittspupille (freie Oeffnung) des Brennglases von ihrem Brennpunkte aus.

Dieselbe Betrachtung gilt für jedes optische Instrument, alle Vorrichtungen zur Lichtconcentration können nur das Ziel verfolgen, mit Hülfe einer gegebenen Lichtquelle von kleinen Dimensionen oder an einem sehr entfernten Orte dennoch einen solchen Effect zu bewirken, wie er ohne Vorrichtung direct nur durch eine gleich intensive, ausgedehntere oder in grösserer Nähe befindliche Lichtquelle erreichbar wäre.

Im Falle, dass n und n' von einander verschieden sind, kann man eine Steigerung der Intensität des optischen Bildes erreichen, wenn $n < n'$ ist. Dies ist z. B. der Fall bei den Immersionssystemen der Mikroskope, falls das Licht einer Quelle Q im Medium $n = 1$ durch ein Sammellinsensystem (Condensor) vor dem Objectiv in einem Raume von grösserem Brechungsindex n (Immersionsflüssigkeit) vereinigt wird. Die Lichtmenge, welche in das Mikroskop hineingelangt, ist daher proportional mit $n^2\, sin^2\, U$, wobei U den Randstrahlwinkel zur Eintrittspupille bedeutet. Das Product

$$n\, sin\, U = a \tag{80}$$

wird nach Abbe die numerische Apertur des Instrumentes genannt. Die aufgenommene Lichtmenge ist also proportional dem Quadrate der numerischen Apertur. — Die Intensität im optischen Bilde, welches wiederum in Luft ($n = 1$) liegt, ist natürlich höchstens gleich der Intensität der Lichtquelle Q.

6. Die subjective Helligkeit optischer Bilder. Man hat zu

unterscheiden zwischen der (objectiven) Beleuchtungsstärke, welche von einer leuchtenden Fläche s an einem Orte O hervorgebracht wird, und der (subjectiven) Helligkeit, mit welcher eine solche Fläche von einem Beobachter gesehen wird. Die Lichtempfindung wird durch die Bestrahlung kleiner lichtempfindlicher Elemente auf der Netzhaut im Auge vermittelt. Wenn es sich um eine leuchtende Fläche s handelt, so ist ihr Bild auf der Netzhaut ebenfalls eine kleine Fläche s', welche sehr viele lichtempfindliche Elemente erregt. Wir definiren nun als Helligkeit der Fläche s die Lichtmenge, welche auf die Flächeneinheit der Netzhaut fällt, d. h. die Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut.

Betrachten wir nun zunächst die Lichtquelle ohne Zwischenschaltung eines optischen Systems vor das Auge, so ist letzteres selbst als ein optisches System aufzufassen, für welches die früheren Betrachtungen gelten. Die Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut wird also aus den Formeln (76), (79) erhalten, mit der Berücksichtigung, dass hier die Brechungsexponenten n des Objectraumes und des Bildraumes n' (hintere Augenkammer) im Allgemeinen von einander verschieden sind. Daher wird die Helligkeit H_0 ohne Zwischenschaltung eines optischen Instrumentes und unter der Annahme, dass die Lichtquelle im Medium des Brechungsindex $n=1$ strahle, die sogenannte natürliche Helligkeit:

$$H_0 = \pi\, i\, n'^2 \sin^2 W_o'. \tag{81}$$

Hierin bezeichnet i die Intensität der Lichtquelle, falls man von Lichtverlusten beim Durchgang der Strahlen durchs Auge absieht. W_o' ist der Winkel, den die vom Mittelpunkte des Bildes auf der Netzhaut nach dem Rande der Pupille (strenger nach dem Rande des von der Krystalllinse des Auges entworfenen Bildes der Irisöffnung) hinzielenden Strahlen mit der Augenaxe bilden, d. h. es ist $2W_o'$ der Projectionswinkel im Auge (vgl. oben S. 68). Wenn die Pupillengrösse constant bleibt, so ist W_o' ebenfalls constant. Die Helligkeit H_0 hängt dann also nur von der Intensität i der Lichtquelle ab, ist aber von der Entfernung derselben vom Auge gänzlich unabhängig.

In der That entspricht dies auch innerhalb gewisser Grenzen dem physiologischen Eindruck. Bei sehr grosser Annäherung an die Lichtquelle, bei der das optische Bild auf der Netzhaut erheblich grösser wird, empfindet man allerdings eher den Eindruck der Blendung, was man als ein Wachsen des Helligkeitseindrucks

ansehen kann. — Bei Verkleinerung der Pupille wird W_o' kleiner, daher auch H_0 geringer.

Schalten wir nun ein optisches Instrument vor das Auge, so kann ersteres inclusive letzterem in Summa wiederum als ein einziges System aufgefasst werden, für welches die früheren Betrachtungen gelten. Es soll das Auge an den Ort der Austrittspupille des Instrumentes gebracht werden, was nach S. 71 zur möglichsten Ausnutzung des Gesichtsfeldes günstig ist. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Austrittspupille des Instrumentes ist grösser oder mindestens gleich der Augenpupille. Dann ist der Projectionswinkel $2W'$ des Bildes im Auge durch die Augenpupille bestimmt, d. h. es ist $W' = W_o'$. Für die Helligkeit gilt die Formel (81), wobei i höchstens gleich der Intensität der Lichtquelle ist, wenn man nämlich von allen Lichtverlusten im Instrumente und im Auge absähe, und falls die Lichtquelle, wie bei (81) vorausgesetzt war, in einem Medium vom Brechungsindex $n = 1$ strahlt. Ist dieser Brechungsindex von 1 verschieden, so wäre H noch durch n^2 zu dividiren. Dieser Fall ist aber bei den gebräuchlichen Instrumenten nie realisirt. Die eigentliche Lichtquelle liegt stets in Luft, oder (z. B. bei der Sonne) im Weltraum; für die Immersionssysteme der Mikroskope z. B. gilt dies ebenfalls, denn die Lichtquelle ist nicht das in der Immersionsflüssigkeit eingebettete Object, sondern dies wird nur durchleuchtet. Der Selbstleuchter ist der helle Himmel, die Sonne, eine Lampe etc. Wir wollen also stets an der Annahme festhalten, dass die Lichtquelle in einem Medium des Brechungsindex $n = 1$ strahle, und erhalten so das Resultat: Die Helligkeit des optischen Bildes, welches das Instrument liefert, ist gleich der natürlichen Helligkeit der Lichtquelle, falls keine Lichtverluste durch Reflexion und Absorption im Instrument einträten.

2. Die Austrittspupille des Instrumentes ist kleiner als die Augenpupille. Dann gilt für die Helligkeit H die zu (81) analoge Formel

$$H = \pi i\, n'^2 \sin^2 W', \tag{82}$$

wobei i höchstens gleich der Intensität der Lichtquelle ist (bei Absehen von Reflexionsverlusten im Instrument), und worin $2W'$ der Projectionswinkel des Bildes im Auge ist. Nun ist aber $W' < W_o'$, d. h. die Helligkeit des optischen Bildes ist

kleiner als die natürliche Helligkeit der Lichtquelle. Das Verhältniss beider Helligkeiten folgt aus (81) und (82) zu:

$$H : H_0 = sin^2\, W' : sin^2\, W_0'. \tag{83}$$

Da nun W_0' und um so mehr W' kleine Winkel sind (beim menschlichen Auge ist W_0' etwa 5^0), bei denen man den *sin* mit *tg* vertauschen kann, so ist die rechte Seite von (83), d. h. das Verhältniss der Helligkeit des Bildes zur natürlichen Helligkeit der Lichtquelle, gleich dem Verhältniss der Grösse der Austrittspupille des Instrumentes zu der Grösse der Augenpupille (dem von der Hornhaut und vorderen Augenkammer entworfenen Bilde der Iris-Oeffnung). — Zusammenfassend können wir also sagen: Bei flächenhaft ausgedehnten Objecten kann jedes optische Instrument nur das Ziel verfolgen, das Object dem Auge im Bilde unter vergrössertem Sehwinkel darzubieten, aber in höchstens der gleichen Helligkeit.

Diese Resultate hätte man auch in folgender Weise erhalten können. Nach dem Satze der S. 78 ist die Intensität des Bildes gleich der der Lichtquelle (bei $n = n' = 1$ und bei Vernachlässigung der Reflexions- und Absorptionsverluste im Instrument). Das optische Instrument bewirkt also nur eine scheinbare Ortsveränderung der Lichtquelle. Da nun aber die Helligkeit derselben von ihrem Orte nach dem Satze der S. 80 ganz unabhängig ist, solange die ganze Pupille des Auges von Lichtstrahlen angefüllt wird, so ist die Helligkeit des Bildes gleich der natürlichen der Lichtquelle. Falls aber die Austrittspupille kleiner als die Augenpupille ist, so wird letztere nicht ganz von Lichtstrahlen erfüllt, d. h. die Helligkeit des Bildes muss kleiner sein als die natürliche Helligkeit. Das Verhältniss ergiebt sich in diesem Falle wie es vorhin festgestellt wurde, da die Neigungen der Bildstrahlen gegen die Axe bei den Entfernungen des Bildes vom Auge, auf denen man noch mit dem Auge deutlich sehen kann, sehr klein sind.

Befindet sich das Bild ds' einer leuchtenden Fläche ds in der Entfernung δ von der Austrittspupille (d. h. auch vom Auge, da dies an den Ort der Austrittspupille gebracht sein soll), so ist $\delta\, tg\, U'$ der Radius der Austrittspupille, wobei $2\,U'$ der Projectionswinkel des Bildes (in Luft) ist. Man erhält daher, bei Vertauschung des $sin\, U'$ mit $tg\, U'$ für das Verhältniss der Helligkeit H des Bildes zur natürlichen Helligkeit H_0 der Lichtquelle,

falls die Austrittspupille kleiner als die Augenpupille ist, deren Radius p sei:

$$\frac{H}{H_0} = \frac{\delta^2 \sin^2 U'}{p^2}.$$

Nun ist nach dem Sinussatz [vgl. Formel (78)] zu schreiben (am Bildorte ist der Brechungsindex $n' = 1$):

$$\frac{H}{H_0} = \frac{\delta^2 n^2 \sin^2 U}{p^2} \cdot \frac{ds}{ds'}, \tag{84}$$

wobei ds das zu ds' conjugirte Flächenelement ist, dessen Randstrahlen den Winkel U mit der Axe des Instrumentes bilden. n sei der Brechungsindex am Orte von ds, es ist also $n \sin U = a$ [Formel (80)] gleich der numerischen Apertur des Systems. $ds' : ds$ ist das Quadrat der Lateralvergrösserung des Instrumentes. Bezeichnet man dieses mit V, so wird (84) zu

$$\frac{H}{H_0} = \frac{\delta^2 a^2}{p^2 V^2}. \tag{85}$$

Diese Formel gilt also nur, solange $H < H_0$ ist. Sie zeigt deutlich den Einfluss der numerischen Apertur auf die Bildhelligkeit und ist bei der Theorie des Mikroskops von grosser Bedeutung.

Man nennt die Normalvergrösserung eines optischen Instrumentes diejenige, bei der seine Austrittspupille gleich der Augenpupille ist, bei der also die Bilder gerade noch die natürliche Helligkeit der Lichtquelle besitzen. Nimmt man den Radius p der Pupille zu 2 mm an, die Distanz δ des Bildes vom Auge zu 25 cm (deutliche Sehweite), so folgen aus (85) für verschiedene numerische Aperturen folgende Normalvergrösserungen V_n:

$$a = 0{,}5 \qquad V_n = 62$$
$$a = 1{,}0 \qquad V_n = 125$$
$$a = 1{,}5 \qquad V_n = 187.$$

Für die doppelten Vergrösserungen $V = 2 \cdot V_n$ ist die Helligkeit H der vierte Theil der natürlichen Helligkeit H_0. Man kann diese Vergrösserungen etwa als Grenze für die unverminderte Deutlichkeit des Bildes ansehen. Bei $a = 1{,}5$ wäre dies also etwa eine 380fache Vergrösserung. Bei einer 1000fachen Vergrösserung und der Apertur $a = 1{,}5$ ist die Helligkeit H der 27. Theil der natürlichen Helligkeit H_0.

Für Fernrohre ist die Formel (85) praktisch etwas umzugestalten. Ist nämlich h der Radius der freien Oeffnung des Fernrohrs (Radius seines Objectivs), so ist nach Formel (14') auf S. 27

der Radius seiner Austrittspupille gleich $h : \Gamma$, wobei Γ die (Angular-)Vergrösserung des Fernrohrs ist. Daher wird das Verhältniss von Austrittspupille zu Augenpupille:

$$\frac{H}{H_0} = \frac{h^2}{p^2 \Gamma^2}. \tag{86}$$

Für die Normalvergrösserung Γ_n eines Fernrohrs muss also das Objectiv den Radius $p \cdot \Gamma_n$ besitzen, d. h. 2, 4, 6, 8 etc. mm, falls die Normalvergrösserung den Werth 1, 2, 3, 4 etc. hat und p zu 2 mm angenommen wird. Für die Normalvergrösserung 100 muss also z. B. das Objectiv einen Radius von 20 cm besitzen.

7. Die Helligkeit punktförmiger Lichtquellen. Die Gesetze für die Lichtstärke optischer Bilder von flächenhaften Objecten gelten nicht mehr, wenn punktförmige Objecte, wie z. B. Fixsterne, zur Abbildung gelangen. Ihr Netzhautbild ist nämlich (wegen Beugung am Pupillenrande) immer von gleicher Grösse, die nur vom Pupillendurchmesser abhängt. (Vgl. dazu die Entwickelungen Kapitel IV des I. Abschnittes der physikal. Optik.) Solange der Sehwinkel eines Objectes etwa eine Winkelminute nicht überschreitet, ist es in diesem Sinne als punktförmig aufzufassen.

Die Helligkeit punktförmiger Lichtquellen P wird bestimmt durch die Lichtmenge, welche von P ins Auge gelangt. Die natürliche Helligkeit H_0 ist daher proportional der Grösse der Pupille und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung P vom Auge. — Bei Betrachtung mit Hülfe eines optischen Instrumentes gelangt alles Licht von P, welches durch die Eintrittspupille des Instrumentes tritt, in das Auge, falls die Austrittspupille kleiner als die Augenpupille ist, d. h. wenn die Normalvergrösserung des Fernrohrs überschritten wird. Bildet daher der Rand des Objectivs seine Eintrittspupille, so ist die Helligkeit einer sehr entfernten[1]) Lichtquelle (Stern) im Verhältniss der Grösse des Objectivs zur Augenpupille verstärkt gegenüber der natürlichen Helligkeit.

Wenn aber die Normalvergrösserung des Fernrohrs noch nicht erreicht ist, d. h. wenn seine Austrittspupille grösser als die Augenpupille ist, so bildet letztere bei Benutzung des Instrumentes seine Austrittspupille, das vom Fernrohr entworfene Bild der Augenpupille ist seine Eintrittspupille. Nach Formel (14′) auf S. 27 ist letztere Γ^2mal grösser als die Augenpupille, falls Γ die Ver-

1) Die Lichtquelle soll in einer solchen Entfernung liegen, dass ihr gegenüber die Fernrohrlänge zu vernachlässigen ist.

grösserung des Fernrohrs bezeichnet. Daher ist die Helligkeit des Sternes Γ^2 mal grösser als die natürliche Helligkeit.

Da man also die Helligkeit von Sternen bei Betrachtung mit einem Fernrohr vergrössern kann, während die Helligkeit ihres Hintergrundes nicht vergrössert, sondern eventuell (bei Ueberschreitung der Normalvergrösserung) verringert wird, so hebt sich im Fernrohr der Stern deutlicher vom Hintergrunde ab und kann eventuell (bei grossen Fernrohren) bei Tage gesehen werden.

8. Die Bedeutung der Apertur für die Leistungsfähigkeit optischer Instrumente. Bisher ist die Bedeutung der Apertur für den geometrischen Verlauf des Strahlenganges und für die Bildhelligkeit behandelt worden. Die Apertur ist aber drittens auch noch bestimmend für die Leistungsfähigkeit des Instrumentes, d. h. sein Vermögen, zwei Gegenstände, welche das unbewaffnete Auge nicht zu unterscheiden vermag, optisch zu trennen. Schon oben S. 50 ist darauf hingewiesen, dass sehr enge Strahlenbüschel wegen sogenannter Beugungserscheinungen schlechte Bilder liefern. Das Auftreten derselben ist bestimmend für die Grenze der Leistungsfähigkeit optischer Instrumente, und es ist von vornherein klar, dass diese Grenze aus diesem Grunde um so weiter hinausgeschoben werden kann, je weiter die die Abbildung vermittelnden Strahlenbüschel sind, d. h. je grösser die Apertur des Instrumentes ist. Die zahlenmässigen Beziehungen, welche man hier aufstellen kann, sollen aber erst später in dem Kapitel über die Beugung des Lichtes hergeleitet werden. Vorgreifend soll hier nur bemerkt werden, dass durch das Mikroskop zwei Objectpunkte der gegenseitigen Distanz d noch optisch getrennt werden können, falls ist:

$$d \geqq \frac{\lambda}{2a}, \tag{87}$$

wobei λ die (später definirte) Wellenlänge des Lichtes in Luft, a die numerische Apertur des Mikroskops ist. Das Fernrohr kann zwei Objecte noch optisch auflösen, falls sie unter einem Sehwinkel φ erscheinen, der gegeben ist durch

$$\varphi \geqq 0{,}6\,\frac{\lambda}{h}, \tag{88}$$

wobei h der Oeffnungsradius des Fernrohrs ist.

Kapitel V.

Optische Instrumente.[1]

1. Photographische Systeme. Bei der Landschaftsphotographie soll das optische System auf der lichtempfindlichen Platte ein reelles Bild von dem weit ausgedehnten Objectraum entwerfen. Die Oeffnung der abbildenden Strahlenbüschel ist verhältnissmässig eng. Schon früher (S. 59) ist auf die Bildfehler hingewiesen, welche hierbei hauptsächlich zu vermeiden sind. Auch ist dort der Vortheil der symmetrischen Doppelobjective besprochen, sowie der Einfluss geeignet gestellter Blenden zur Erreichung der Bildähnlichkeit. Doch auch für die Ebnung des Bildes kann die Lage der Blende von Einfluss sein.

Eine möglichste Ebnung des Bildes kann nun auch bei zwei auf einander gelegten dünnen Linsen der Brennweiten f_1 und f_2 und der Brechungsindices n_1 und n_2 erreicht werden, falls die Bedingung[2]) erfüllt ist:

$$n_1 f_1 = - n_2 f_2. \tag{1}$$

Die Bedingung der Achromasie lautete nach Formel (54) S. 65 für zwei dünne Linsen:

$$\nu_2 f_1 = - \nu_1 f_2. \tag{2}$$

Beide Bedingungen (1) und (2) können nur dann gleichzeitig erfüllt werden, wenn die Linse mit grösserem Brechungsindex n das kleinere Dispersionsvermögen ν besitzt. Früher hatte man nur Glassorten, welche diese Bedingung nicht erfüllten, d. h. welche bei höherem Brechungsindex auch stärkere Dispersion besassen; das schwach brechende Crownglas besass eine geringe Dispersion, das stark brechende Flintglas eine hohe Dispersion. Erst die neueren von Schott in Jena hergestellten Gläser zeigen zum Theil auch das umgekehrte Verhalten,[3]) und seitdem ist es möglich, mit

1) Betreffs ausführlicherer Darstellung vgl. Hdb. d. Physik von Winkelmann, Optik, S. 203 ff. (Autor Czapski). — Müller-Pouillet, Physik, 9. Aufl. Optik, S. 721 ff. (Autor Lummer).

2) Ueber die Herleitung dieser schon von Petzval im Jahre 1843 ausgesprochenen Bedingung vgl. Lummer, Ztschr. f. Instrumentenkunde 1897, S. 231, wo überhaupt in drei Arbeiten (S. 208, 225, 264) eine vorzügliche Uebersicht über die photographische Optik gegeben ist.

3) Die Baryumsilicatgläser haben stärkere Brechung als das gewöhnliche Crownglas, aber geringere Dispersion.

der Achromasie zugleich die Ebnung des Bildes zu erreichen. Solche Linsensysteme werden Neuachromate im Gegensatz zu den früheren (Altachromaten) genannt.

Auch noch aus einem anderen Grunde bietet die Anwendung der neuen Glassorten, welche mit wachsendem n kleinere Dispersion ν besitzen, Vortheile für die photographische Optik: Verbindet man einen Altachromaten mit einem Neuachromaten, so lässt sich der Astigmatismus heben, weil ersterer mit seiner dispansiv wirkenden Kittfläche eine astigmatische Differenz von entgegengesetztem Vorzeichen erzeugt, als letzterer mit seiner collectiv wirkenden Kittfläche. Solche symmetrische Doppelobjective, welche auf beiden Seiten alt- und neuachromatische Combinationen besitzen, heissen Anastigmat [1])-Aplanate.

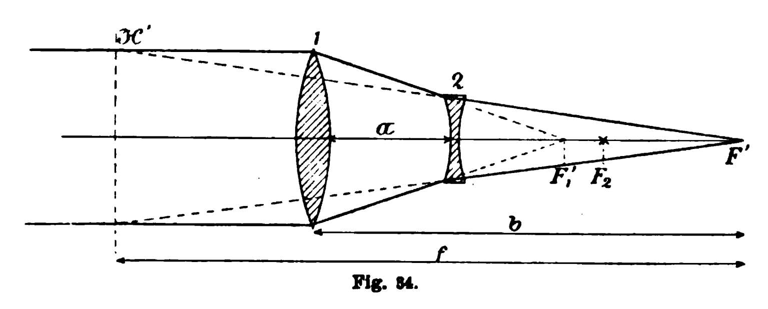


Fig. 34.

Um ferne Gegenstände möglichst gross abzubilden, muss die Brennweite f des Systems möglichst gross sein. Dadurch wird aber eine unbequeme Verlängerung der photographischen Camera erzielt, falls das System aus nahe zusammenstehenden Linsen besteht, da dann annähernd die Cameralänge b gleich der Brennweite f sein muss. Man kann diesen Uebelstand vermeiden durch das sogenannte Teleobjectiv, bei welchem ein Collectivsystem mit einem im Abstand a von ihm befindlichen Dispansivsystem verknüpft ist. Das letztere entwirft nach der Figur 22 auf S. 41 aufrechte, reelle, vergrösserte Bilder von virtuellen Objecten, die hinter der Dispansivlinse, aber noch vor ihrem hinteren Brennpunkte F_2 liegen. Dort muss also der Brennpunkt F_1' des vorderen Collectivsystems liegen. Wie der in Figur 34 gezeichnete Strahlengang ergiebt, ist die Brennweite f des ganzen Systems grösser als

1) An Stelle der zweifachen Negationen in „Anastigmat" wäre das Wort „Stigmat" einfacher.

die Distanz des Collectivsystems vom Bildorte, d. h. der Cameralänge. Um z. B. bei einer Cameralänge von 20 cm (genauer 19,85 cm) eine Brennweite f von 37 cm benutzen zu können, muss man mit einer Sammellinse von 10 cm Brennweite eine Dispansivlinse von 5 cm Brennweite im optischen Intervall Δ von 1,35 cm, d. h. im Abstand 6,35 cm hinter der Sammellinse combiniren. Diese Zahlen ergeben sich aus den auf S. 28, 29 ermittelten Formeln (17) und (19) eines combinirten Systems.

Bei der Porträtlinse wird das Hauptgewicht auf die Oeffnung gelegt, um möglichste Lichtstärke zu erzielen. Es muss demnach vor allem die sphärische Aberration gehoben und ebenfalls die Sinusbedingung erfüllt sein.

2. Die Lupe. Die scheinbare Grösse eines Gegenstandes hängt von der Grösse des Sehwinkels ab, unter welchem derselbe erscheint. Durch Annäherung des Gegenstandes an das Auge kann man den Sehwinkel vergrössern, aber nur bis zu einer gewissen Grenze, da der Gegenstand innerhalb der Weite des deutlichen Sehens liegen muss. Durch Anwendung einer Lupe lässt sich aber der Sehwinkel noch weiter vergrössern.

Die einfachste Form der Lupe ist eine Sammellinse. Dieselbe entwirft (vgl. Figur 21 auf S. 41) von einem Objecte, welches zwischen vorderem Brennpunkt und Linse liegt, ein aufrechtes, vergrössertes, virtuelles Bild. Soll dasselbe in der Entfernung $\delta = 25$ cm vom Auge liegen, so ist nach Formel (7) auf S. 20 die Vergrösserung Γ der Lupe

$$\Gamma = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{f} = \frac{\delta + a}{f}, \tag{3}$$

worin x' die Entfernung des Bildes vom hinteren Brennpunkte, a die Entfernung des Auges von demselben bezeichnet. Meist kann man a gegenüber δ vernachlässigen, man erhält dann als Vergrösserung der Lupe

$$\Gamma = \frac{\delta}{f}. \tag{4}$$

Dieselbe ist also umgekehrt proportional zur Brennweite der Lupe.

Wenn die Lupenlinse grösseren Durchmesser besitzt als das von der Lupe entworfene Bild der Augenpupille, so bildet letztere die Aperturblende, erstere die Gesichtsfeldblende. Zur Erreichung eines möglichst grossen Gesichtsfeldes ist es daher nothwendig, das Auge der Lupe möglichst nahe zu bringen. Mit wachsender Entfernung des Auges wird nicht nur das Gesichtsfeld beschränkter,

sondern auch der Strahlengang (vgl. oben S. 69) ein anderer, indem dann seitliche Objectpunkte durch seitliche Partien der Lupenlinse abgebildet werden. Dies ergiebt sich direct aus einer Zeichnung der Eintrittspupille des Systems, d. h. des Bildes, welches die Lupe von der Augenpupille entwirft. Dadurch wird dann auch meist die Orthoskopie (vgl. oben S. 69) zerstört, d. h. das Bild erscheint am Rande verzerrt.

Eine einfache planconvexe Linse giebt gute Bilder bis zu achtfacher Vergrösserung, d. h. bis zur Brennweite von 3 cm herunter. Man muss dabei die plane Seite der Linse dem Auge zukehren. Diese Stellung giebt zwar, da das Object nahe beim vorderen Brennpunkt der Linse liegt, relativ grossen Betrag der





Fig. 35.

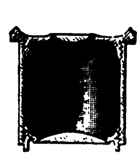


Fig. 36.

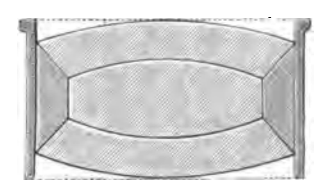


Fig. 37.

sphärischen Aberration in der Axe (vgl. oben S. 53), ist aber trotzdem günstiger als die umgekehrte Stellung der Linse wegen der erheblich geringeren Fehler ausserhalb der Axe.

Durch die Anwendung zweier einfacher Linsen wird das Bild wesentlich verbessert, weil durch Vertheilung der Brechung auf mehrere Linsen die sphärische Aberration in der Axe bedeutend verringert wird. Die Figuren 35 (Fraunhofer'sche Lupe) und 36 (Wilson'sche Lupe) geben zwei bekannte Ausführungsformen. Bei der letzteren ist die Distanz beider Linsen noch grösser gewählt als bei der ersteren. Man erreicht dadurch den Vortheil, dass die chromatische Differenz der Vergrösserung noch verringert wird, allerdings auf Kosten des Objectabstandes von der Frontlinse.[1])

Eine Achromatisirung durch Wahl verschiedener Glassorten ist in der Steinheil'schen sogenannten aplanatischen Lupe erreicht

1) Inwiefern der Abstand der Linsen Einfluss auf die Achromatisirung hat, ist schon oben S. 66 besprochen. Wir kommen hierauf bei Besprechung der Oculare, der Mikroskope und Fernrohre zurück, welche auch als Lupen aufzufassen sind.

(vgl. Figur 37). Bei dieser ist eine biconvexe Crownglaslinse zwischen zwei Flintglasmenisken eingekittet.

Durch grossen Objectabstand zeichnet sich die Brücke'sche Lupe aus, bei welcher man eine collective achromatische Vorderlinse mit einer (einfachen) Zerstreuungslinse in einem gewissen Abstand verbindet. Letztere entwirft (vgl. dazu Figur 22 auf S. 41) von virtuellen Objecten, welche etwas hinter ihrem hinteren Brennpunkt liegen, umgekehrte, vergrösserte, virtuelle Bilder. Die Anordnung der Linsen kann dieselbe wie im Teleobjectiv sein (vgl. Figur 34), d. h. das optische Intervall Δ zwischen der collectiven und dispansiven Linse kann positiv sein. Bei genügender Nähe des Objectes fällt dann doch das von der Sammellinse entworfene Bild hinter den hinteren Brennpunkt der Zerstreuungslinse. Die Combination liefert, gerade wie die einfache Lupe, aufrechte Bilder, da das von der Sammellinse entworfene Bild umgekehrt sein würde, und dieses von der Zerstreuungslinse noch einmal umgekehrt wird. Ein Uebelstand ist aber das kleine Gesichtsfeld.

3. Das Mikroskop. a) Allgemeines. Um stärkere Vergrösserungen zu erzielen, wendet man anstatt einer Lupe von sehr kurzer Brennweite viel vortheilhafter das Mikroskop an, das aus zwei in grösserem Abstand von einander befindlichen Collectivsystemen besteht. Das erste (Objectiv) entwirft von einem Objecte, welches nahe an seinem vorderen Brennpunkte liegt, ein reelles umgekehrtes vergrössertes Bild, welches durch das zweite Collectivsystem (Ocular), das als Lupe wirkt, noch weiter vergrössert wird. Abgesehen davon, dass man durch den grösseren Abstand beider Collectivsysteme, d. h. durch die Tubuslänge des Mikroskops, offenbar stärkere Vergrösserungen erzielen kann, als durch die Collectivsysteme einzeln, wenn man sie als Lupen benutzen wollte, liegt der Hauptvortheil des Mikroskops darin, dass man die Aufgabe der Abbildung in zwei Theile zerlegt, welche einzeln vom Objectiv und Ocular gelöst werden können. Diese Arbeitstheilung besteht darin, dass das Objectiv von einem Flächenelement eine Abbildung vermittelt bei möglichst grosser numerischer Apertur,[1]) während das Ocular, wie jede Lupe, bei grossem Gesichtsfeld eine Abbildung durch Strahlenbüschel vermitteln soll, die wenig geöffnet

1) Diese Forderung wird gestellt nicht nur zur Erzielung möglichster Bildhelligkeit, sondern auch zum Zweck grösster Auflösungskraft. Vgl. oben S. 83 und 85.

sind, da die Bildstrahlen von der Augenpupille begrenzt werden. Diese beiden verschiedenen Aufgaben sind aber nach früheren Auseinandersetzungen (vgl. Kapitel III, §§ 8, 9, 10) einzeln lösbar.

b) Das Objectiv. Die Hauptanforderungen an das Objectiv sind: Bei hoher numerischer Apertur soll eintreten:

1. Aufhebung der sphärischen Aberration in der Axe und Herstellung constanten Sinus-Verhältnisses (Bedingung des Aplanatismus).

2. Achromatisirung. Diese besteht einerseits darin, dass die Bedingungen des Aplanatismus für mehrere, mindestens zwei Farben erfüllt sind, andererseits in Herstellung eines achromatischen, vom Object durch das Objectiv entworfenen reellen Bildes. Begnügt man sich mit theilweiser Achromatisirung (vgl. oben S. 63), so ist die Lage des vorderen Brennpunktes des Objectivs zu achromatisiren. Denn das Object, welches nahe bei diesem Brennpunkt F liegt, liefert ein Bild, dessen Ort sehr stark mit der Farbe variiren würde, falls die Lage von F mit der Farbe variirte. Bei einer solchen theilweisen Achromatisirung, in der also die Lage von F, d. h. auch der Bildort, achromatisirt wird, ist die Brennweite nicht achromatisirt. Die verschiedenen Farben entwerfen daher verschieden grosse Bilder, d. h. es bleibt eine chromatische Differenz der Vergrösserung bestehen. Diese muss dann durch das Ocular compensirt werden.

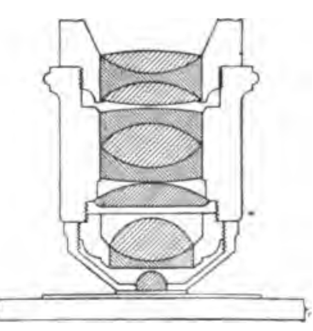


Fig. 38.

Man unterscheidet Trockensysteme und Immersionssysteme. Bei letzteren füllt man den Zwischenraum zwischen der Frontlinse des Objectivs und dem Deckglas, unter dem das Object liegt, mit einer Flüssigkeit aus. Die Vortheile der letzteren zur Erhöhung der numerischen Apertur liegen auf der Hand, ausserdem kann durch Anwendung sogenannter homogener Immersion, bei der die Flüssigkeit (Cedernholzöl) denselben Brechungsindex und Dispersion wie das Deckglas und die Frontlinse besitzt, das Princip von Amici (cf. oben S. 54), nämlich eine aplanatische Abbildung durch eine stark gewölbte (halbkugelige) Frontlinse, erreicht werden. In der Figur 38 ist in etwa doppelter natürlicher Grösse ein von Abbe construirtes Objectiv, Aprochromat genannt, ge-

zeichnet, welches die angegebenen Anforderungen durch Combination von 10 verschiedenen Linsen erfüllt und mit homogener Immersion arbeitet. Der Aprochromat ist für drei Spectralfarben achromatisirt, ist also frei vom secundären Spectrum (vgl. oben S. 63), die Bedingungen des Aplanatismus sind für zwei Farben erfüllt. Die Brennweite des ganzen Systems beträgt 2 mm, seine numerische Apertur ist $a = 1{,}40$. Die lichtsammelnde und dioptrische Güte dieses Objectivs ist eine derartige, dass die Grenze der Leistungsfähigkeit des Mikroskops [vgl. oben S. 85, Formel (87)] als thatsächlich erreicht angesehen werden kann.

c) Das Ocular. Die Hauptanforderungen an das Ocular sind, wie bei der Abbildung ausgedehnter Objecte durch enge Büschel:

1. Aufhebung des Astigmatismus in den schiefen Büscheln.
2. Orthoskopische Abbildung.
3. Achromatisirung.

Ueber die beiden ersteren Punkte ist schon im Kapitel III, § 10, S. 59 gesprochen worden; was den dritten Punkt anbelangt, so kann man sich wiederum mit einer theilweisen Achromatisirung begnügen. Nehmen wir zunächst den Fall an, dass das vom Objectiv entworfene Bild ohne chromatische Fehler sei. Die Hauptstrahlen, welche auf das Ocular fallen, sind bei der Tubuslänge des Mikroskops, d. h. bei der ziemlich beträchtlichen Entfernung, welche das vom Objectiv entworfene reelle Bild von der Austrittspupille des Objectivs besitzt, nahezu axenparallel, oder haben wenigstens nur geringe Neigung zur Axe des Mikroskops. Wenn nun die Brennweite des Oculars achromatisirt ist, so spaltet sich, wie aus der oben S. 24 angegebenen Construction conjugirter Strahlen oder aus der S. 21 ausgesprochenen Eigenschaft der Brennweite hervorgeht, ein weisser Strahl, der auf das Ocular axenparallel einfällt, in farbige Strahlen, welche unter gleicher Neigung gegen die Axe aus dem Ocular austreten. Ein auf Unendlich accommodirtes Auge sieht daher ein farbenfreies Bild. Auch wenn dasselbe in der deutlichen Sehweite (25 cm) vom Auge entfernt liegt, so ist doch die Bedingung eines farbenfreien Bildes nahezu die Achromatisirung der Brennweite des Oculars.

Nun wurde oben S. 66 der Satz bewiesen, dass zwei einfache Linsen der Brennweiten f_1 und f_2 aus gleichem Glase in der Distanz $a = \frac{f_1 + f_2}{2}$ für alle Farben gleiche resultirende Brennweite f besitzen. Da man zugleich durch die Zerlegung des Oculars

in zwei Linsen eine Bildverbesserung hinsichtlich der Aufhebung des Astigmatismus erzielen kann, so sind die Oculare nach diesem Principe construirt. Die dem Objectiv zugewandte Linse des Oculars heisst die Collectivlinse, die dem Auge zugewandte die Augenlinse.

Diese achromatischen Oculare werden meist in zwei verschiedenen Formen ausgeführt:

1. Das Ramsden'sche Ocular (vgl. Figur 40, S. 100), welches aus zwei gleichen, planconvexen, mit ihren gekrümmten Flächen einander zugewandten Linsen besteht. Bei $f_1 = f_2$ folgt der Abstand a dieser Linsen zu $a = f_1 = f_2$. Dies würde aber den Uebelstand haben, dass, da die Collectivlinse von der Augenlinse um ihre Brennweite entfernt ist, etwaige Staubkörnchen oder Kratzen auf der Collectivlinse durch die Augenlinse deutlich vergrössert gesehen und das Bild stören würden. Man legt daher die Collectivlinse etwas näher an die Augenlinse, wählt etwa $a = {}^2/_3\, f_1$. Man erreicht dadurch noch einen weiteren Vortheil. Das optische Intervall (vgl. oben S. 28) beider Linsen hat für $a = {}^2/_3\, f_1$ den Werth $\varDelta = - {}^4/_3\, f_1$. Nach Formel (20) auf S. 29 liegt daher der vordere resultirende Brennpunkt F des Oculars noch um ${}^1/_4\, f_1$ vor der Collectivlinse, während er bei $a = f_1$, d. h. $\varDelta = - f_1$, in die Collectivlinse selbst fallen würde. Da nun das vom Objectiv des Mikroskops entworfene reelle Bild nahe beim Brennpunkt F des Oculars liegen muss, so liegt dies für $a = {}^2/_3\, f_1$ noch vor der Collectivlinse; man kann daher das Mikroskopbild mikrometrisch ausmessen, indem man vor der Collectivlinse am Orte des reellen, vom Objectiv entworfenen Bildes ein Mikrometer (feine Theilung auf Glas, oder durch Schraube verschieblicher Faden) anbringt.

2. Das Huygens'sche Ocular (vgl. Figur 39). Bei diesem ist die Brennweite f_1 der Collectivlinse grösser als die Brennweite f_2 der Augenlinse. Meist ist $f_1 = 3 f_2$. Aus $f_1 = 3 f_2$ folgt für $a = \frac{f_1 + f_2}{2}$ der Werth $a = {}^2/_3\, f_1 = 2 f_2$. Das optische Intervall $\varDelta$ hat hier den Werth $\varDelta = - {}^2/_3\, f_1$, daher liegt nach (20) auf S. 29 der resultirende Brennpunkt F des Oculars um ${}^1/_2\, f_1$ hinter der Collectivlinse. Das vom Objectiv entworfene reelle Bild muss daher hinter die Collectivlinse (als virtuelles Object) fallen, und eine mikrometrische Ausmessung ist nicht gut statthaft, da das Object durch beide Ocularlinsen abgebildet wird, während das Mikrometer nur durch die Augenlinse abgebildet werden könnte.

Dadurch können aber verschiedene Vergrösserungsverhältnisse entstehen. Dieses Ocular besteht auch aus zwei planconvexen Linsen, die aber beide mit ihren gekrümmten Seiten dem Objecte zugewandt sind. Der Vortheil der Combination einer schwachen Collectivlinse mit einer dreimal stärkeren Augenlinse liegt darin, dass dann die Ablenkungen der Lichtstrahlen auf beide Linsen gleichmässig vertheilt sind.[1])

Ist das reelle, vom Objectiv entworfene Bild mit chromatischen Fehlern behaftet, so können diese im Ocular durch entgegen-

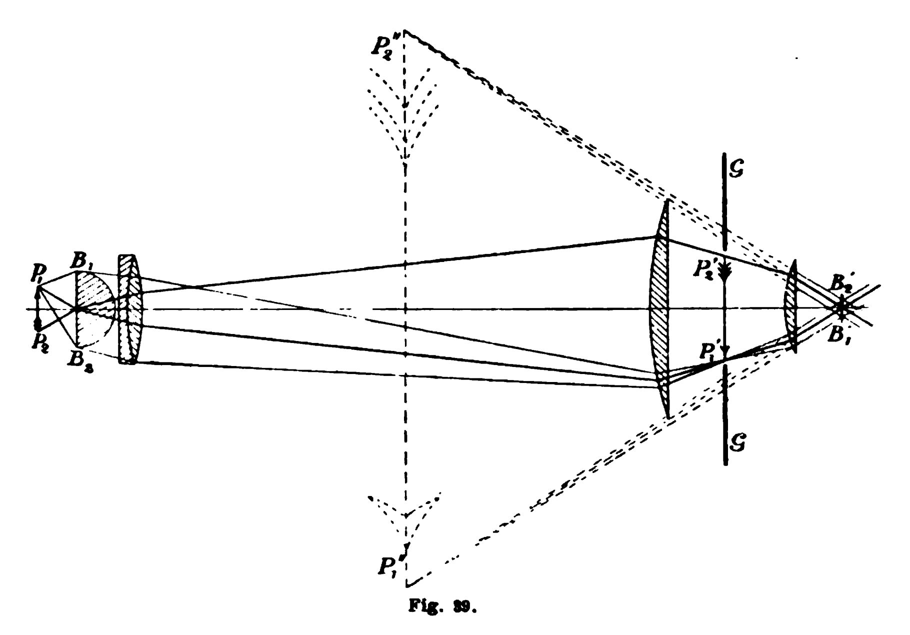


Fig. 39.

gesetzte chromatische Abweichungen aufgehoben werden. Wir sahen oben S. 91, dass die Aprochromat-Objective eine chromatische Vergrösserungsdifferenz bestehen lassen, das blaue Bild ist stärker vergrössert als das rothe. Mit diesen Objectiven combinirt nun Abbe die sogenannten Compensationsoculare, welche nicht hinsichtlich ihrer Brennweite, d. h. auch ihrer Vergrösserung, achromatisirt sind, sondern welche das rothe Bild stärker vergrössern als das blaue.

1) Eine diesbezügliche Rechnung vgl. in Heath, geometrische Optik, deutsch von Kanthack, S. 292. Berlin 1894.

d) Der Condensor. Damit eine hohe numerische Apertur des Objectivs voll ausgenutzt werden kann, müssen Lichtstrahlen in genügender Neigung gegen die Axe einfallen. Um solche, genügend geneigte Lichtstrahlen zu erzeugen, ist der Condensor unter dem Objecttisch des Mikroskops angebracht, welcher aus einer oder mehreren Sammellinsen kurzer Brennweite, im Wesentlichen wie ein Objectiv in umgekehrter Reihenfolge der Linsen, construirt ist. Durch einen solchen Lichtsammler wird zwar nach früheren Auseinandersetzungen (vgl. oben S. 79) die Intensität der Lichtquelle nicht gesteigert, aber wohl wird dadurch derselbe Effect erzielt, als ob dieselbe dem Objectiv sehr genähert würde.

e) Der Strahlengang. Wenn die Normalvergrösserung (vgl. oben S. 83) nicht erreicht ist, so ist die Pupille des Auges des Beobachters die Austrittspupille für das ganze Mikroskop, das von ihm entworfene Bild der Augenpupille ist die Eintrittspupille. Wenn aber die Normalvergrösserung überschritten wird, so ist eine Blende oder ein Linsenrand im Mikroskop die Aperturblende. Dieselbe liegt stets im Objectiv, nicht im Ocular. Figur 39 bezieht sich auf den vielfach vorkommenden Fall, dass die Oeffnung $B_1 B_2$ der halbkugeligen Frontlinse des Objectivs die Aperturblende und zugleich Eintrittspupille ist. Das vom ganzen Mikroskop entworfene Bild $B_1' B_2'$ von $B_1 B_2$ ist die Austrittspupille. Dieselbe liegt bei nicht zu kleiner Tubuslänge nahezu im hinteren Brennpunkt des Oculars. Das Ocular in Figur 39 stellt ein Huygens'sches dar, das vom Gegenstand $P_1 P_2$ durch das Objectiv und die Collectivlinse entworfene reelle Bild ist $P_1' P_2'$. An dieser Stelle wird die Gesichtsfeldblende GG angebracht. Dadurch wird das Gesichtsfeld scharf begrenzt, weil dann das von G durch Collectivlinse und Objectiv entworfene Bild in die Objectebene $P_1 P_2$ fällt (vgl. dazu die Bemerkungen der S. 71). Die Punkte $P_1' P_2'$ sollen in die Ränder der Gesichtsfeldblende fallen. Dann ist $P_1 P_2$ die Grösse des Gesichtsfeldes auf der Objectseite. Das durch die Augenlinse vom reellen Bilde $P_1' P_2'$ entworfene virtuelle Bild $P_1'' P_2''$ ist das vom Beobachter gesehene Bild. Liegt dasselbe in der Entfernung δ von der Austrittspupille, so muss der Beobachter, dessen Augenpupille nach S. 71 an dem Ort der Austrittspupille $B_1' B_2'$ liegen soll, sein Auge auf diese Entfernung δ accommodiren. Durch geringe Hebung oder Senkung des ganzen Mikroskops gegen das Object $P_1 P_2$ kann das Bild $P_1'' P_2''$ leicht in jede gewünschte Entfernung δ gebracht

werden. Man nimmt meist an, dass δ den Werth 25 cm (sog. deutliche Sehweite) besitze.

In der Figur 39 ist der von P_1 ausgehende Hauptstrahl und die Randstrahlen gezeichnet. Für P_2 ist nur der Hauptstrahl gezeichnet, die Randstrahlen sind hinter der Augenlinse angegeben.

f) Die Vergrösserung. Das Object habe die (seitliche) Grösse y. Vom Objectiv wird nach Formel (7) auf S. 20 ein reelles Bild der Grösse $y' = y \cdot \frac{l}{f_1'}$ entworfen, wobei f_1' die hintere[1]) Brennweite des Objectivs, l die Distanz des Bildes vom hinteren Brennpunkt des Objectivs bedeutet. Da dieses Bild y' nach Früherem dicht vor oder hinter der Collectivlinse des Oculars liegt, so kann man näherungsweise für l die Länge des ganzen Mikroskops (Tubuslänge) setzen. Das vom Ocular entworfene virtuelle Bild hat ebenfalls nach der obigen Formel (7) die Grösse $y'' = y' \cdot \frac{\delta}{f_2}$, wobei f_2 die Brennweite des Oculars, und δ die Entfernung des virtuellen Bildes vom hinteren Brennpunkt des Oculars bezeichnet. Da dieser, wie oben bemerkt wurde, nahe bei der Austrittspupille, d. h. auch der Augenpupille, liegt, so kann man für δ die Entfernung des Bildes vom Auge setzen.

Die ganze Vergrösserung V des Mikroskops wird demnach

$$V = \frac{y''}{y} = \frac{\delta \cdot l}{f_1' \cdot f_2}. \tag{5}$$

Da die hintere Brennweite f' des ganzen Mikroskops nach Formel (18) auf S. 29 sich bestimmt[2]) zu

$$f' = -\frac{f_1' f_2}{l}, \tag{6}$$

weil das optische Intervall Δ zwischen Objectiv und Ocular nahezu gleich der Tubuslänge l ist, so kann man (5) auch schreiben (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen):

$$V = \frac{\delta}{f'}. \tag{7}$$

Die Vergrösserung hängt also von drei Factoren ab, über die man frei verfügen kann, nämlich von f_1', f_2 und l. Die Tubuslänge l wird, schon allein um das Mikroskop nicht unhandlich zu machen, nicht über ein gewisses Maass gesteigert; man ersetzt

1) Eine Unterscheidung der hinteren und vorderen Brennweite ist nur bei den Immersionssystemen nothwendig.

2) Es ist für das Ocular $f_2 = f_2'$.

praktischer die Wirkung einer Vergrösserung von l durch ein stärkeres Ocular. Die Brennweite des Objectivs wird ferner stets viel kleiner als die des Oculars gewählt. Einmal werden dadurch auch bei hoher numerischer Apertur die Dimensionen der Objectivgläser verhältnissmässig klein, andererseits kann man eine bestimmte Bildqualität (in der Axe) bei einer gegebenen Gesammtvergrösserung desto leichter erreichen, je kürzer man die Brennweite des Objectivs wählt. Da aber mit der Verringerung der Objectiv-Brennweite die Fehler des letzten vom Ocular entworfenen Bildes ausserhalb der Axe zunehmen, so wird die Verringerung von f_1' auch nicht über eine gewisse Grenze (1,5 bis 2 mm bei Immersionssystemen) getrieben.

g) Die Leistungsfähigkeit. Dieselbe ist nicht mit der Vergrösserung zu identificiren, d. h. es kann unter Umständen ein weniger vergrösserndes Mikroskop leistungsfähiger sein, d. h. mehr Details eines Objectes dem Auge enthüllen als ein stärker vergrösserndes. Die Leistungsfähigkeit ist wesentlich durch die Construction des Objectivs bedingt; der Inhalt oder das Detail des von ihm entworfenen Bildes hängt (vgl. oben S. 85) einmal von der numerischen Apertur des Objectivs ab, andererseits von der Grösse der Zerstreuungskreise, welche durch nicht streng homocentrische Strahlenvereinigung entstehen. Wenn nun zwei Punkte P_1 und P_2 eines Objectes betrachtet werden, für die die Zerstreuungskreise im Objectivbild nicht über einander greifen, so können sie am Auge als zwei distincte Punkte oder Scheibchen wahrgenommen werden, falls das Ocular ihr Objectivbild mindestens auf die Grenze des Sehwinkels (1′) vergrössert hat. Wenn aber die Zerstreuungskreise im Objectivbilde über einander greifen, so kann auch das stärkste Ocular die beiden Punkte P_1 und P_2 optisch nicht trennen. Für jedes bestimmte Objectiv ergiebt sich sonach eine Ocularvergrösserung — die sogenannte förderliche Ocularvergrösserung —, welche gerade ausreichen muss, um das im Objectivbild enthaltene Detail vollkommen zu erkennen. Eine stärkere Vergrösserung kann wohl dieses Detail noch bequemer zur Erkennung bringen, aber sie fügt kein neues Detail dem Bilde zu, man spricht daher dann von leerer Vergrösserung. — Aus der Objectivbrennweite, der Tubuslänge und der förderlichen Ocularbrennweite berechnet sich nach (5) die förderliche Gesammtvergrösserung. Dieselbe ist also um so höher, je vollkommener die Leistungen des Objectivs sind.

Setzen wir ein dioptrisch vollkommenes Objectiv voraus, so ist die förderliche Gesammtvergrösserung nur abhängig von der numerischen Apertur. Dieselbe ist bisher (bei Immersionssystemen) nicht über den Werth $a = 1{,}6$ gesteigert worden. Nach Formel (87) auf S. 85 ist daher die kleinste Distanz d, die optisch aufzulösen ist:

$$d = \frac{\lambda}{2a} = \frac{0{,}00053 \text{ mm}}{3{,}2} = 0{,}00016 \text{ mm},$$

falls für die Wellenlänge λ der Werth für grünes Licht gesetzt wird. In der Entfernung $\delta = 25$ cm vom Auge erscheint nun eine Distanz $d' = 0{,}145$ mm unter dem Sehwinkel 2', dem Grenzwinkel bequemer Unterscheidbarkeit. Da nun $d' : d = 905$, so hat die förderliche Gesammtvergrösserung des Mikroskops etwa den Werth 900. Durch die dioptrischen Fehler des Objectivs wird dieselbe noch etwas herabgedrückt. — Nach Formel (85) auf S. 83 ist in diesem Falle das Verhältniss der Bildhelligkeit zur normalen Helligkeit

$$H : H_0 = \frac{\delta^2 \cdot a^2}{p^2 \cdot V^2} = \left(\frac{250 \cdot 1{,}6}{2 \cdot 900}\right)^2 = {}^1/_{20},$$

falls die Augenpupille zu 2 mm Radius p angenommen wird.

h) Experimentelle Bestimmung der Vergrösserung und der numerischen Apertur. Die Vergrösserung wird bestimmt, indem als Object eine feine, auf Glas eingeritzte Scala (Mikrometer) benutzt wird, deren Bild man auf ein in 25 cm vom Auge befindliches Papierblatt aufzeichnet mit Hülfe eines über dem Ocular angebrachten Zeichenapparates. Derselbe besteht im einfachsten Falle aus einem schräg aufgestelltem kleinen Spiegel, dessen Belegung in der Mitte in Form eines kleinen, etwa 2 mm grossen Loches fortgenommen ist. Durch das Loch erblickt man das vom Mikroskop entworfene Bild, während die Spiegelbelegung das Zeichenblatt dem Auge gleichzeitig sichtbar macht.[1]) Das Verhältniss der Abstände der Theilstriche des Mikrometers in der Zeichnung zu den Abständen im Objecte selbst giebt die Vergrösserung an.

Mit Hülfe der Vergrösserung und der Ausmessung der Austrittspupille des Mikroskops kann man leicht seine numerische Apertur a finden. Da das Verhältniss der Bildhelligkeit zur normalen Helligkeit nach Früherem (cf. oben S. 82) gleich dem Ver-

1) Betreffs anderer Zeichenapparate vgl. Müller-Pouillet, Optik von Lummer, S. 839—842.

hältniss der Austrittspupille zur Augenpupille ist, so folgt nach (85) auf S. 83

$$\frac{H}{H_0} = \frac{b^2}{p^2} = \frac{\delta^2 a^2}{p^2 V^2}, \tag{8}$$

wobei b den Radius der Austrittspupille bezeichnet. Es ergiebt sich also die numerische Apertur aus:

$$a = \frac{b V}{\delta}. \tag{9}$$

Setzt man hierin für V den Werth nach (7), so folgt:

$$a = b : f', \tag{10}$$

d. h. die numerische Apertur ist gleich dem Verhältniss des Radius der Austrittspupille zu der hinteren Gesammtbrennweite des ganzen Mikroskops.

Ein von Abbe construirtes Apertometer gestattet die numerische Apertur des Objectivs allein direct zu messen.[1]

4. Das astronomische Fernrohr. Dasselbe besteht ebenfalls, wie das Mikroskop, aus zwei collectiven Theilen: dem Objectiv und dem Ocular. Ersteres entwirft von einem sehr fernen Objecte ein reelles umgekehrtes Bild in der Brennebene des Objectivs, dieses Bild wird durch das Ocular, das als Lupe wirkt, vergrössert. Accommodirt das Auge des Beobachters auf Unendlich, so fällt die vordere Brennebene des Oculars mit der hinteren Brennebene des Objectivs zusammen, und wir haben die „teleskopische“ Abbildung im früheren Sinne (oben S. 26), bei der unendlich entfernte Gegenstände unendlich entfernte Bilder haben. Unter der Vergrösserung Γ versteht man dann das Convergenzverhältniss der Bildstrahlen zu den Objectstrahlen. Nach (24) auf S. 30[2]) ist aber

$$\Gamma = tg\, u' : tg\, u = f_1 : f_2, \tag{11}$$

wobei f_1 die Brennweite des Objectivs, f_2 die des Oculars ist. Damit also eine starke Vergrösserung Γ erzielt wird, muss f_1 gross und f_2 klein sein.

Die Vergrösserung kann man experimentell bestimmen, indem man das Verhältniss der Eintrittspupille des Instrumentes zur Austrittspupille bestimmt. Denn bei der teleskopischen Abbildung

---

1) Betreffs näherer Beschreibung dieses Instrumentes vgl. die eingangs dieses Kapitels citirten Lehrbücher.

2) Dort sind der Allgemeinheit halber die vorderen und hinteren Brennweiten (f_1 und f_1', f_2 und f_2') von einander unterschieden. Hier ist das nicht nöthig, da beim Fernrohr stets $f_1 = f_1'$, $f_2 = f_2'$ ist (vgl. oben S. 35).

ist nach Früherem (S. 26) die Lateralvergrösserung constant, d. h. unabhängig vom Orte des Objectes, und zwar ist sie nach der dort (S. 27) gegebenen Formel (14') gleich der reciproken Angularvergrösserung. Die Eintrittspupille ist nun (ohne Rücksicht auf das Auge des Beobachters, cf. weiter unten) der Rand des Objectivsystems, die Austrittspupille daher das von diesem Rande durch das Ocular entworfene reelle Bild (der Augenkreis). Misst man daher den Durchmesser dieses Augenkreises mikrometrisch, so ist sein Verhältniss zum Objectivdurchmesser gleich der reciproken Angularvergrösserung des Fernrohres.

In Figur 40 ist der Strahlengang bei Benutzung eines Ramsden-schen Oculars (vgl. oben S. 93) gezeichnet. $B_1 B_2$ ist die Eintrittspupille (Objectivrand), $B_1' B_2'$ die Austrittspupille. P_1 ist das reelle,

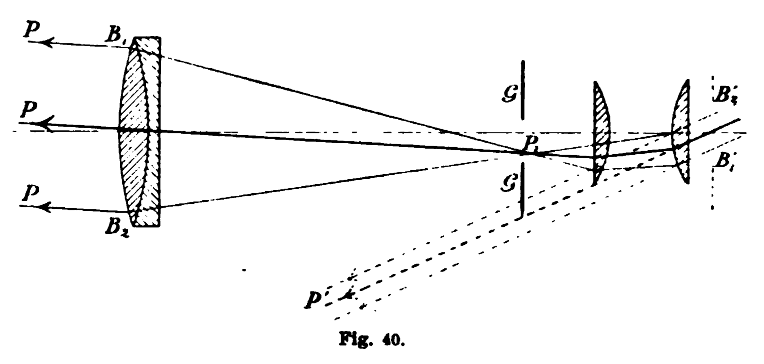


Fig. 40.

vom Objectiv entworfene Bild eines unendlich fernen Punktes P. Sein Hauptstrahl ist stark, seine Randstrahlen schwach gezeichnet. P_1 liegt etwas vor der Collectivlinse des Oculars. An gleicher Stelle ist die Gesichtfeldblende GG angebracht. Da ihr Bild auf der Objectseite im Unendlichen liegt, so wird das Gesichtsfeld bei Betrachtung sehr entfernter Objecte scharf begrenzt. — P' ist das unendlich ferne Bild, welches das Ocular von P_1 entwirft. — Zieht man das Auge des Beobachters in Rücksicht, so sind die zwei Fälle zu unterscheiden, ob die Austrittspupille des Instrumentes kleiner oder grösser als die Augenpupille ist (d. h. ob die Normalvergrösserung überschritten ist oder nicht). Nur in ersterem Falle bleiben die bisherigen Betrachtungen unverändert bestehen, während im letzteren Falle die Augenpupille die Austrittspupille für den ganzen Strahlengang ist und das vom Fernrohr entworfene Bild der Augenpupille die Eintrittspupille ist.

Als Objectiv wird eine achromatisirte Doppellinse gewählt, die auf sphärische Aberration corrigirt ist. Für die Achromatisirung des Oculars gelten dieselben Bedingungen, die oben beim Mikroskop besprochen sind: da die auf das Ocular fallenden Hauptstrahlen nahezu axenparallel sind, so genügt die Achromatisirung der Brennweite des Oculars. Man kann daher für Mikroskop und Fernrohr dieselben Oculare benutzen, meist jedoch wird bei letzterem das Ramsden'sche Ocular angewandt, da es vortheilhafter bei der mikrometrischen Bildausmessung ist (vgl. oben S. 93).

Auch hier gelten, gerade wie beim Mikroskop, die Begriffe der förderlichen und leeren Ocular- bezw. Gesammtvergrösserung. Die freie Oeffnung des Objectivs spielt hier die Rolle der numerischen Apertur des Mikroskops (vgl. dazu S. 84, 85).

5. Das holländische Fernrohr. Wird das collective Ocular des astronomischen Fernrohres durch ein dispansives ersetzt, so erhält man das holländische Fernrohr. Damit teleskopische Abbildung stattfindet, muss der hintere Brennpunkt des Oculars mit dem hinteren Brennpunkt des Objectivs zusammenfallen. Die Länge des Fernrohrs ist also nicht, wie beim astronomischen, gleich der Summe, sondern gleich der Differenz der Brennweiten von Objectiv und Ocular.

Die Formel (11) dieses Kapitels für die Angularvergrösserung Γ gilt auch hier, da diese Formel für jede teleskopische Abbildung gilt. Das Fernrohr giebt aber im Gegensatz zum astronomischen Fernrohr aufrechte Bilder, da das vom Objectiv entworfene umgekehrte Bild durch das dispansive Ocular noch einmal umgekehrt wird.

Ohne Rücksicht auf das Auge des Beobachters würde der Objectivrand stets die Eintrittspupille des Instrumentes sein. Das Ocular entwirft von demselben ein virtuelles verkleinertes Bild (Austrittspupille) vor dem Ocular. Dasselbe hat den Radius

$$b = h \cdot \frac{f_2}{f_1} = \frac{h}{\Gamma}, \tag{12}$$

falls h der Radius des Objectivs ist.

Da diese Austrittspupille vor und nicht hinter dem Ocular liegt, so kann die Augenpupille des Beobachters nicht mit ihr zur Deckung gebracht werden. In Folge dessen wirkt die Augenpupille als Gesichtsfeldblende, wenn die nach Formel (12) bestimmte Grösse b, nämlich die Austrittspupille des Instrumentes, kleiner als die Augenpupille ist, d. h. wenn die Normalvergrösserung überschritten ist. Deshalb ist das Gesichtsfeld bei starken Vergrösserungen

ein sehr beschränktes. Figur (41) bezieht sich auf diesen Fall des Strahlenganges. p, p bedeutet die Augenpupille, w' ist der Gesichtsfeldwinkel im Bilde. Da das vom ganzen Fernrohr entworfene Bild der Gesichtsfeldblende (der Augenpupille) im Endlichen, d. h.

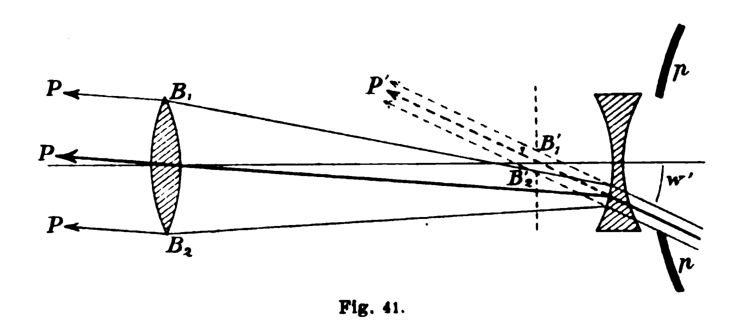


Fig. 41.

nicht am Orte des Objectes im Unendlichen liegt, so ist auch das Gesichtsfeld nicht scharf begrenzt (cf. oben S. 71).

Wenn aber die Austrittspupille $B_1'B_2' = 2b$ des Instrumentes grösser als die Augenpupille ist, d. h. wenn die Normalvergrösserung nicht erreicht ist, so ist mit Rücksicht auf das Auge des Beobachters seine Augenpupille die Austrittspupille für den ganzen Strahlengang, und die Objectivöffnung wirkt als Gesichtsfeldblende; das bildseitige Gesichtsfeld ist begrenzt durch das Bild $2b$ (in Figur 42 ist dies mit $B_1'B_2'$ bezeichnet) der Objectivöffnung. In diesem Falle kann man also durch Wahl eines recht grossen Objectivs das Gesichtsfeld vergrössern. Aus demselben Grunde wie vorhin ist dasselbe aber auch hier unscharf begrenzt. Figur 42 bezieht sich auf diesen Fall des Strahlenganges, w' ist der bildseitige Gesichtsfeldwinkel.

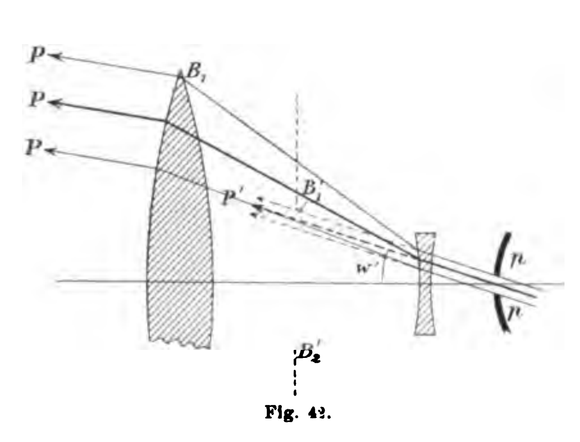


Fig. 42.

Nimmt man die Augenpupille zu 2 mm Radius an, so tritt nach (12) der Strahlengang der Figur 41 oder der Figur 42 ein, je nachdem

$$h \lesseqgtr 2\Gamma \text{ mm}$$

ist;[1]) z. B. bei einer achtmaligen Vergrösserung ist $2h = 32$ mm die kritische Objectivgrösse.

6. Das terrestrische Fernrohr. Für terrestrische Zwecke ist es von Vortheil, wenn das Fernrohr aufrechte Bilder entwirft. Wenn die Vergrösserung nicht sehr stark sein soll, so empfiehlt sich daher der Gebrauch des holländischen Fernrohres. Da dasselbe aber bei starken Vergrösserungen ein sehr kleines Gesichtsfeld hat, so ist für starke Vergrösserungen das sogenannte terrestrische Fernrohr praktischer, welches ein astronomisches Fernrohr mit bildumkehrendem Ocular ist. Der Abbildungsvorgang ist dann folgender: Die Objectivlinse entwirft ein umgekehrtes reelles Bild vom Object. Dieses Bild wird durch ein (aus zwei Linsen bestehendes) Collectivsystem ohne wesentliche Vergrösserungsänderung umgekehrt und das dadurch entstandene aufrechte Bild durch ein Ramsden'sches oder Huygens'sches Ocular, das als Lupe wirkt, zu einem virtuellen aufrechten Bilde vergrössert.

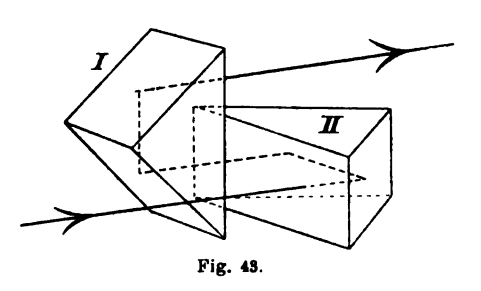


Fig. 43.

7. Prismendoppelfernrohre von C. Zeiss. Das terrestrische Ocular hat eine unbequeme Länge. Diesen Uebelstand kann man vermeiden, wenn man die Umkehrung des vom Objectiv entworfenen Bildes durch viermalige Totalreflexion an zwei rechtwinkligen Glasprismen bewirkt, die wie in Figur 43 angeordnet sind. Der austretende Strahl ist dem einfallenden parallel, hat aber eine seitliche Verschiebung erlitten. — Im Uebrigen ist die Construction des Fernrohres die des astronomischen.

Durch Trennung der beiden Prismen I und II kann eine bedeutende Verkürzung des Fernrohres erzielt werden, da der

1) Experimentell kann man diese beiden Fälle dadurch unterscheiden, je nachdem bei theilweiser Abblendung des Objectivs durch eine vorgehaltene Blende nur die Bildhelligkeit abnimmt oder das Gesichtsfeld verkleinert wird.

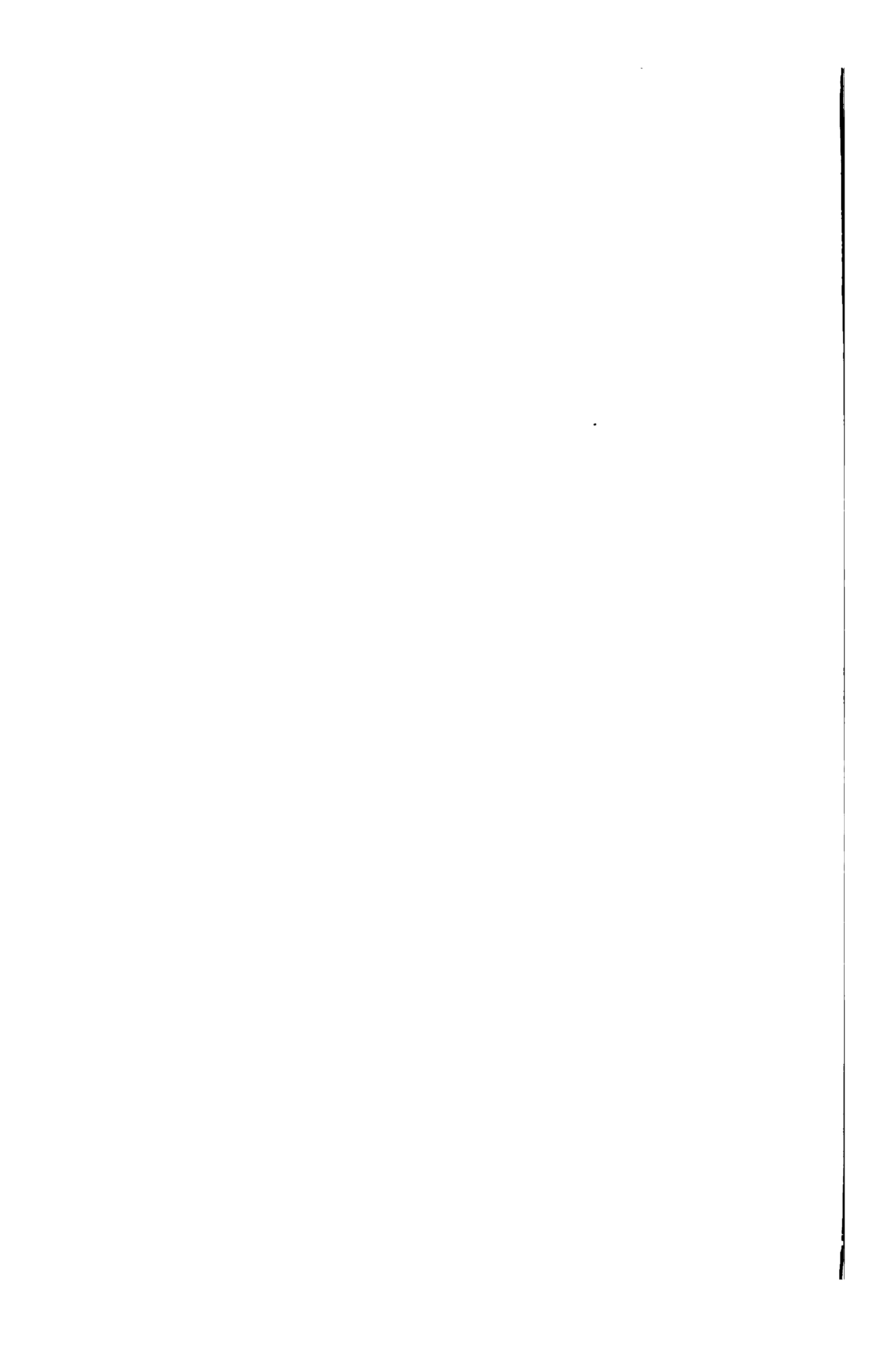
Lichtstrahl die Strecke zwischen den Prismen dreimal zurückzulegen hat. — Durch etwas andere Anordnung, bezw. Zerschneidung der Prismen kann die seitliche Verschiebung des einfallenden und austretenden Lichtstrahles beliebig erhöht werden. Man kann nach diesem Principe ein für beide Augen benutzbares Doppelfernrohr construiren, in welchem die Eintrittspupillen (Objectivlinsen) eine viel grössere Distanz besitzen als die Augenpupillen. Dadurch wird der stereoskopische Effect, der mit der Betrachtung der Landschaft durch die beiden Augen verbunden ist, sehr erhöht.

8. Spiegelteleskope. Dieselben unterscheiden sich von den dioptrischen dadurch, dass an Stelle der Objectivlinse ein Hohlspiegel ein reelles Bild des Objectes entwirft. Dasselbe wird mit dem Auge betrachtet durch Oculareinrichtungen, die bei den einzelnen Constructionen etwas verschieden sind.[1]) Die Spiegelteleskope hatten besonders früher eine grosse Bedeutung, als man noch keine achromatischen Objective herstellen konnte, denn naturgemäss treten chromatische Bildfehler beim Hohlspiegel nicht auf.

Zur Erzielung möglichst starker Vergrösserungen sind grosse Spiegel von grossem Krümmungsradius zu wählen. Herschel hatte einen Riesenhohlspiegel von 16 m Krümmungsradius gebaut. Das von ihm entworfene reelle Sonnenbild ist, da der Sehwinkel der Sonne 32′ beträgt, etwa 7 cm gross.

1) Betreffs näherer Details vgl. Heath, Geometrische Optik, deutsch von Kanthack, S. 299—310.

PHYSIKALISCHE OPTIK.



I. Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften des Lichtes.

Kapitel I.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.

1. Methode von Römer. Die Beantwortung der Frage, ob das Licht eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitze, ist von grosser principieller Bedeutung. Eine terrestrische Methode, wie sie zuerst von Galiläi angewandt wurde, führte wegen der ausserordentlichen Schnelligkeit des Lichtes nicht zum Ziel; bei kleinen Entfernungen, wie sie in terrestrischen Methoden vorkommen, müssen die experimentellen Hülfsmittel sehr verfeinert werden.

Von besserem Erfolg waren zunächst astronomische Methoden gekrönt, da es sich bei ihnen um sehr grosse Distanzen für die Lichtausbreitung handelt. Die erste Bestimmung für die Lichtgeschwindigkeit lieferte Olaf Römer im Jahre 1675, welcher beobachtete, dass die Zeitperiode für die Verfinsterung eines Jupitermondes etwas grösser war, wenn die Erde sich in ihrer Bahn vom Jupiter entfernt, als wenn sie sich ihm nähert. Diese Veränderung in der Verfinsterungsperiode kann durch Beobachtung zahlreicher auf einander folgender Verfinsterungen sehr scharf bestimmt werden. Römer fand, dass die Summe der Verfinsterungsperioden, welche zwischen zwei Verfinsterungen lag, von denen die erste in Opposition der Erde zum Jupiter, die zweite in Conjunction beider Planeten eintrat, um 996 Secunden differirte gegenüber der Zeitsumme, die man aus der Anzahl der Verfinsterungen und der im Verlauf des ganzen Jahres im Mittel beobachteten Verfinsterungsperiode erhält. Schon Römer deutete diese Differenz aus der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Nach dieser Anschauung

muss das Licht zum Durcheilen des Erdbahndurchmessers 996 Secunden gebrauchen. Nach neueren Beobachtungen von Glasenapp ist die Römer'sche Zahl in 1002 Secunden zu corrigiren. — Der Erdbahndurchmesser ergiebt sich aus dem Erdradius, wenn man die sogenannte Sonnenparallaxe kennt, d. h. den Winkel, unter dem der Erdradius von der Sonne aus erscheint. Nach den neueren astronomischen Bestimmungen ist der wahrscheinlichste Werth der Sonnenparallaxe 8,85″, so dass sich der Erdbahndurchmesser d, da der Erdradius 6378 km beträgt, berechnet zu:

$$d = \frac{2.6378}{8{,}85} \cdot \frac{180.60.60}{\pi} = 2973 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Für die Lichtgeschwindigkeit V folgt so:

$$V = 296\,700 \text{ km/sec.} = 2{,}967 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec.}$$

Diese Zahl ist hauptsächlich noch unsicher (um etwa $^1/_2$ bis $1\,^0/_0$) wegen des Fehlers in Bestimmung der Sonnenparallaxe.

2. Methode von Bradley. Wir wollen uns denken, dass ein Lichtstrahl einer unendlich entfernten Lichtquelle P durch zwei aufeinander folgende Löcher S_1 und S_2, die in der Axe eines Rohres R liegen, in das Auge eines Beobachters gelange. Wenn nun das Rohr R in eine Parallelverschiebung der Geschwindigkeit v senkrecht zur Rohraxe versetzt wird, während die Lichtquelle P in Ruhe bleibt, so wird der Lichtstrahl, wenn er durch das erste Loch S_1 getreten ist, nicht mehr genau das Loch S_2 treffen, wenn das Licht eine endliche Zeit zum Durcheilen des Rohres R gebraucht. Der Beobachter sieht daher dann die Lichtquelle P nicht mehr. Um sie wieder zu erblicken, muss er das Rohr R um einen Winkel α gegen die ursprüngliche Richtung drehen, so dass die Visirlinie nach P im Sinne der Bewegung des Beobachters um den Winkel ζ verschoben erscheint, und zwar muss sein

$$tg\,\zeta = v : V, \tag{1}$$

falls V die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Diese Ueberlegung ergiebt die Erklärung für die von Bradley im Jahre 1727 entdeckte Aberration der Fixsterne, nach der der Ort derselben, falls Visirlinie und Bewegung der Erde senkrecht auf einander stehen, im Sinne der Erdbewegung um einen kleinen Winkel verschoben ist, der sich nach neueren Bestimmungen zu 20,5″ ergeben hat. Da die Bahngeschwindigkeit v der Erde be-

kannt ist, wenn man die Grösse der Erdbahn kennt, so ergiebt sich aus der Gleichung (1) die Lichtgeschwindigkeit zu

$$V = 2{,}982 \cdot 10^{10}\ {}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{sec}}.$$

Diese Methode leidet an derselben Unsicherheit wie die Römer'sche und wie überhaupt alle astronomischen Methoden, die in der unsicheren Kenntniss der Sonnenparallaxe und damit der Erdbahn wurzelt.

Das Resultat stimmt mit dem nach der Römer'schen Methode gewonnenen gut überein, und dies zeigt, dass eine hier stillschweigend getroffene Annahme berechtigt ist: dass nämlich den Lichtstrahlen selbst, wenn sie sich durch die mit der Erde bewegte Luft hindurch fortpflanzen, keine seitliche Geschwindigkeitscomponente mitgetheilt wird. Indess ist die Aberration in dieser einfachen Weise nicht erschöpfend zu erklären. Nach der angestellten Ueberlegung sollte man nämlich erwarten, dass die Aberration, wenn man nach einem Fixstern mit einem mit Wasser angefüllten Fernrohr visirt, eine grössere sein müsste, da, wie wir weiter unten sehen werden, die Lichtgeschwindigkeit im Wasser kleiner ist als in Luft. Thatsächlich ist aber die Aberration unabhängig von dem Medium im Fernrohr. Um dies zu erklären, bedarf es einer genaueren Untersuchung über den Einfluss der Bewegung eines Körpers auf die in ihm stattfindende Lichtfortpflanzung. Das soll aber erst an späterer Stelle geschehen. Es mag nur hier noch bemerkt werden, dass durch die astronomische Aberration die Lichtgeschwindigkeit im Weltraum, d. h. im Vacuum, bestimmt wird.

3. Methode von Fizeau. Die erste terrestrische Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit ist erfolgreich von Fizeau im Jahre 1849 angewandt worden. Von einer Lichtquelle P wird durch eine Sammellinse und eine schief gegen die Lichtstrahlen geneigte Glasplatte p (vgl. Figur 44) ein Bild in f entworfen. Die Strahlen werden sodann nach dem Durchtritt durch die Sammellinse L_1 parallel gemacht und gelangen zu der sehr weit (8,6 km) entfernten Sammellinse L_2. Es entsteht ein reelles Bild am Orte eines Hohlspiegels s, dessen Krümmungscentrum im Mittelpunkt der Linse L_2 liegt. Dieser Spiegel s reflectirt daher die Strahlen auf demselben Wege, auf welchem sie gekommen sind, so dass auch durch die reflectirten Strahlen ein reelles Bild in f entsteht. Dieses wird durch das Ocular o und durch die schiefe Glasplatte p hindurch betrachtet. Am Orte des reellen Bildes f wird nun der Rand eines Zahnrades derart angebracht, dass eine Lücke desselben

die Lichtstrahlen frei passiren lässt, ein Zahn sie dagegen abschirmt. Rotirt das Zahnrad mit sehr geringer Geschwindigkeit, so wird man das Bild abwechselnd sehen und nicht sehen. Rotirt das Rad schneller, so wird man in Folge der Dauer des Lichteindrucks das Bild ununterbrochen sehen. Bei weiterer Steigerung der Rotationsgeschwindigkeit des Rades verschwindet aber allmählich das Bild wieder, nämlich dann, wenn in der Zeit, welche das Licht zur Durcheilung des Hin- und Rückweges braucht, Zähne und Lücken ihre Stellung mit einander vertauscht haben. Bei doppelter Drehgeschwindigkeit tritt wieder maximale Helligkeit ein, bei dreifacher Drehgeschwindigkeit Dunkelheit, u. s f. Aus

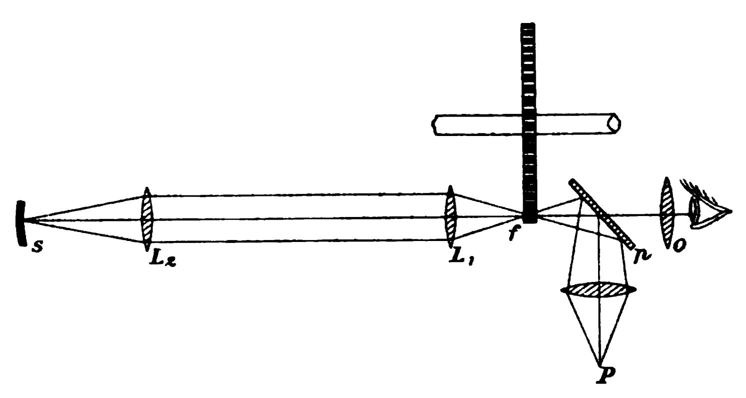


Fig. 44.

der Rotationsgeschwindigkeit des Rades, der Anzahl seiner Zähne, und der Distanz zwischen f und s kann man leicht die Lichtgeschwindigkeit berechnen. Fizeau wandte ein Rad von 720 Zähnen an. Die erste Verdunkelung trat bei 12,6 Umdrehungen pro Secunde ein. Da die Entfernung zwischen L_1 und L_2 8,633 km betrug, so berechnet sich daraus die Lichtgeschwindigkeit zu

$$V = 3,13 \cdot 10^{10}\ {}^{\text{cm}}/_{\text{sec.}}$$

Die Hauptschwierigkeit der Methode liegt in der Herstellung einer gleichmässigen Rotationsgeschwindigkeit und der Messung derselben. — Durch verfeinerte Messungen erhielt nach dieser Methode Cornu den Werth

$$V = 2,9995 \cdot 10^{10}\ {}^{\text{cm}}/_{\text{sec.}},$$

Young und Forbes den Werth:

$$V = 3,013 \cdot 10^{10}\ {}^{\text{cm}}/_{\text{sec.}}$$

4. Methode von Foucault. Diese Methode erfordert die geringste Distanz und ist in mehrfacher Hinsicht für die Optik von hoher Wichtigkeit. Eine Lichtquelle P sendet durch eine schief gestellte Glasplatte p (vgl. Figur 45) ihre Strahlen auf einen rotirenden Spiegel m. Bei geeigneter Lage desselben reflectirt derselbe die Strahlen durch eine nahe befindliche Linse L, so dass ein reelles Bild der Lichtquelle P am Orte eines um die grosse Strecke D entfernten Hohlspiegels s entsteht, dessen Krümmungscentrum am Orte des Spiegels m liegt. Der Hohlspiegel s reflectirt die Strahlen auf gleichem Wege, auf dem sie gekommen sind, falls innerhalb der Zeit, welche das Licht zum Durcheilen der Strecke $2D$ gebraucht hat, der Spiegel s seine Lage noch nicht merklich geändert hat. Es würde dann durch die an den Spiegeln m und s sowie an der Glasplatte p reflectirten Strahlen ein Bild P' von der Lichtquelle P entworfen werden. Wenn aber der rotirende Spiegel innerhalb der Zeit, welche das Licht zum Durcheilen der Strecke $2D$ gebraucht, seine Lage um den Winkel α geändert hat, so ist der nach p von m reflectirte Strahl um 2α gegen die Richtung des ursprünglich einfallenden Strahles gedreht, und es entsteht durch Reflexion an p ein seitlich abgelenktes Bild P'' der Lichtquelle P. Aus der Ablenkung $P'P''$, der Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels m, und aus den Entfernungen D und Δ kann man offenbar die Lichtgeschwindigkeit finden.

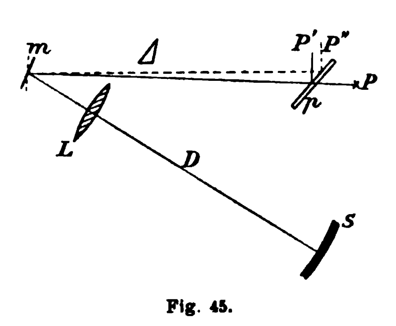


Fig. 45.

Wählt man $\Delta = 1$ m, $D = 4$ m, und macht der Spiegel m 1000 Umdrehungen in der Secunde, so wird die Verschiebung $P'P''$ gleich 0,34 mm. Foucault vergrösserte die Entfernung D von 4 m auf 20 m durch mehrfache hin und her gehende Reflexionen an fünf etwas gegen einander geneigten Spiegeln s.

Im Princip ist diese Methode ungünstiger als die Fizeau'sche, da hier ausser der Tourenzahl noch die Messung der kleinen Verschiebung $P'P''$ nothwendig ist. Michelson hat aber durch Vergrösserung der Entfernung D (bis auf 600 m) die Genauigkeit der Methode erheblich gesteigert, indem er dadurch auch bei mässiger Tourenzahl (etwa 200 in der Secunde) starke Verschiebungen $P'P''$

(bis zu 13 cm) erhielt. Bei der Foucault'schen Anordnung war eine erhebliche Vergrösserung von D nicht möglich, wenn nicht der Hohlspiegel s ungeheure Dimensionen besitzen sollte. Denn wenn auch stets ein Punkt der Lichtquelle P bei beliebig grossem D und kleinem Spiegel s zur Abbildung gelangt, so würde doch ein etwas seitlich gelegener Punkt P_1 der Lichtquelle, dessen einfallender Hauptstrahl von P_1 nach der Mitte von m geht, nicht mehr zur Abbildung kommen, da der Hauptstrahl nach dem Durchgang durch die Linse L schief gegen ihre Axe verläuft, und daher bei grossem D einen grossen Spiegel s zur Reflexion verlangt. Die Abbildung eines einzigen Punktes P einer Lichtquelle ergiebt aber eine zu geringe Lichtintensität. Diesen Uebelstand hat Michelson vermieden, indem er die Linse L nicht nahe am rotirenden Spiegel aufstellte, sondern in Brennweiten-Abstand. Dadurch werden auch die von seitlichen Punkten der Lichtquelle herrührenden Hauptstrahlen nach ihrem Durchtritt durch L axenparallel, man kann eine beliebige Distanz D wählen und einen planen Spiegel s senkrecht zur Axe von L zur Reflexion verwenden. Der Spiegel braucht nur die Grösse der Oeffnung der Linse zu besitzen. — Aus zahlreichen Messungen erhielt Michelson

$$V = 2{,}999 \ {}^{\text{cm}}/_{\text{sec.}}$$

Auch Newcomb erhielt nach der Methode des rotirenden Spiegels einen nahe damit übereinstimmenden Werth.

Als Mittelwerth der von Cornu, Michelson, Newcomb angestellten Messungen ergiebt sich

$$V = 2{,}9989 \cdot 10^{10} \ {}^{\text{cm}}/_{\text{sec.}}$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler von nur 1 : 10000. Das Resultat dieser terrestrischen Methoden ist viel zuverlässiger als das der astronomischen Methoden, weil bei letzteren die Fehler bei der Bestimmung der Sonnenparallaxe sich geltend machen.

Trotz dieses ausserordentlich grossen Werthes der Lichtgeschwindigkeit, welche 900000 mal so gross als die des Schalles in der Luft ist, braucht das Licht doch eine zum Theil bedeutende Zeit, um astronomische Entfernungen zu durchmessen. Dies sehen wir z. B. bei der Römer'schen Methode, ferner braucht das Sonnenlicht $8\frac{1}{4}$ Minuten, um zur Erde zu gelangen, das Licht selbst der nächsten Fixsterne dagegen viele Jahre (z. B. von α centauri $3\frac{3}{4}$ Jahre, vom Sirius 17 Jahre). Grosse Entfernungen im Weltraume pflegt man hiernach in Lichtjahren auszudrücken.

5. Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Medium und der Farbe. Die Lichtgeschwindigkeit ist von der Intensität der Lichtquelle unabhängig. Dies ist durch sehr empfindliche Interferenzversuche von Lippich und Ebert constatirt. Dagegen ist die Lichtgeschwindigkeit wohl abhängig von dem Medium, in welchem sich das Licht fortpflanzt. Foucault verglich mit seiner Methode die Lichtgeschwindigkeit in Luft und in Wasser, indem er vor dem rotirenden Spiegel m das Licht nach zwei seitlich aufgestellten Hohlspiegeln $s_1 s_2$ reflectiren liess, wobei vor den einen s_2 eine 2 m lange, mit Wasser angefüllte Röhre eingeschaltet war. Es ergab sich nun, dass das von letzterem Hohlspiegel s_2 reflectirte Bild bei Rotation des Spiegels m eine stärkere Verschiebung erlitt als das von s_1 reflectirte Bild, und dies ist ein Beweis, dass sich das Licht in Wasser langsamer fortpflanzt als in Luft.

Quantitative Bestimmungen über die Lichtgeschwindigkeit im Wasser und im Schwefelkohlenstoff hat Michelson ausgeführt; für das Verhältniss der Geschwindigkeiten in Luft und in Wasser fand sich 1,33, in Luft und in Schwefelkohlenstoff bei Anwendung weissen Lichtes 1,77. Erstere Zahl stimmt genau, letztere annähernd (s. w. u.) mit dem beobachteten Brechungsexponenten. Man nimmt an (und die Wellentheorie des Lichtes erfordert es), dass dieses Resultat für alle Körper gilt. Demnach muss auch die Lichtgeschwindigkeit in der Luft, entsprechend ihrem absoluten Brechungsexponenten $n_0 = 1{,}00029$, etwas kleiner sein als im Vacuum. Die oben mitgetheilte Zahl der Lichtgeschwindigkeit, die sich als Mittel aus den terrestrischen Versuchen ergiebt, enthält schon diese Reduction auf das Vacuum.

Da bei allen durchsichtigen Körpern der Brechungsexponent für rothe Strahlen kleiner ist als für blaue Strahlen, so ist zu erwarten, dass für die verschiedenen Farben die Lichtgeschwindigkeiten in ein und demselben Körper umgekehrt proportional mit der Aenderung seines absoluten Brechungsindex sein werden, falls die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum unabhängig von der Farbe ist. Dies ist nun auch in der That direct von Michelson nachgewiesen, indem er beim Wasser die Geschwindigkeit der rothen Strahlen um 1,4%, im Schwefelkohlenstoff um 2,5% grösser fand als die der blauen Strahlen. Dies stimmt annähernd mit der Dispersion dieser Körper.

Dass die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum unabhängig von der Farbe ist, folgt sehr scharf aus dem Umstande, dass bei Ein-

tritt oder Aufhören der Verfinsterung der Jupiters-Monde dieselben nie farbig erscheinen; ferner daraus, dass temporäre Sterne nicht in einer bestimmten Farbenfolge aufleuchten.

In Anbetracht der geringen Dispersion der Luft besteht in ihr praktisch kein Unterschied der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der verschiedenen Farben.

6. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellengruppe. Bei Untersuchung der Lichtgeschwindigkeit in einem stark dispergirenden Mittel, wie z. B. Schwefelkohlenstoff, ist indess noch eine Correction von Bedeutung, auf die zuerst Rayleigh hingewiesen hat. Wie wir nämlich im nächsten Kapitel sehen werden, führen die Interferenzerscheinungen mit Nothwendigkeit zu der Vorstellung, dass das Licht in der periodischen Aenderung einer gewissen Zustandsgrösse s im Aether oder im betreffenden Körper bestehe, die in Anbetracht der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Form geschrieben werden kann:

$$s = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right). \tag{2}$$

Dies ist der Ansatz für sogenannte ebene Wellen, welche sich nach der x-Axe mit der Geschwindigkeit V fortpflanzen. T bedeutet die zeitliche Periode von s, und von ihr hängt die Farbe des Lichtes ab, A ist die sogenannte Amplitude, von der die Lichtstärke abhängt. Zu unterscheiden von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der einzelnen Welle ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit U eines Wellenzuges. Bei der Fizeau'schen Methode z. B. wird durch die Rotation des Zahnrades an einer bestimmten Stelle g auf dem Wege der Lichtstrahlen abwechselnd das Licht abgeschnitten oder zugelassen. Fassen wir solch letzteren Moment ins Auge, so wird g trotz hoher Rotationsgeschwindigkeit des Zahnrades in Anbetracht der sehr kleinen Periode T noch von einer grossen Anzahl von Wellen getroffen. Durch das Experiment wird nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines solchen Complexes von Wellen gemessen. — Wir können mathematisch den Vorgang dieses Experimentes annähernd darstellen, wenn wir annehmen, dass sich zwei Wellen gleicher Amplitude, aber von etwas verschiedenen Perioden T_1 und T_2, sowie verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V_1 und V_2 über einander lagern. Man würde dann erhalten

$$s = A \cdot \left\{ \sin \frac{2\pi}{T_1}\left(t - \frac{x}{V_1}\right) + \sin \frac{2\pi}{T_2}\left(t - \frac{x}{V_2}\right)\right\} = \tag{3}$$

$$2A \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right) \cos \pi \left[t\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) - x\left(\frac{1}{T_1 V_1} - \frac{1}{T_2 V_2}\right)\right],$$

wobei gesetzt ist:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right), \quad \frac{1}{TV} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1 V_1} + \frac{1}{T_2 V_2}\right). \tag{4}$$

Die Formel (3) stellt nämlich jetzt einen Lichtzustand der Periode T mit periodisch veränderlicher Amplitude dar. Die Periode T_0 der Amplitudenänderung würde sein:

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}. \tag{5}$$

T_0 bestimmt sich aus der Rotationsgeschwindigkeit des Zahnrades und ist gross im Vergleich mit T_1 oder T_2. Daher muss T_1 nahezu gleich dem Werthe von T_2 sein.

Setzt man ferner

$$\frac{1}{T_0 U} = \frac{1}{T_1 V_1} - \frac{1}{T_2 V_2}, \tag{6}$$

so geht aus (3) hervor, dass an dem Orte $x = l$ eine maximale Amplitude des Wellenzuges um die Zeit $l : U$ später eintritt als am Orte $x = 0$. Daher ist U die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Wellenzuges, die direct bei der Fizeau'schen Methode gemessen wird.

Setzt man $T_2 = T_1 + dT_1$, $V_2 = V_1 + dV_1$, und entwickelt man bis auf Glieder erster Ordnung in den kleinen Werthen dT_1 und dV_1, so erhält man aus (5) und (6):

$$U = V_1\left(1 - \frac{T_1}{V_1}\frac{dV_1}{dT_1}\right). \tag{7}$$

In dieser Formel sind für T_1 und V_1 mit der gleichen Genauigkeit T und V, d. h. die Periode und Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einzelnen Welle, einzusetzen.

Die Formel (7) lehrt, dass die Geschwindigkeit U des Wellenzuges, wie sie direct beobachtet wird, etwas kleiner als die eigentliche Lichtgeschwindigkeit V ist, da in allen durchsichtigen Körpern V mit T wächst. Die Correction ist aber für Luft in Anbetracht der Kleinheit von $dV : dT$ unmerklich, dagegen wohl merklich im stark dispergirenden Schwefelkohlenstoff. Für diesen erreicht die Correction den Werth 7,5%. Da nun, wie eine eingehende Analyse zeigt, auch die Methode des rotirenden Spiegels den Werth U liefert, so ist verständlich, weshalb Michelson die Lichtgeschwindigkeit in Luft 1,77 mal grösser fand als in Schwefelkohlenstoff, obwohl ein Brechungsindex nur das Verhältniss 1,64 liefern würde. Vergrössert man aber 1,64 um 7,5%, so erhält man

in naher Uebereinstimmung mit Michelson's Beobachtung den Werth 1,76.

Auch die Römer'sche Methode liefert den Werth U der Gruppengeschwindigkeit, während die astronomische Aberration direct V liefert. Hier bestehen aber keine Unterschiede in beiden Grössen, da der Weltraum keine Dispersion, d. h. keine Abhängigkeit des V von der Farbe besitzt.

Kapitel II.

Interferenz des Lichtes.

1. Allgemeines. Unter Umständen nimmt man wahr, dass die Uebereinanderlagerung zweier genau oder nahezu paralleler Strahlenbündel nicht einen verstärkten Lichteffect ergeben, sondern sich in ihrer Wirkung stören können, so dass Dunkelheit entsteht. Solche Erscheinungen werden als Interferenz des Lichtes bezeichnet.

Es sind zwei Gattungen von Interferenzerscheinungen zu unterscheiden, je nachdem die Strahlenbündel nur regelmässige Reflexionen oder Brechungen erfahren haben, oder je nachdem sie von ihrer geraden Bahn durch sogenannte Lichtbeugung abgelenkt sind. Nur erstere Interferenzerscheinungen sollen in diesem Kapitel, letztere dagegen bei den Beugungserscheinungen besprochen werden. Indess werden auch einige Interferenzerscheinungen dieses Kapitels, nämlich die unter 3. und 4. behandelten, welches gerade die naheliegendsten Anordnungen zur Erzeugung von Interferenzen sind, durch Beugung etwas modificirt, während wir in 5., 7., 8. und 9. reine Interferenzerscheinungen kennen lernen werden, d. h. solche, bei welchen gar keine Lichtbeugung vorkommt.

2. Hypothesen über die Natur des Lichtes. Die Vorstellungen

von der Natur des Lichtes und die daran anknüpfenden mathematischen Erörterungen haben sich im Laufe der Zeit mehrfach verändert. Solange man noch nichts von der Unzerstörbarkeit der Energie wusste, wurde jedes Agens, welches ein gewisses Vermögen zeigte, sich fortzubewegen und unter wechselnden Bedingungen fortzubestehen, als eine Substanz betrachtet. Die geradlinige Bewegung des Lichtes unterstützte diese Auffassung; denn das Licht kann in seinen Wegen zwar aufgehalten werden, geht aber, wenn kein Hinderniss entgegensteht, im Allgemeinen in gerader Linie weiter. Es lag nahe, dieses Verhalten als Folge der Trägheit eines materiellen Körpers aufzufassen. Daher stellte Newton die Emissionstheorie des Lichtes auf, nach der das Licht aus kleinen materiellen Theilchen besteht, die mit sehr grosser Geschwindigkeit von den leuchtenden Körpern ausgestossen werden und in gerader Linie durch den Raum hinfliegen. Zur Erklärung der Brechung musste man annehmen, dass die stärker brechenden Körper eine grössere Anziehungskraft auf die Lichtkörperchen ausüben, so dass in dem Moment, wo ein solches Theilchen in schräger Richtung an der Oberfläche eines dichteren Mediums anlangt, es eine Anziehung erleidet, welche der zur Oberfläche senkrechten Componente seiner Geschwindigkeit einen grösseren Werth giebt, und dadurch die Richtung seiner Bahn dem Einfallslot nähert. Es müsste also danach die Geschwindigkeit des Lichtes im stärker brechenden Körper grösser sein als in seiner Umgebung. — Bildet dieser Punkt schon eine Widerlegung der Emissionstheorie — denn wir haben oben S. 113 gesehen, dass die Lichtgeschwindigkeit im Wasser kleiner ist als in Luft —, so häufen sich die Schwierigkeiten bei der Erklärung der Interferenzerscheinungen vom Standpunkt der Emissionstheorie noch ins Ungeheure. Gerade die Interferenzerscheinungen sind eine, man möchte fast sagen directe Bestätigung einer wesentlich anderen Hypothese über die Natur des Lichtes, nämlich der von Huygens ausgebildeten Undulationstheorie.

Nach dieser Theorie werden dem Lichte ähnliche Eigenschaften wie dem Schalle beigelegt: Es soll in der periodischen Aenderung einer gewissen Zustandsgrösse s des lichtdurchstrahlten Körpers (oder leeren Raumes) bestehen, welche sich mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzt, so dass, wenn man die Aenderungen von s auf der Bahn eines Lichtstrahles geometrisch durch eine Strecke darstellt, die Endpunkte derselben zu irgend einer Zeit auf einer wellenförmigen Curve liegen würden.

Worin diese Zustandsgrösse s besteht, deren periodische Aenderung das Wesen des Lichtes ausmacht, können wir vorläufig ganz unentschieden lassen. Bei den sogenannten mechanischen Lichttheorieen wird der Raum mit einem feinen elastischen Stoffe, dem Aether, erfüllt gedacht, und s wird als Verrückung der Aethertheilchen aus ihrer Gleichgewichtslage interpretirt. Eine solche specielle Annahme ist aber zunächst gar nicht nöthig. Es genügt, wenn wir, um die Lichterregung durch eine Quelle Q an einer beliebigen Stelle P des durchstrahlten Raumes analytisch darzustellen, die periodische Veränderlichkeit einer Zustandsgrösse s am Orte P einführen durch die Formel:

$$s = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right), \tag{1}$$

wobei t die Zeit bedeutet, während A, T und δ Constanten sind. A ist die sogenannte Amplitude, T die Periode des Lichtzustandes s. Letztere variirt mit der Farbe des Lichtes, von ersterer hängt die Lichtwirkung J[1]) an der Stelle P, auf welche sich s bezieht, also z. B. die Beleuchtungsstärke eines dort angebrachten Schirmes, ab, und zwar können wir setzen

$$J = A^2. \tag{2}$$

Aus jeder Theorie des Lichtes ergiebt sich nämlich, dass die Amplitude A des von einer punktförmigen Quelle ausgebreiteten Lichtes umgekehrt proportional zu der Entfernung r von der Quelle Q ist. Da nun erfahrungsmässig die Beleuchtungsstärke umgekehrt proportional zu r^2 ist (vgl. oben S. 73), so ist die Lichtwirkung (Intensität) J durch das Quadrat der Amplitude dargestellt.

Wenn sich das Licht von dem Punkte P nach einem um r entfernten Punkte P' mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt, so braucht es zum Durcheilen der Strecke r die Zeit $t' = r : V$. Wenn also der Lichtzustand in P durch (1) dargestellt ist, so wäre er in P' gegeben durch

$$s' = A' \sin \left(2\pi \frac{t - r/V}{T} + \delta\right), \tag{3}$$

denn s' ist zu einer um r/V späteren Zeit allemal in demselben Schwingungszustand, z. B. Nulllage, wie s im Punkte P. Der

---

1) Diese Lichtwirkung wird auch kurz als Intensität des Lichtes an der Stelle P bezeichnet. Zu unterscheiden von diesem Begriff ist der oben S. 76 definirte Begriff der Intensität i der Lichtquelle Q.

Schwingungszustand, d. h. das Argument der periodischen Function, wird die **Phase** des Lichtes genannt.

Wenn sich von einer punktförmigen Lichtquelle Q aus das Licht gleichförmig nach allen Seiten ausbreiten kann, so gilt offenbar der Ansatz (3) für jeden Punkt P', der die Entfernung r von Q besitzt. Irgend eine um Q als Centrum beschriebene Kugelfläche enthält also nur Punkte gleicher Phase. Solche Flächen, die Punkte gleicher Phase verbinden, heissen **Wellenflächen**. Die von einer punktförmigen Lichtquelle Q sich ausbreitenden Wellenflächen sind also concentrische Kugelflächen, die von Q austretenden Lichtstrahlen sind die Radien dieser Kugelflächen, stehen also senkrecht auf ihnen. Je weiter man sich von Q entfernt, um so ebener werden die Wellenflächen und um so paralleler die Lichtstrahlen. Ein Parallelstrahlbündel hat also senkrecht zu den Strahlen verlaufende, einander parallele, ebene Wellenflächen (**Wellenebenen**). Solche Wellen bezeichnet man daher auch kurz als **ebene Wellen**. Sie entstehen, wenn die Lichtquelle Q unendlich weit entfernt ist, oder wenn sich Q in dem Brennpunkte einer Sammellinse befindet, wodurch die austretenden Strahlen parallel gemacht werden.

Führt man die Bezeichnung ein:

$$T \cdot V = \lambda, \tag{4}$$

so wird (3) zu

$$s' = A' \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + \delta \right], \tag{5}$$

d. h. bei bestimmter Zeit ist s' hinsichtlich r periodisch mit der Periode λ. Diese Periode λ, mit der sich also zu irgend einer bestimmten Zeit alle möglichen Phasen stets wiederholen, wird die **Wellenlänge** des Lichtes genannt.

Die Tabelle auf S. 120 giebt die Wellenlängen in Luft für verschiedenes Licht und die angrenzenden Gebiete der Aetherschwingungen an. Diese Werthe sind aus Interferenz- oder Beugungserscheinungen ermittelt.

Nach der Wellentheorie ergiebt sich, wie wir sehen werden, die Erklärung von Interferenzerscheinungen in der einfachsten Weise. Dagegen macht es bedeutende Schwierigkeiten, die geradlinige Ausbreitung des Lichtes zu erklären; gerade die Analogie mit dem Schall weist ja auch auf einen scheinbaren Widerspruch, denn der Schall pflanzt sich nicht geradlinig fort. Diese Schwierigkeiten sollen erst im nächsten Kapitel näher behandelt und gehoben

Wellenlängen:

Lichtart	λ in mm
Aeusserstes ultraviolettes Licht, in Vacuumcamera photographirt[1]	0,000100
Aeusserstes ultraviolettes Licht, ohne Vacuumcamera photographirt	0,000185
Blaues Ende des sichtbaren Lichtes	0,000330
Blaue Wasserstofflinie	0,000486
Natriumlinie	0,000589
Rothe Wasserstofflinie	0,000656
Rothes Ende des (ausnahmsweise) sichtbaren Lichtes	0,000812
Längste bisher nachgewiesene Wärmewellen[2]	0,06
Kürzeste elektrische Wellen[3]	6

werden. Die Analogie mit dem Schall ergiebt auch noch andere Widersprüche, die die Erklärung der sogenannten Polarisationserscheinungen der Wellentheorie zunächst entgegenstellt und die lange Zeit die Wellentheorie trotz ihrer einfachen Erklärung der Interferenz nicht zur allgemeinen Anerkennung haben kommen lassen, bis dass man diese Widersprüche dadurch heben konnte, dass man eine engere Analogie mit den Schallerscheinungen fallen liess. Auf diesen Punkt soll ebenfalls erst später eingegangen werden. Hier möge aber zunächst noch kurz darauf hingewiesen werden, wie nach der Wellentheorie eine Brechung zu Stande kommt.

Wenn eine ebene Welle schief auf die Grenzfläche eines brechenden Körpers trifft, so muss die Wellenebene zum Einfallslot hin gebrochen werden, falls die Lichtgeschwindigkeit im Körper geringer ist als in seiner Umgebung, welche z. B. Luft sein möge. Denn wenn ein Punkt A der einfallenden Wellenebene gerade auf der Grenzfläche liegt, so möge ein anderer Punkt B der Wellenebene noch ausserhalb in der Luft liegen. Wenn nun die Welle sich von A aus langsamer fortpflanzt als zunächst von B, so ist klar, dass die Wellenebenen, welche ja diejenigen Punkte mit einander verbinden, nach denen sich das Licht in derselben Zeit fortgepflanzt hat, bei Eintritt in den brechenden Körper geknickt werden müssen, derart, dass die Normalen der Wellenebenen (die

1) V. Schumann, Wien. Ber. (II) 102, S. 415, 625; 1893. — Eder's Jahrb. 10, S. 42, 1896.

2) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. 65, S. 241, 1898.

3) P. Lebedew, Wied. Ann. 56, S. 1, 1895.

Lichtstrahlen) zum Einfallslot hin gebrochen werden. Aus der Wellentheorie ergiebt sich also in Uebereinstimmung mit der Erfahrung, dass die Lichtgeschwindigkeit im Wasser kleiner sein muss als in Luft. — Die genauere Bestimmung der Lage der gebrochenen Wellenebenen soll erst später bei Besprechung des Huygens'schen Principes und strenger im I. Kapitel des II. Abschnittes abgeleitet werden. Nur soll gleich hier ein wichtiges Resultat vorangestellt werden: Der Brechungsexponent beim Uebergang des Lichtes von einem Medium A zu einem Medium B ist gleich dem Verhältniss der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeiten in A und B.

Wir hatten oben S. 9 gesehen, dass die Fundamentalsätze der geometrischen Optik sich gemeinsam in dem Princip vom ausgezeichneten Lichtweg zusammenfassen lassen. Dasselbe gewinnt nach den Vorstellungen der Wellentheorie eine besonders anschauliche Bedeutung: Da der Brechungsexponent n eines Körpers gegen Luft umgekehrt proportional zur Lichtgeschwindigkeit im Körper ist, so ist der optische Weg nl proportional der Zeit, welche das Licht zum Durchlaufen der Strecke l braucht. Der Satz vom ausgezeichneten Lichtweg besagt also, dass das Licht zwischen zwei beliebigen Punkten P und P' denjenigen Weg wählt, für den alle unendlich nahe benachbarten Wege vom Licht in derselben Zeit durchmessen werden. Der (speciellere) Satz vom kürzesten Lichtweg drückt sich also hier aus als Satz von der schnellsten Ankunft des Lichtes.

Man kann sich demnach die Ausbildung eines bestimmten Strahlenganges vom Standpunkte der Wellentheorie folgendermassen denken: Von P pflanzen sich nach P' Elementarstörungen auf allen möglichen Wegen fort. Sie gelangen aber im Allgemeinen in P' zu verschiedenen Zeiten an, so dass die Phasen der einzelnen Elementarstörungen in P' nicht übereinstimmen und daher keine kräftige Summenwirkung erzielen. Eine solche wird aber sofort entstehen, sowie für ein unendlich dünnes Strahlenbündel die Fortpflanzungszeit zwischen P und P' die gleiche ist, so dass die Elementarstörungen in P' die gleiche Phase besitzen. Ein solches unendlich dünnes Strahlenbündel bezeichnet daher den thatsächlich stattfindenden Strahlengang, d. h. die Lichtwirkung in P' wird abgeschnitten durch Hindernisse, die man in den Weg eines solchen Strahlenbündels stellt.

Wenn auch diese Ueberlegungen sehr einleuchtende sind, so

ist ihre Beweiskraft doch nicht so gross, dass man nicht die Fundamentalgesetze der geometrischen Optik, z. B. den Satz der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes, noch auf eine strengere analytische Basis stellen müsste. Es muss vor allem die Frage gelöst werden: Weshalb besteht ein Unterschied in den Ausbreitungsgesetzen des Lichtes und des Schalles, obwohl doch beide Wellenbewegungen sind? Diese Frage soll aber erst im nächsten Kapitel gelöst werden.

Anstatt dass man an den Strahlengang anknüpft, um die Lichtwirkungen bei Anwesenheit irgend welcher brechender oder reflectirender Körper zu berechnen, kann man vom Standpunkte der Wellentheorie auch an die Deformation der Wellenfläche anknüpfen, welche durch die Körper herbeigeführt wird. Bei einer punktförmigen Lichtquelle P sind z. B. die Wellenflächen in der Umgebung von P Kugelflächen. Soll eine homocentrische Strahlenvereinigung in P' durch Brechung in einer Linse erreicht werden, so müssen die Wellenflächen nach dem Durchtritt durch die Linse concentrische Kugelflächen mit dem Centrum P' sein.

Da die Lichtstrahlen die Normalen der Wellenfläche sind, so ergiebt sich der Malus'sche Satz (cf. oben S. 13) vom Standpunkt der Wellentheorie von selbst, sowie man berücksichtigt, dass irgend welche Reflexionen und Brechungen nur den Effect haben, die Wellenflächen irgendwie zu deformiren.

3. Der Fresnel'sche Spiegelversuch. Vom Standpunkte der Wellentheorie erklären sich die Interferenzerscheinungen des Lichtes sofort durch das Princip der Superposition mehrerer Störungen des Lichtzustandes s. Wenn eine Lichtquelle Q_1 in einem Punkte P die Lichterregung

$$s_1 = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \tag{6}$$

hervorbringt, eine Lichtquelle Q_2 dagegen in demselben Punkte P die Lichterregung:

$$s_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right), \tag{7}$$

so ist nach dem Princip der Superposition, das anwendbar ist, falls die von Q_1 bezw. Q_2 nach P gehenden Lichtstrahlen nur eine geringe Neigung gegen einander haben,[1]) die resultirende Lichterregung

$$s = s_1 + s_2. \tag{8}$$

1) Dass diese Beschränkung nothwendig ist, erkennt man deutlich aus den späteren Entwickelungen, in denen nachgewiesen wird, dass der Lichzustand s eine gerichtete Grösse (ein Vector) ist.

Man kann nun diese Summe in die Form bringen

$$s = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \delta\right), \tag{9}$$

wenn man nämlich setzt:

$$\begin{aligned} A \cos \delta &= A_1 \cos 2\pi \frac{r_1}{\lambda} + A_2 \cos 2\pi \frac{r_2}{\lambda}, \\ A \sin \delta &= A_1 \sin 2\pi \frac{r_1}{\lambda} + A_2 \sin 2\pi \frac{r_2}{\lambda}. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Grösse A bedeutet die Amplitude der resultirenden Lichterregung.

Durch Quadriren und Addiren dieser beiden Gleichungen (10) erhält man die Intensität des resultirenden Lichtes im Punkte P zu

$$J = A^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1 A_2 \cos 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right). \tag{11}$$

Die Grösse $2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \Delta$ bedeutet nach (6) und (7) die Phasendifferenz der Einzelerregungen und man kann den Inhalt der Formel (11) allgemein in die geometrische Form kleiden (vgl. Fig. 46): Die resultirende Amplitude A ist gleich der dritten Seite eines aus den Einzelamplituden A_1 und A_2 mit dem Einschlusswinkel $\pi - \Delta$ construirten Dreiecks, wobei Δ die Phasendifferenz zwischen den beiden Einzelerregungen ist.

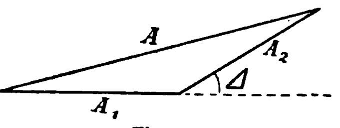


Fig. 46.

Aus diesem Satze ergiebt sich, dass je nach der Phasendifferenz Δ Maxima und Minima der Lichtintensität zu erwarten sind, erstere für $\Delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ etc., letztere für $\Delta = \pm \pi, \pm 3\pi$ etc. Völlige Dunkelheit muss in den Minimis eintreten, falls noch $A_1 = A_2$ ist.

Bei dem Fresnel'schen Spiegelversuch werden nun diese Verhältnisse dadurch realisirt, dass von einer Lichtquelle Q durch Reflexion an zwei sehr schwach gegen einander geneigten Spiegeln S und S' zwei virtuelle Lichtquellen Q_2 und Q_1 abgeleitet werden. In dem von diesen beiden Lichtquellen gemeinsam erleuchteten Raume[1]) treten Interferenzen auf. Nach obiger Rechnung herrscht in einem Punkte P dann Dunkelheit, falls

$$r_1 - r_2 = \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2} \text{ etc.} \tag{12}$$

1) Dieser Interferenzraum wird wesentlich kleiner, wenn ein Spiegel S etwas vorsteht vor dem anderen Spiegel S'. Daher ist darauf zu achten, dass die Spiegel mit ihren Kanten genau an einander anschliessen.

ist. Beschränken wir uns hinsichtlich der Punkte P auf eine zu $Q_1 Q_2$ parallelle Linie (vgl. Figur 47) und nennen wir d die Distanz zwischen Q_1 und Q_2, a den Abstand der Linie d von der Linie der P, und p den Abstand eines Punktes P von einem, der Mitte von Q_1 und Q_2 gegenüber liegenden Punkte P_0, so ist

$$r_1^2 = a^2 + (\tfrac{1}{2} d + p)^2, \quad r_2^2 = a^2 + (\tfrac{1}{2} d - p)^2,$$

d. h.
$$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 2dp,$$

oder, da $r_1 + r_2$ sehr nahe gleich $2a$ ist, wenn p und d klein gegen a sind, so folgt:

$$r_1 - r_2 = dp : a,$$

d. h. es tritt Dunkelheit ein an den Stellen:

$$p = +\frac{a}{d} \cdot \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{a}{d} \cdot \frac{3\lambda}{2}, \pm \frac{a}{d} \cdot \frac{5\lambda}{2} \text{ etc.} \tag{13}$$

Auf einem in der Distanz a von der Linie d gehaltenen Schirme werden demnach bei homogener Beleuchtung (einheitlichem λ) Interferenzfransen auftreten, die den constanten Abstand $a\lambda : d$ von einander besitzen.

Bei Beleuchtung mit weissem Licht entstehen auf dem Schirme farbige Fransen, da die verschiedenen im weissen Licht enthaltenen Farben wegen der Verschiedenheit ihrer Wellenlängen an ver-

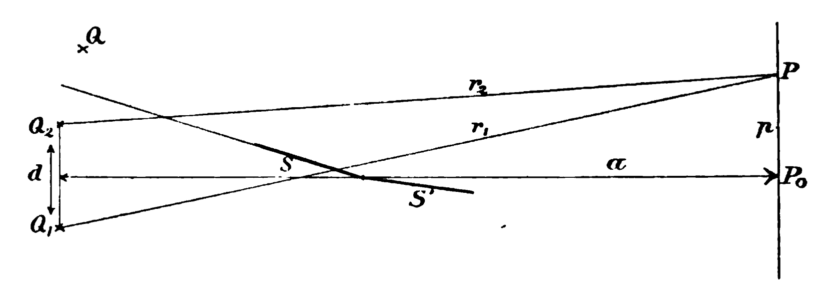


Fig. 47.

schiedenen Stellen des Schirmes maximale Helligkeit bezw. Dunkelheit erzeugen. Nur im mittleren Punkte P_0 entsteht keine Farbe, da in ihm für alle Farben maximale Lichtstärke besteht ($r_1 - r_2 = 0$).

Der Abstand d beider virtueller Lichtquellen berechnet sich aus der Lage der wirklichen Lichtquelle Q zu den Spiegeln und der Neigung derselben gegen einander. Diese Neigung muss sehr gering sein (wenige Bogenminuten), damit d so klein wird, dass die Interferenzfransen deutlich von einander getrennt sind. Da in

(13) nur das Verhältniss $a:d$ vorkommt, so braucht man nur den Winkel zu messen, unter dem von der Beobachtungsstelle P_0 aus die beiden Bilder Q_1 und Q_2 erscheinen.

Anstatt dass man die Interferenzfigur auf einem Schirme auffängt, kann man sie auch ohne denselben mit Hülfe einer Lupe betrachten, oder auch mit dem Auge direct, wenn man dasselbe in den Gang der von Q_1 und Q_2 ausgehenden Strahlen bringt, und auf einen Punkt P im Abstand a von den Lichtquellen accommodirt.[1]) Figur 48 zeigt eine Anordnung, mit deren Hülfe man quantitative Messungen, z. B. die Wellenlängenbestimmung, ausführen kann:

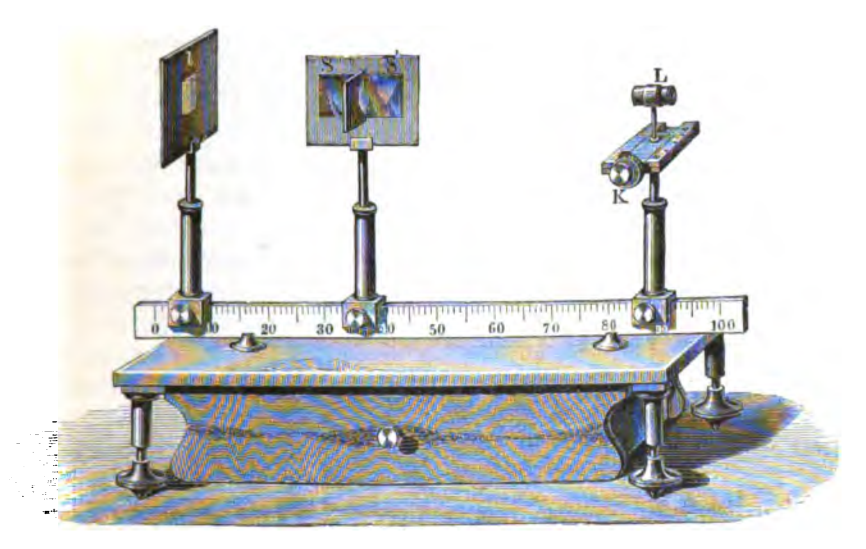


Fig. 48.

Eine Cylinderlinse l erzeugt von einer Lampe eine reelle Lichtlinie. Dieselbe dient als Lichtquelle Q und lässt Strahlen auf die beiden Spiegel S und S' fallen, deren Berührungskante parallel zur Axe der Cylinderlinse gerichtet wird. Senkrecht zu den Spiegeln ist noch ein

1) Wenn man nämlich mit oder ohne Lupe auf einen Punkt P accommodirt, so gelangen die beiden interferirenden Strahlenbündel mit derselben Phasendifferenz zum Bilde des Punktes P auf der Netzhaut, wie sie in P selbst besteht, da für alle von P ausgehenden Strahlen ihre optische Länge bis zum Netzhautbilde dieselbe ist. Es ist daher auch auf der Netzhaut die Beleuchtungsstärke gleich Null, wenn sie es auf einem in P befindlichem Schirme sein würde.

Schirm zur Abhaltung des direct von Q kommenden Lichtes befestigt. Die Interferenzfransen werden mit der mit Fadenkreuz versehenen Lupe L beobachtet, die Lupe ist mit Hülfe der Mikrometerschraube K verschiebbar.

Es ist die Frage, ob man, anstatt durch Spiegelung von einer Lichtquelle zwei benachbarte herzustellen, nicht Interferenzen dadurch einfacher erzeugen kann, dass man dicht vor eine ausgedehntere Lichtquelle einen Schirm mit zwei nahe benachbarten Löchern stellt, welche dann als Lichtquellen wirken.

In diesem Falle erhält man aber keine Interferenz, auch wenn man eine homogene Farbe, z. B. eine durch Kochsalz gefärbte Alkoholflamme benutzt. Wenn nämlich zwei Lichtquellen interferiren sollen, so müssen ihre Phasen zu jeder Zeit entweder genau übereinstimmen, oder mindestens eine constante Differenz besitzen. Man pflegt solche Lichtquellen als cohärente zu bezeichnen. Man erhält dieselben stets, wenn aus einer ursprünglichen Lichtquelle durch irgend welche optische Anordnungen zwei abgeleitet werden. Bei incohärenten Lichtquellen dagegen, wie sie zwei verschiedene Punkte einer Flamme sind, ist zwar die Phasendifferenz für eine grosse Anzahl von Perioden constant, da wir weiter unten sehen werden, dass eine Lichtquelle homogener Farbe eine grosse Anzahl Schwingungen mit vollkommen constanter Periode ausführt, indess treten doch Unregelmässigkeiten der Schwingung auf innerhalb sehr kurzer Zeiten, die im Auge noch keine getrennten Lichteindrücke hervorrufen. Daher variirt bei incohärenten Lichtquellen ihre Phasendifferenz innerhalb solcher, über viele Millionen von Schwingungen sich erstreckender Zeiten. Dies verhindert das Auftreten von Interferenzen.

Wie schon oben (S. 116) bemerkt wurde, ist bei diesem einfachen Interferenzversuch Beugung des Lichtes nicht ganz ausgeschlossen. Sämmtliche Begrenzungen der Spiegel können dazu Veranlassung geben, namentlich aber die Kante, in der sie sich berühren. Um diesen Einfluss zu vermeiden, empfiehlt sich eine erhebliche Neigung des einfallenden Lichtes gegen die Spiegel (45^0 zum Beispiel), sowie Beobachtung in grösserer Distanz von denselben. Auch darf die Neigung der Spiegel gegen einander nicht zu klein genommen werden. Man erreicht dadurch, dass von dem Beobachtungspunkte P die Randstrahlen, welche von Q_1 bezw. Q_2 nach der Berührungskante der Spiegel zielen, möglichst weit entfernt sind.

4. Modificationen des Fresnel'schen Spiegelversuches. Die

in 3. angestellten Betrachtungen sind typisch für alle Fälle, bei denen man Interferenzen erzeugt durch Herstellung zweier cohärenter Lichtquellen Q_1 und Q_2 aus einer einzigen Q. Diese Herstellung kann noch in verschiedenen anderen Arten geschehen. Besonders bequem ist das Fresnel'sche Biprisma (vgl. Figur 49, das Biprisma ist im Querschnitt gezeichnet und schraffirt. Das Licht fällt von links ein), bei dem durch Brechung aus einer der Prismenkante B parallelen Lichtlinie Q zwei cohärente Lichtlinien Q_1 und Q_2 entstehen.

Stellt man ein solches Prisma mit verticaler Kante B auf das Tischchen eines Spectrometers, verwendet man ein Collimatorrohr mit verticalem Spalt zur Beleuchtung (unendlich entfernte Lichtquelle Q), und sieht man zunächst mit dem Fernrohre des Spectrometers durch das Biprisma zum Spalt, so erblickt man zwei getrennte Spaltbilder. Der Winkel α, unter dem dieselben erscheinen, wird an der Spectrometertheilung abgelesen, wenn man nach einander beide Spaltbilder mit dem Fadenkreuz des Fernrohres durch Drehen desselben in Coincidenz bringt. Dieser Winkel α ist der Supplementwinkel zu dem Winkel ABC (vgl. Figur 49), den die beiden gebrochenen Wellenebenen AB, BC nach dem Durchgang durch das Prisma mit einander bilden. — Nimmt man nun das Fernrohr fort, so beobachtet man mit einer auf einen Punkt P eingestellten Lupe Interferenz, wenn nach (12) ist $r_1 - r_2 = \pm\, {}^1\!/_2\, \lambda$, ${}^3\!/_2\, \lambda$ etc. Dabei sind r_1 und r_2 die Entfernungen des Punktes P von den Wellenebenen AB bezw. BC. Aus der Figur folgt

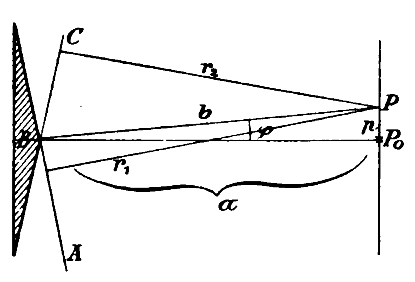


Fig. 49.

$$r_1 = b \sin (ABP),\quad r_2 = b \sin (CBP),$$

daher

$$r_1 - r_2 = 2b \cos \frac{ABC}{2} \cdot \sin \varphi.$$

Der Winkel φ ist sehr klein, daher $\sin \varphi = tg\, \varphi = p : a$. Ferner ist $ABC = \pi - \alpha$, und da, wenn wir bis auf erste Ordnung in φ gehen, $b = a$ zu setzen ist, und $\sin \alpha$ gleich α ist, so folgt schliesslich

$$r_1 - r_2 = \alpha \cdot p.$$

Der relative Fransenabstand ist daher $\lambda : \alpha$, d. h. von a unab-

hängig. Da α mit dem Fernrohr beobachtet ist, so bietet die Messung des Fransenabstandes ein bequemes Mittel zur Bestimmung von λ.

Aehnlich wie das Fresnel'sche Biprisma wirken die Billet-

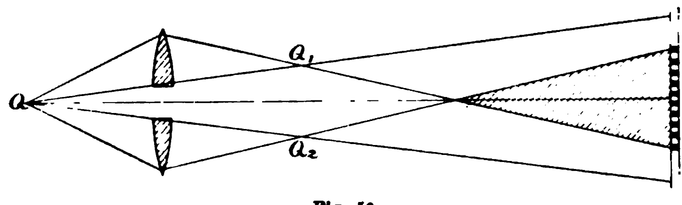


Fig. 50.

schen Halblinsen (vgl. Figur 50), welche von einer Quelle Q zwei reelle (oder virtuelle) Bilder erzeugen. Der Interferenzraum ist in der Figur schraffirt.

5. Newton'sche Ringe und Farben dünner Blättchen. Alle durchsichtigen Körper erscheinen lebhaft gefärbt, wenn man sie in genügend dünne Schichten bringt. Am leichtesten lässt sich dies an Seifenblasen zeigen, auch die Farben dünner Oelschichten auf Wasser, oder die Anlauffarben beim Erhitzen eines blanken Metallstückes gehören hierher.

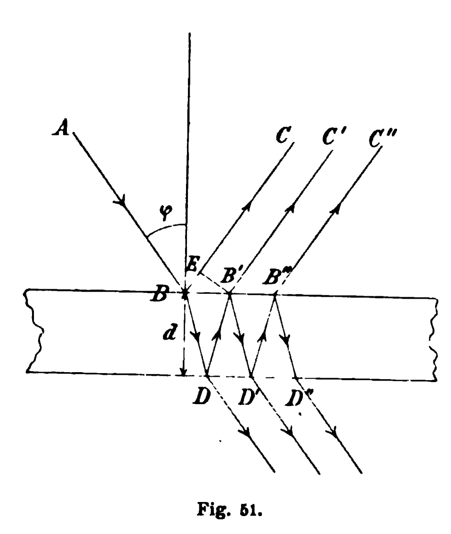


Fig. 51.

Diese Erscheinungen lassen sich sofort erklären, sowie man sie als Interferenz des Lichtes auffasst, welches an der Vorderfläche des Blättchens reflectirt wird, mit dem an der Hinterfläche reflectirten.

Betrachten wir zunächst homogenes Licht, welches als Strahl AB (vgl. Figur 51) auf eine dünne planparallele Platte der Dicke d schief (unter dem Einfallswinkel φ) einfällt. An der Vorderfläche der Platte wird der Strahl zerlegt in einen reflectirten BC, und in einen gebrochenen BD. Letzterer wird nun wiederum an der Hinterfläche reflectirt nach B' hin, und gelangt als Strahl $B'C'$ aus der

Platte. Das Wesentliche der Erscheinung können wir discutiren, wenn wir auf die Interferenz der beiden Strahlen BC und $B'C'$ achten. Werden dieselben in einem Netzpunkte vereinigt, d. h. accommodirt man auf Unendlich, so nimmt man grösste Dunkelheit wahr, wenn der Strahl BC um π, oder 3π, oder 5π etc. in der Phase verschieden ist vom Strahl $B'C'$.

Allerdings sind für eine vollständige Berechnung der reflectirten Gesammtlichtintensität auch noch die wiederholten Reflexionen zu berücksichtigen, welche DB' wiederum an der Vorderfläche, $B'D'$ wiederum an der Hinterfläche etc. erleidet. Es soll dies aber erst später (II. Abschnitt, Kapitel II, § 11) geschehen. Man kann aber von vornherein erwarten, dass durch die Berücksichtigung der wiederholt reflectirten Strahlen das Resultat nicht wesentlich geändert wird, da die Lichtstärke dieser Strahlen viel geringer ist als die der nur einmal reflectirten Strahlen BC und $B'C'$.

Wenn man nun von B' ein Lot $B'E$ auf BC fällt, so würden die beiden Strahlen BC und $B'C'$ keine Phasendifferenz gegen einander besitzen, wenn die Phase in B' dieselbe wäre wie in E. Die Strahlen würden dann beide mit derselben Phase in einem Netzhautpunkte vereinigt werden. Die Phasendifferenz in den Punkten E und B' ist daher identisch mit der Phasendifferenz der Strahlen BC und $B'C'$.

Die Phasendifferenz zwischen B' und E ist aber:

$$\varDelta = 2\pi \cdot \left(\frac{BD + DB'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} \right),$$

wenn mit λ' die Wellenlänge des Lichtes in der Platte, mit λ die Wellenlänge in der Umgebung bezeichnet wird. Nun ist, falls mit χ der Brechungswinkel bezeichnet wird

$$BD = B'D = d : \cos\chi, \; BE = BB' \sin\varphi = 2d \operatorname{tg}\chi \sin\varphi,$$

ferner $\lambda : \lambda' = n$ (Brechungsindex der Platte gegen Umgebung). So wird daher

$$\varDelta = \frac{2\pi \,.\, 2d}{\lambda'} \left(\frac{1}{\cos\chi} - \operatorname{tg}\chi \frac{\sin\varphi}{n} \right),$$

oder, wenn man nach dem Brechungsgesetz $\sin\varphi = n \sin\chi$ setzt:

$$\varDelta = \frac{2\pi \,.\, 2d}{\lambda'} \cos\chi. \tag{14}$$

Dieser Ausdruck ist aber noch durch ein wesentliches Zusatzglied zu corrigiren. (14) giebt die Phasendifferenz an, wie sie in den beiden Strahlen BC und $B'C'$ durch verschieden lange optische Wege entstanden ist. Es besteht aber noch ein anderer Unter-

schied zwischen beiden Strahlen: BC hat eine Reflexion erlitten bei Uebergang des Lichtes von Luft zur Platte, $B'C'$ dagegen bei Uebergang von Platte zu Luft. Schon mit dem Vorgang der Reflexion wird im Allgemeinen eine Phasenänderung verknüpft sein; da die Reflexion der beiden Strahlen BC und $B'C'$ nun aber unter verschiedenen Umständen erfolgt, so kommt zu der durch (14) ausgedrückten Phasendifferenz noch eine Grösse Δ' hinzu, welche lediglich durch die Reflexionen an sich, unabhängig von der Weglänge der Strahlen, entstanden ist. Wir werden demnach schreiben:

$$(15) \qquad \Delta = 2\pi \cdot \frac{2d}{\lambda'} \cos \chi + \Delta'.$$

Ueber diese Grösse Δ' können wir eine bestimmte Aussage machen, ohne uns in die Theorie des Lichtes weiter vertiefen zu müssen. Nehmen wir einmal den Fall an, dass die Dicke d der Platte allmählich zur Grenze $d = 0$ übergeht. Nach (14) würden wir dann keine Phasendifferenz zwischen beiden Strahlen BC und $B'C'$ erhalten, sie müssten also sich gegenseitig verstärken. Dies kann aber nicht eintreten, weil eine Platte der Dicke $d = 0$ überhaupt nicht mehr vorhanden ist, die Homogenität des Raumes würde gar nicht mehr gestört werden (wenn wir annehmen, was wir thun wollen, dass das Medium oberhalb und unterhalb der Platte das gleiche, z. B. Luft, ist), und daher kann dann überhaupt kein reflectirtes Licht entstehen. Denn dasselbe ist immer nur dann möglich, wenn eine Störung der Homogenität des Raumes vorhanden ist, sonst würde sich ja Licht nie ungeschwächt durch einen homogenen, durchsichtigen Raum, wie z. B. das Vacuum ist, fortpflanzen können. — Für $d = 0$ muss also völlige Interferenz der beiden Strahlen BC und $B'C'$ eintreten, so dass wir überhaupt kein reflectirtes Licht erhalten. Da in diesem Falle ($d = 0$) $\Delta = \pm \pi$ sein muss, so ergiebt dies nach (15) für Δ' die Bedingung:

$$(16) \qquad \Delta' = \pm \pi.$$

Ob wir $\Delta' = + \pi$, oder $- \pi$, oder $+ 3\pi$ etc. annehmen, ist für diese Betrachtungen ganz gleichgiltig, da die Zufügung von 2π zu der Phase eines Strahles keinerlei Aenderung in seinem Schwingungszustande und seiner Natur hervorbringt.

In Rücksicht auf (16) finden wir also nach (15) grösste Dunkelheit für den Fall, dass ist:

$$(17) \qquad \frac{2d}{\lambda'} \cos \chi = 0, 1, 2, \ldots$$

Im durchgehenden Lichte muss die Platte ebenfalls Interferenzwirkung zeigen. Da durch Absorption kein Licht in der Platte verloren gehen soll, so muss das durchgehende Licht die volle Intensität des einfallenden Lichtes haben, wenn das reflectirte Licht die Intensität Null hat. Dagegen muss das durchgehende Licht maximale Schwächung zeigen, falls das reflectirte Licht ein Maximum der Intensität zeigt. Dies tritt ein für Plattendicken d, welche gerade in der Mitte zwischen den nach (17) folgenden Plattendicken liegen, dann sind nämlich die beiden reflectirten Strahlen BC und $B'C'$ von gleicher Phase. Indess ist die Schwächung des durchgehenden Lichtes nie sehr stark, weil das reflectirte Licht hinter der vollen Intensität des einfallenden Lichtes stets sehr zurückbleibt. Die quantitativen Verhältnisse hierüber können erst bei weiterem Eingehen auf die Theorie abgeleitet werden (cf. unten II. Abschnitt, Kapitel II).

Wenn man an Stelle einer planparallelen Platte eine keilförmige verwendet, so muss dieselbe im reflectirten Licht von schwarzen Interferenzfransen, die parallel zur Keilkante verlaufen, durchzogen erscheinen und zwar liegen dieselben an den Stellen, deren Dicke d der Formel (17) entspricht. Damit die Orte der Fransen getrennt erscheinen, muss in Anbetracht der Kleinheit von λ' der Keilwinkel sehr gering sein. Indess könnte man solche Fransen nicht wahrnehmen, wenn die beleuchtende Lichtquelle nicht eine gewisse Ausdehnung besitzt, denn bei einer nur punktförmig begrenzten Lichtquelle würde überhaupt nur von einer einzigen Stelle des Keiles Licht in ein bestimmt gelegenes, auf Unendlich accommodirtes Auge durch Reflexion gelangen können.

Bei gewisser Accommodirung des Auges sind aber bei einer ausgedehnten Lichtquelle scharfe Interferenzfransen wahrzunehmen. Um die Sichtbarkeit der Interferenzfransen in diesem Falle beurtheilen zu können, ist an dem schon oben ausgesprochenen Grundsatze festzuhalten, dass nur diejenigen Lichtstrahlen interferenzfähig sind, welche von ein und demselben Punkt der Lichtquelle ausgehen, da nur solche Lichtstrahlen cohärente sind.

Es ist nun klar, dass sich in jedem Punkte P, der in dem vor der Platte oder dem Keil befindlichen Raume beliebig gelegen ist, zwei cohärente, von einem Punkte Q der (im Endlichen gelegenen) Lichtquelle ausgehende Strahlen, von denen der eine QB an der Vorderfläche, der andere QB' an der Hinterfläche reflectirt ist,

schneiden werden. Diese Strahlen gehen vom Punkte Q im Allgemeinen in etwas verschiedener Richtung aus, sie werden aber auf einer Stelle der Netzhaut vereinigt, wenn das Auge auf die Schnittstelle P accommodirt. Es kann also in diesem Falle eine Interferenz dieser beiden Strahlen wahrgenommen werden. — In demselben Punkte P schneiden sich nun aber auch noch beliebig viele andere cohärente Strahlenpaare, die von anderen Punkten Q', Q'' etc. der Lichtquelle ausgehen. Diese Strahlen durchsetzen aber im Allgemeinen den Keil an verschiedenen Stellen und in verschiedener Neigung, und haben daher in P verschiedene Phasendifferenzen. Dadurch wird die Interferenzerscheinung für ein auf P accommodirtes Auge undeutlich, oder verschwindet eventuell ganz. Die Interferenz wird nur dann mit grösster Deutlichkeit wahrgenommen, wenn alle die von den verschiedenen Punkten der Lichtquelle ausgehenden, sich in P schneidenden cohärenten Strahlenpaare in P dieselbe Phasendifferenz besitzen. Dadurch bestimmen sich die Orte P der deutlichsten Sichtbarkeit der Interferenzfigur.

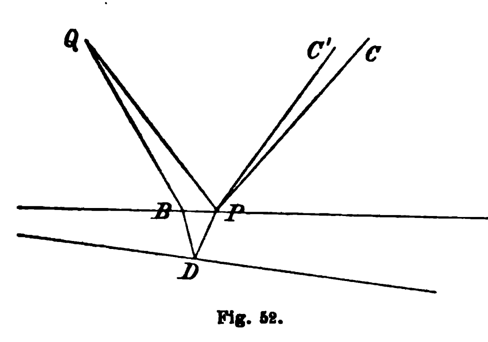


Fig. 52.

Diese Orte P bilden eine zusammenhängende Fläche, die complicirte Gestalt und Lage besitzt, wenn das einfallende Licht beliebig schief gerichtet ist.

Bei nahezu senkrecht einfallendem Licht ist aber die Lösung für einen dünnen Keil einfach: dann treten die Interferenzen bei ausgedehnter Lichtquelle am deutlichsten auf, wenn das Auge auf den Keil selbst, z. B. seine Vorderfläche, accommodirt. In der That accommodirt man auf einen Punkt P des Keiles (vgl. Figur 52), so sind QPC und $QBDPC'$ zwei cohärente Strahlen, die in einem Netzhautpunkte vereinigt werden. Dieselben haben eine gewisse Phasendifferenz, die nur von der Dicke d des Glaskeiles an der Stelle P abhängt, und die sich nach (15) und (16), da φ und daher (bei geringem Keilwinkel) auch χ nur wenig von Null verschieden sein soll, schreibt

$$\Delta = 2\pi \frac{2d}{\lambda'} + \pi.$$

Dieselbe Phasendifferenz besitzt aber jedes von einem anderen Punkte $Q'Q''$ etc. der Lichtquelle kommende cohärente Strahlenpaar, welches sich in P schneidet, da für alle Strahlen der Einfallswinkel φ und also auch χ genügend klein sein soll, so dass man $\cos \chi = 1$ setzen kann.[1])

Bei nahezu senkrechter Beleuchtung durch eine ausgedehnte Lichtquelle liegt also die Interferenzfigur im Keil selbst, z. B. seiner Vorderfläche.[2])



Fig. 53.

Zur Beobachtung der Interferenzen bei wechselnden Dicken einer dünnen Schicht legte Newton eine schwach gekrümmte Convexlinse auf eine ebene Glasfläche. Die dünne, zwischen beiden

1) Dies ist aber nur gestattet, wenn die Keildicke d nicht zu beträchtlich ist. Wenn d sehr gross wird, z. B. viele Tausende von Wellenlängen beträgt, so ist doch für die verschiedenen Strahlenpaare ihr wechselndes χ in Rücksicht zu ziehen. Dann wird aus diesem Grunde die Interferenz undeutlich.

2) Ob man die Vorder- oder Rückfläche des Keiles ins Auge fasst, ist gleichgiltig, da der Keil überhaupt dünn sein muss (cf. vorige Anmerkung).

Gläsern befindliche Luftschicht giebt dann Anlass zu concentrischen Interferenzkreisen, deren Durchmesser wie die Quadratwurzeln aus den geraden Zahlen zunehmen. Fig. 53 giebt eine Ansicht der Erscheinung bei Beleuchtung mit weissem Licht. Bei homogener Beleuchtung würden sich die Ringe bis an den Rand der Linse erstrecken.

Bei weisser Beleuchtung muss eine dünne Platte farbig erscheinen, denn es fehlen im reflectirten Licht alle diejenigen Farben, deren Wellenlänge λ der Gleichung (17) genügt. Wenn nun aber die Dicke d der Platte sehr beträchtlich ist, so erstrecken sich die fehlenden Farben in naher Reihenfolge gleichmässig über das ganze Spectrum, die übrig bleibenden Farben ergeben daher ein von Weiss nicht zu unterscheidendes Gemisch. Ebenso ist die Färbung der Platte nicht intensiv, wenn sie zu dünn ist, weil dann alle Farben entweder stark oder schwach vertreten sind. Für gewisse mittlere Dicken, die für eine Luftplatte etwa zwischen 0,00016 mm und 0,0008 mm liegen, sind die Färbungen am intensivsten. Diese Farben sind natürlich keine reinen Spectralfarben, sondern sie entstehen aus dem ganzen Spectrum durch Fehlen gewisser Farbenbereiche. — Bei dem Newton'schen Farbenglase zeigen die Ringe die sämmtlichen Farben dünner Blättchen neben einander.

Wenn man eine Platte gegen das einfallende Licht schiefer neigt, so wechselt dadurch ihre Farbe. Denn wegen des in (17) auftretenden Factors $\cos \chi$ muss ein schieferer Einfall des Lichtes denselben Effect haben, als ob bei senkrechter Incidenz die Dicke d der Platte sich verminderе.

Im durchgehenden Licht ist die Farbe einer Platte complementär zu der Farbe im reflectirten Lichte, weil beide Lichtintensitäten sich zu der einfallenden Intensität ergänzen müssen. Indess ist die Färbung im durchgehenden Lichte nie so gesättigt als im reflectirten Lichte, weil (vgl. oben S. 131) nicht, wie im reflectirten Licht, eine Farbe im durchgehenden Lichte völlig fehlen kann, sondern sie kann nur geschwächt erscheinen.

Die Farbe, welche ein dünnes Blättchen im reflectirten Lichte zeigt, ist ein sehr empfindliches Mittel, um seine Dicke zu bestimmen, falls man den Brechungsindex des Blättchens kennt. Man bedarf dazu nur der Kenntniss der Dicke einer Luftschicht, welche die gleiche Interferenzfarbe zeigt. Diese Kenntniss kann man sich aus den Farben der Newton'schen Ringe oder, wie wir später erkennen werden, durch krystall-optische Mittel verschaffen.

Eine weitere Anwendung haben die hier besprochenen Interferenzen zur Bestimmung der thermischen Ausdehnung der Körper mit Hülfe des Abbe-Fizeau'schen Dilatometers gefunden. Das Princip dieses Apparates[1]) ist, die geringen Distanzänderungen, welche zwischen den polirten Oberflächen O_1 und O_2 eines Körpers und einer Glasplatte in Folge der thermischen Ausdehnung des Körpers eintreten, zu messen mit Hülfe der Veränderung der Interferenzfigur, die man zwischen beiden Flächen O_1 und O_2 zu Stande kommen lässt.

6. Achromatisirung der Interferenzstreifen. Damit ein Interferenzstreifen achromatisch erscheint, ist nothwendig, dass an seinem Orte die Phasendifferenz Δ der interferirenden Strahlen für alle Farben dieselbe ist. Ob der Streifen dann hell oder dunkel erscheint, hängt von dem Werthe von Δ ab. So ist beim Newton-schen Farbenglase der centrale Fleck farblos schwarz im reflectirten Lichte, weil für alle Farben die dort interferirenden Strahlen die Phasendifferenz $\Delta = \pi$ besitzen. Wenn man aber die Interferenzfigur durch ein Glasprisma betrachtet, so bleibt nicht mehr der centrale Fleck achromatisch, sondern die achromatische Stelle liegt dort, wo Δ gar nicht oder möglichst wenig mit der Farbe variirt, d. h. wo der Differentialquotient ist

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = 0, \tag{18}$$

falls λ die Wellenlänge der Farbe in Luft ist.[2]) Bei starker Dispersion des Glasprismas kann der Ort der achromatischen Stelle erheblich vom Centralfleck abweichen.

Falls man vor die eine Seite eines Fresnel'schen Biprismas eine dünne Platte, z. B. Glimmerblättchen, vorschiebt, so ändert sich ebenfalls die Interferenzfigur. Auch bei dieser Anordnung tritt ein achromatischer Streifen nicht dort auf, wo $\Delta = 0$ ist, wie es ursprünglich war ohne vorgeschobenes Blättchen, sondern an der Stelle, die der Gleichung (18) entspricht. Es kommt hier in Betracht, dass das Blättchen in Folge der Abhängigkeit seines Brechungsindex von der Farbe (Dispersion) den verschiedenen Farben verschiedene Phasenverzögerungen ertheilt.

---

1) Betreffs näherer Beschreibung vgl. Pulfrich, Ztschr. f. Instrumentenkunde 1893; oder Müller-Pouillet (Lummer), Optik, S. 924.

2) Strenger müsste die Gleichung geschrieben sein als $\frac{\partial \Delta}{\partial T} = 0$, wobei T die Periode ist. Wenn man aber absieht von der geringen Dispersion der Luft, so ist dies mit (18) identisch.

7. Der Interferentialrefractor. Interferenzen geringen Gangunterschiedes, welche bei Anwendung weissen Lichtes sichtbar sind, kann man ausser an sehr dünnen Lamellen auch an dicken Platten erzielen, wenn man Differenzwirkungen an zwei Platten hervorbringt. Die Jamin'sche Construction besteht darin, dass zwei gleich dicke planparallele Glasplatten P_1 und P_2 (vgl. Figur 54) in einem grösseren Abstand nahezu parallel aufgestellt werden. Ein Lichtstrahl LA zerlegt sich in die Strahlen $ABCDE$ und $AB'C'D'E'$, welche zur Interferenz gelangen können, wenn die beiden austretenden Strahlen DE und $D'E'$ wieder in einem Punkte vereinigt werden. Da diese beiden Strahlen einander parallel sind, so muss also das die Strahlen DE bezw. $D'E'$ auffangende Auge auf Unendlich accommodiren, oder sie müssen durch ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr vereinigt werden. Zur Erzielung möglichster Lichtstärke stellt man die Lichtquelle in die Brennebene einer Sammellinse, so dass ein Bündel von Parallelstrahlen LA auf die Platte P_1 auffällt. Die Platten sind ferner an ihren Hinterflächen zweckmässig versilbert. Die Phasendifferenz zwischen den Strahlen $C'D'$ und AB ist nach (15) (S. 130) $\frac{4\pi d}{\lambda'} \cos\chi_1 + \varDelta'$, wobei χ_1 den Brechungswinkel in der Platte P_1 bedeutet. Die Strahlen $D'E'$ und DE erhalten nun ausserdem noch die Phasendifferenz $-\left(\frac{4\pi d}{\lambda'} \cos\chi_2 + \varDelta'\right)$, wobei der Brechungswinkel χ_2 in der Platte P_2 ein wenig abweicht vom Winkel χ_1, da beide Platten P_1 und P_2 nicht genau einander parallel sein sollen. Die schliessliche Phasendifferenz von $D'E'$ und DE ist also:

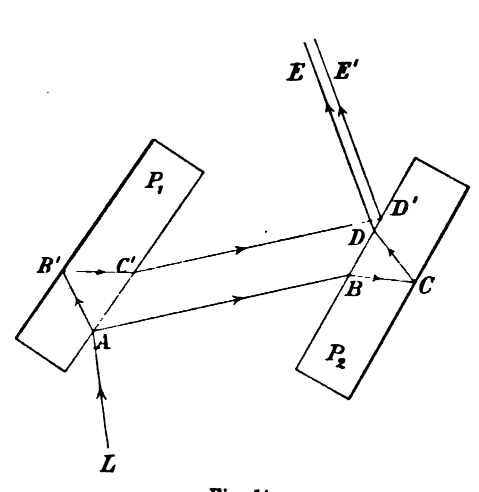


Fig. 54.

$$\varDelta = \frac{4\pi d}{\lambda'} (\cos\chi_1 - \cos\chi_2),$$

und da $\cos\chi_1 - \cos\chi_2$ etwas mit der Neigung des Strahles LA

variiirt, so wird das Gesichtsfeld bei E, E' von Interferenzfransen durchzogen sein.

Der Hauptvortheil dieses Interferentialrefractors liegt darin, dass die beiden interferirenden Strahlen AB und $C'D'$ räumlich ziemlich weit von einander getrennt sind, wenn recht dicke Glasplatten P_1, P_2 verwendet werden und das Licht schief einfällt (am besten unter einem Einfallswinkel von etwa 50°). Man erhält dadurch ein Instrument, welches minimale Aenderungen des Brechungsexponenten messen lässt. Wenn man z. B. zwei durch Glasplatten verschlossene Röhren in den Gang des Strahles AB bezw. $C'D'$ einschaltet, und man ändert in der einen Röhre durch Temperatur- oder Druckänderung den Brechungsindex der darin enthaltenen Luft, oder wenn man die Luft der einen Röhre durch ein anderes Gas ersetzt, so verschieben sich die Interferenzstreifen im Gesichtsfeld. Man kann die Differenz der Brechungsindices in beiden Röhren berechnen, wenn man die an einer bestimmten Marke des Gesichtsfeldes vorbeigegangenen Interferenzstreifen zählt, oder wenn man die Phasendifferenz in beiden Strahlen durch irgend eine messende Vorrichtung so compensirt, dass wieder die ursprüngliche Lage der Interferenzfransen entsteht. Als ein solcher Compensator können zwei um eine gemeinsame Axe drehbare, gleich dicke Glasplatten p_1, p_2 dienen, welche einen geringen Winkel mit einander bilden (Jamin'scher Compensator). Der Strahl AB durchsetzt nur p_1, der Strahl $C'D'$ nur p_2. Die Phasendifferenz, welche beiden Strahlen dadurch ertheilt wird, hängt von der Neigung der Platte p_1 gegen AB ab.[1])

Bei der Jamin'schen Construction kann man die beiden interferirenden Strahlenbündel praktisch um etwa nur 2 cm seitlich von einander trennen. Eine viel grössere Trennung erhält man nach Zehnder,[2]) wenn man vier nahezu parallele Glasplatten verwendet. Zwei von ihnen können nach Mach[3]) zweckmässig durch Metallspiegel S_1 und S_2 ersetzt werden, Figur 55 stellt schematisch die Mach'sche Anordnung dar. — Schliesslich hat Mach noch eine Verbesserung zur Erhöhung der Lichtstärke angebracht. Sowohl bei Figur 54 als 55 sind die ins Auge bei E gelangenden Strahlen von geringer Intensität, weil sie einmal eine Reflexion an der Glas-

1) Betreffs der genaueren Berechnung hiervon vgl. F. Neumann, Vorlesungen über theoretische Optik, herausg. von Dorn, Leipzig 1885, S. 286ff.

2) Vgl. L. Zehnder, Ztsch. f. Instrumentenkunde 1891, S. 275.

3) L. Mach, Ber. d. Wien. Akad. Math.-Naturw. Kl. 101 (II. A.), S. 5, 1892. — Ztschr. f. Instrumentenkunde 1892, S. 89.

oberfläche erlitten haben, womit stets eine bedeutende Lichtabschwächung verbunden ist. In Figur 55 sind die Lichtstrahlen, welche von S_2 aus durch P_2 hindurch sich fortpflanzen, viel intensiver als die von P_2 nach E reflectirten Strahlen. Diesem Uebelstande könnte man abhelfen, wenn man die Reflexionsfähigkeit der Glasoberfläche erhöhen könnte. Es gelingt dies durch schwache Versilberung oder Vergoldung der Glasoberfläche, am günstigsten ist es, wenn man die Metallschicht in solcher Dicke auf dem Glase herstellt, dass die Intensität des reflectirten Lichtes gleich der des durchgehenden Lichtes ist. Man braucht nun aber bei der Anordnung der Figur 55 gar nicht zwei Platten P_1 und P_2 von end-

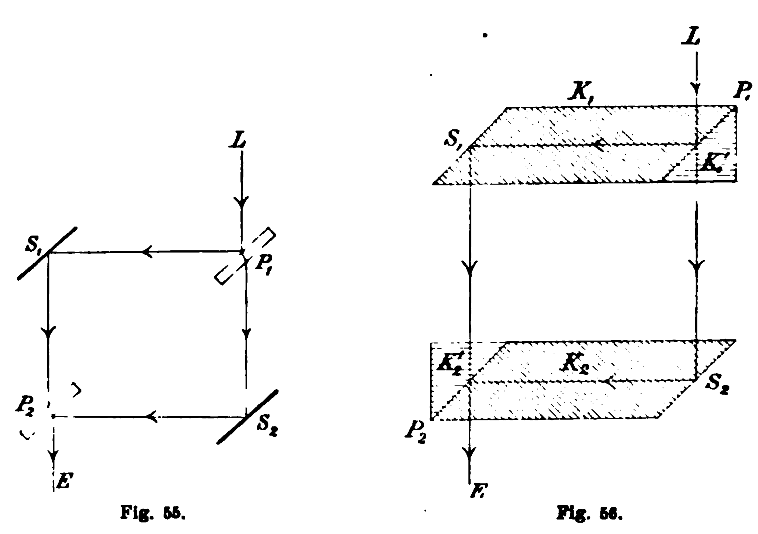


Fig. 55. Fig. 56.

licher Dicke, um Interferenzen zu erzeugen, es genügt, wenn an ihren Stellen durch eine sehr dünne Metallschicht eine Spaltung der Lichtstrahlen in reflectirte und weitergehende hergestellt wird. Dies kann man erreichen, wenn man zwei rechtwinklige Glasprismen mit ihren schwach versilberten Hypothenusenflächen fest auf einander legt. — Die Reflexion an den Spiegeln S_1 und S_2 kann man durch Totalreflexion an unbelegten Hypothenusenflächen rechtwinkliger Glasprismen ersetzen. Schliesslich kann man diese Prismen mit den theilweise das Licht durchlassenden Doppelprismen zu einheitlichen Glaskörpern vereinigen, so dass man die in Figur 56 dargestellte Mach'sche Construction eines Interferenzrefractors erhält, bei der an die einander gleichen Glaskörper K_1

und K_2 zwei Glaskörper K_1' und K_2' mit Leinöl angekittet sind, die Berührungsflächen P_1, P_2 sind schwach vergoldet. An den schiefen Flächen S_1 und S_2 werden die Strahlen total reflectirt. Falls die Glaskörper K_1 und K_2 sehr nahezu parallel gestellt werden, so erblickt ein Auge bei E die Interferenzfransen.

8. Interferenzen bei hohen Gangunterschieden. Wenn man ein Newton'sches Farbenglas in homogener Beleuchtung betrachtet, wie sie z. B. eine mit Kochsalz gefärbte Alkoholflamme bietet, so erblickt man Interferenzringe über die ganze Ausdehnung des Glases hin. Dies ist ein Zeichen dafür, dass auch noch nach einem Gangunterschiede von mehreren Hunderten von Wellenlängen die Interferenzfähigkeit des Lichtes erhalten bleibt.

Es ist nun die Frage von grosser Bedeutung, wie weit man diesen Gangunterschied steigern kann, ohne dass die Interferenzfähigkeit des Lichtes aufhört. Zur Beantwortung dieser Frage kann man nicht einfach so verfahren, dass man die beiden Gläser der Newton'schen Anordnung successive weiter von einander entfernt, und mit dem Auge oder einer Lupe auf die Oberfläche O_1 des einen Glases accommodirt, denn nach der Anmerkung 1) der S. 133 würden die Interferenzen bald undeutlich werden wegen der wechselnden Neigung der in einem Punkte der Oberfläche O_1 sich schneidenden, cohärenten Strahlenpaare. Man muss vielmehr dafür sorgen, dass alle cohärenten Strahlenpaare, welche zu einem und demselben Punkte auf der Netzhaut des Beobachters vereinigt werden, ein und dieselbe Phasendifferenz gegen einander besitzen.

Dies gelingt, wenn man die Interferenzen durch die Reflexion an zwei genau parallelen Oberflächen O_1 und O_2 zu Stande kommen lässt, und wenn man mit einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr (oder direct mit dem auf Unendlich accommodirtem Auge) beobachtet. Alle zur Interferenz gelangenden, cohärenten Strahlenpaare, welche in einem Netzhautpunkte vereinigt werden, durchlaufen dann den Zwischenraum (der Dicke d) zwischen den Flächen O_1 und O_2 in derselben Neigung gegen die gemeinsame Normale N dieser beiden Flächen und besitzen daher (bei constantem Abstand d beider Flächen O_1 und O_2) die gleiche Phasendifferenz. Diese wechselt mit der Neigung gegen die Normale N, die Interferenzfigur besteht daher aus concentrischen Kreisen, deren Centrum in der Richtung der Plattennormale N liegt.[1]) Die so entstehenden

1) Diese Erscheinung verwendet Lummer (vgl. Müller-Pouillet, Optik,

Interferenzringe sind also die Curven gleicher Neigung, im Gegensatz zu den Curven gleicher Dicke, die man an einem dünnen Keil oder dem Newton'schen Farbenglase bei Accommodirung auf das Glas selbst wahrnimmt.

Man kann nun in der That bei planparallelen Glasplatten von mehreren Millimeter Dicke solche Curven gleicher Neigung bei homogener Beleuchtung wahrnehmen, d. h. Interferenzen bei vielen Tausenden von Wellenlängen Gangunterschied beobachten. Um den Gangunterschied stetig variiren zu können, hat Michelson[1]) folgende Anordnung benutzt:

Der Lichtstrahl QA fällt unter 45° Einfallswinkel auf die schwach versilberte Vorderfläche einer planparallelen Glasplatte A und wird dann gespalten in einen zum Planspiegel D durchgehenden und in einen zum Planspiegel C reflectirten Strahl. Diese Spiegel senden die beiden Strahlen zum Punkte A zurück, von wo der erstere in das Fernrohr nach E reflectirt, der zweite nach E hindurchgesandt wird.

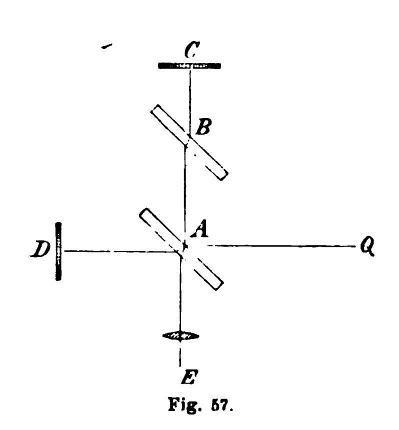


Fig. 57.

Eine zweite planparallele Glasplatte B, welche die gleiche Dicke wie die Platte A besitzt, macht den Gangunterschied der beiden, in E zur Interferenz kommenden Strahlen gleich Null, falls die beiden Spiegel D und C symmetrisch zur Platte A liegen.

Die Anordnung wirkt nun offenbar so, als ob Interferenzen durch Reflexion an den ebenen Begrenzungen O_1 und O_2 einer Luftplatte zu Stande kämen. O_1 ist der Spiegel C, und O_2 ist das Spiegelbild des Spiegels D in der Glasplatte A. Dieses

S. 916—924) zur Untersuchung von Glasplatten auf ihre Planparallelität. In der That müssen die Curven gleicher Neigung von der Kreisform abweichen, sowie der Abstand d zwischen beiden reflectirenden Oberflächen O_1 und O_2 nicht genau constant ist.

1) A. A. Michelson, Amer. Journ. of Science (3) 34, S. 427, 1887. — Travaux et Mémoires du Bureau Internat. d. Poids et Mesures. 11, 1895, S. 1—237. — In dieser zweiten Arbeit hat Michelson mit Hülfe seines Interferenzapparates für hohe Gangunterschiede das Meter in Wellenlängen ausgewerthet. — Vgl. auch Müller-Pouillet (Lummer) S. 935.

Spiegelbild muss also parallel zu C sein, wenn die Interferenzcurven gleicher Neigung bei erheblicher Gangdifferenz gut gesehen werden sollen. Um letztere variiren zu können, ist der eine Spiegel, z. B. C, durch eine Mikrometerschraube genau parallel in der Richtung AB verschiebbar.

Mit diesem Apparate konnte Michelson bei Beleuchtung mit Geissler'schen Röhren Interferenzen erhalten bei einem Gangunterschiede von 20 cm Luftstrecke (bei Anwendung der rothen Kadmiumlinie), was etwa 300000 Wellenlängen entspricht, ja die grüne Quecksilberlinie lieferte sogar noch Interferenzen bei 540000 Wellenlängen Gangunterschied.[1])

Diese Versuche sind deshalb so instructiv, weil sich aus der Veränderung der Sichtbarkeit der Interferenzstreifen mit wachsendem Gangunterschied schärfere Schlüsse über die Homogenität einer Lichtquelle ziehen lassen, als mit dem Spectrometer.

Schon Fizeau hatte beobachtet, dass bei Beleuchtung mit Natriumlicht die Interferenzen mit der Aenderung der Dicke d der Luftschicht periodisch verschwanden und wieder auftraten. Die Interferenzen verschwinden zum ersten Male bei der Dicke $d = 0,1445$ mm, sind bei $d = 0,289$ wiederum am deutlichsten, bei $d = 0,4335$ wiederum am undeutlichsten u. s. f. Man kann daraus schliessen, dass die Natriumlinie aus zwei nahe benachbarten Linien besteht. Die Interferenzen werden immer dann am undeutlichsten, falls die Maxima, welche die eine Natriumlinie erzeugt, auf die Minima der anderen Natriumlinie fällt. Da die mittlere Wellenlänge λ der gelben Natriumlinie 0,000589 mm beträgt, so entsprechen der Dicke $d = 0,289$ mm, 491 Wellenlängen. Bezeichnet man die Differenz der Wellenlängen beider Natriumlinien mit $\lambda_1 - \lambda_2$, so muss also sein:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot 491 = \frac{\lambda}{2} = 0,000294 \text{ mm},$$

d. h.
$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0,0000006 \text{ mm}.$$

In allgemeinerer Weise hat Michelson[2]) das Problem in Angriff genommen.

Nach Formel (11) auf S. 123 ist die Intensität des Lichtes, das aus zwei gleich intensiven, cohärenten Strahlen der Wege-

1) A. Perot und Ch. Fabry (Compt. Rend. 128, S. 1221, 1899) erhielten durch Speisung der Geissler'schen Röhren mit einem Hochspannungsaccumulator Interferenzen der grünen Hg-Linie noch bei 790000 Wellenlängen Gangunterschied.

2) Ausser den oben citirten Arbeiten sind diese Entwickelungen in Phil. Mag. (5) 31, S. 338, 1891, — 34, S. 280 und 407 (Rayleigh), 1892 enthalten.

differenz $2l$ (l ist die Dicke der Luftplatte) gebildet wird, gegegeben durch

$$J = 2A^2\left(1 + \cos 2\pi \frac{2l}{\lambda}\right). \tag{19}$$

Anstatt der Wellenlänge λ des Lichtes in Luft wollen wir den reciproken Werth

$$\frac{1}{\lambda} = m \tag{20}$$

einführen. m bedeutet die Anzahl von Wellenlängen, welche in der Längeneinheit enthalten sind.

Wenn wir nun nicht streng homogenes Licht, d. h. Licht einer einzigen Wellenlänge λ oder Wellenzahl m haben, so möge mit $\psi(m) \cdot dm$ die Intensität des Lichtes bezeichnet werden, deren Wellenzahlen zwischen m und $m + dm$ liegen. Es ist dann die Intensität J bei Interferenz vermittelst einer Luftplatte der Dicke l:

$$J = 2\int_{m_1}^{m_2} \psi(m)\ [1 + \cos 4\pi\, lm]\, dm, \tag{21}$$

wobei die Integrationsgrenzen diejenigen Wellenzahlen sind, innerhalb deren $\psi(m)$ merklich von Null verschieden ist.

Nehmen wir zunächst den Fall an, dass wir eine einzige Spectrallinie von geringer Breite haben, so wollen wir setzen:

$$m = \overline{m} + x, \quad m_1 = \overline{m} - a, \quad m_2 = \overline{m} + a. \tag{22}$$

Dann wird (21) zu

$$J = 2\int_{-a}^{+a} \psi(x)\, [1 + \cos 4\pi\, l\, (\overline{m} + x)]\, dx,$$

oder, wenn man setzt:

$$\begin{gathered} 4\pi\, l\overline{m} = \vartheta, \quad \int \psi(x)\, dx = P, \\ \int \psi(x) \cos(4\pi\, l\, x) \cdot dx = C, \quad \int \psi(x) \sin(4\pi\, l\, x) \cdot dx = S: \end{gathered} \tag{22'}$$

$$\tfrac{1}{2} J = P + C \cos\vartheta - S \sin\vartheta. \tag{23}$$

Wenn die Dicke l der Luftplatte sich nur wenig ändert, so ändert sich damit J, weil sich ϑ ändert. Dagegen können wir C und S bei geringen Aenderungen von l als unabhängig von l ansehen, falls die Breite der Spectrallinie, d. h. die Grösse a, sehr klein ist.

Daher finden nach (23) Maxima bezw. Minima der Intensität J statt bei den Werthen:

$$tg\,\vartheta = -\frac{S}{C}, \tag{24}$$

und zwar sind die Maxima gegeben durch:

$$\tfrac{1}{2} J_{Max} = P + \sqrt{C^2 + S^2}, \tag{25}$$

die Minima durch:

$$\tfrac{1}{2} J_{Min} = P - \sqrt{C^2 + S^2}. \tag{25'}$$

Es sind demnach keine Interferenzen sichtbar, wenn $C = S = 0$ ist. Aber auch schon wenn diese beiden Ausdrücke sehr kleine Werthe haben, werden keine Interferenzen wahrnehmbar sein. Die Sichtbarkeit der Interferenzen wird zweckmässig definirt durch

$$V = \frac{J_{Max} - J_{Min}}{J_{Max} + J_{Min}}. \tag{26}$$

Nach (25) und (25') ist daher:

$$V^2 = \frac{C^2 + S^2}{P^2}. \tag{27}$$

Diese Gleichung enthält die Abhängigkeit der Sichtbarkeit der Interferenzen von der Wegedifferenz $2l$ der beiden interferirenden Strahlenbündel, falls l durch eine Mikrometerschraube beliebig verändert wird.

Wenn die Helligkeit der Spectrallinie symmetrisch zu ihrer Mitte vertheilt ist, so ist $S = 0$. Dann wird also (27) zu

$$V = C : P.$$

Nehmen wir z. B. den Fall an, dass $\psi(x) = const. = c$ sei. Dann wird

$$P = 2ac,\; C = \frac{2c \sin 4\pi l a}{4\pi l}, \qquad V = \frac{\sin 4\pi l a}{4\pi l a}. \tag{28}$$

Die Interferenzen verschwinden also für $4la = 1, 2, 3, \ldots$. Grösste Deutlichkeit ($V = 1$) tritt nur ein für $l = 0$. Mit wachsendem l werden die Interferenzen, selbst für günstigste Werthe von l, immer kleiner, z. B. für $4la = \frac{3}{2}$ ist

$$V = 2 : 3\pi = 0{,}212.$$

Ebenso tritt ein periodisches Verschwinden und continuirliches Abklingen maximaler Deutlichkeit der Interferenzen für das Gesetz ein:

$$\psi(x) = \cos^p \pi \frac{x}{2a}.$$

Das kleinste l, bei welchem die Interferenzen verschwinden, ist gegeben durch $4 l_1 a = \frac{p}{2} + 1$, dann verschwinden sie für $4 l_2 a = \frac{p}{2} + 2$, $4 l_3 a = \frac{p}{2} + 3$ etc. Man kann also aus den Nullstellen l_1, l_2, l_3 der Sichtbarkeitscurve sowohl die Breite a der Spectrallinie, als die Potenz p, welche ihre Helligkeitsvertheilung ergiebt, bestimmen.

Für $$\psi(x) = e^{-p x^2} \text{ [1]}$$
ergiebt sich ein allmähliches Abklingen der Sichtbarkeitscurve, ohne periodische Null- und Maximalwerthe.

In ähnlicher Weise lässt sich auch bei mehrfachen schmalen Spectrallinien die Sichtbarkeitscurve V aus (21) ableiten. So z. B. ergiebt sich bei zwei gleich intensiven Linien ein periodisches Nullwerden von V. Sind die beiden Linien nicht gleich intensiv, so wird V nicht völlig Null, sondern nimmt periodisch nur Minima (und Maxima) an. Dies ist bei der gelben Natriumdoppellinie der Fall.

Man ersieht aus dem Vorigen, in welcher Weise aus irgend einem angenommenen Intensitätsgesetz $\psi(m)$ die Sichtbarkeit V der Interferenzen abzuleiten ist. Die umgekehrte Aufgabe, $\psi(m)$ aus V zu bestimmen, ist viel schwieriger. Abgesehen davon, dass man durch den blossen Anblick der Interferenzen die numerischen Werthe von V nur durch ein etwas willkürliches Verfahren ableiten kann,[2] ist die Aufgabe überhaupt nicht lösbar, weil man, wie aus (27) folgt, nur $C^2 + S^2$ aus V bestimmen kann, aber nicht C und S einzeln.[3] Unter der Annahme, das die einzelnen Spectrallinien in ihrer Helligkeit symmetrisch zu ihrer Mitte sind, gelingt allerdings die Aufgabe, da dann bei einer einzigen Linie $S = 0$ ist und bei mehrfachen Linien analoge Vereinfachungen eintreten. — Michelson hat nun in der That für mehrere Spectrallinien die Sichtbarkeitscurven V aufgenommen[4]) und die verschiedenartigsten Ge-

1) Dieses Intensitätsgesetz würde aus der kinetischen Gastheorie mit dem Maxwell'schen Gesetz der Vertheilung der Geschwindigkeiten der Molecüle folgen.

2) Streng würde V zu erhalten sein, wenn man J_{Max} und J_{Min} photometrisch oder bolometrisch misst.

3) Nach dem Fourier'schen Theorem könnte man $\psi(m)$ vollständig berechnen, wenn man C und S einzeln für alle Werthe von l kennt.

4) Wie Ebert in Wied. Ann. 43, S. 790, 1891 festgestellt hat, fallen diese Sichtbarkeitscurven unter verschiedenen Bedingungen des Leuchtens eventuell sehr verschieden aus.

stalten erhalten. Er hat dann probirt, mit welchem Intensitätsgesetz $\psi(m)$ man sich den Beobachtungen von V am besten anschliessen kann. Nach dem Obigen muss man aber sagen, dass das Resultat für $\psi(m)$ kein zwingendes ist, wenn auch die Vertheilung der Intensität und Breite der einzelnen Spectrallinien durch diese werthvollen Untersuchungen Michelson's mit einer gewissen Annäherung jedenfalls dargestellt sein werden, die besser als eine Untersuchung mit dem Spectroskop oder einem Diffractionsgitter ist. Allein schon die Thatsache ist von grossem Interesse, dass es so homogene Lichtlinien giebt, dass sie noch Interferenzen bei 500000 Wellenlängen Gangunterschied zulassen.

9. Stehende Lichtwellen. Bei den bisher besprochenen Interferenzerscheinungen haben die beiden zur Interferenz gelangenden Strahlenbündel die gleiche Fortpflanzungsrichtung. Man kann nun aber auch Interferenzen nachweisen, bei denen die beiden Strahlenbündel sich entgegenlaufen. Wenn man nämlich über den Wellenzug

$$s_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

welche Gleichung ebenen Wellen entspricht, die sich nach der x-Richtung fortpflanzen, superponirt den Wellenzug:

$$s_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right),$$

welcher ebene Wellen repräsentirt, die sich nach der negativen x-Axe fortpflanzen, so erhält man:

$$s = s_1 + s_2 = 2A \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}. \tag{29}$$

Dies stellt eine Lichtbewegung dar, deren Amplitude $2A \cos 2\pi\, x/\lambda$ eine periodische Function des Ortes ist. Für $x/\lambda = 1/4$, $3/4$, $5/4$ etc. verschwindet die Amplitude, man nennt diese Stellen Wellenknoten, für $x/\lambda = 0$, $1/2$, $2/2$ etc. ist die Amplitude ein Maximum; diese Stellen heissen Wellenbäuche. Sie haben also einen constanten Abstand von $1/2\,\lambda$ unter einander. Diese Art von Welleninterferenz wird stehende Wellen genannt, weil es gewisse, im Raume feststehende Stellen giebt, an denen keine Erregung stattfindet.

Solche stehende Lichtwellen hat Wiener[1]) nachgewiesen, indem er Licht senkrecht auf einen guten Metallspiegel fallen liess. Das

1) O. Wiener, Wied. Ann. 40, S. 203, 1890.

reflectirte Licht giebt dann durch Interferenz mit dem einfallenden Lichte Anlass zur Bildung stehender Wellen. Um die Orte der Knoten deutlich getrennt von denen der Bäuche nachweisen zu können, brachte Wiener ein äusserst dünnes, auf Glas aufliegendes Chlorsilbercollodiumhäutchen, dessen Dicke nur $^1/_{30}$ Lichtwellenlänge = 20 milliontel Millimeter war, so vor die Spiegelfläche, dass es mit derselben einen sehr kleinen Winkel bildete, und beleuchtete nun mit elektrischem Bogenlichte. Die empfindliche Schicht durchschnitt also die Ebenen der Bäuche und Knoten in einem System äquidistanter Geraden, die um so grösseren Abstand von einander hatten, je kleiner der Winkel zwischen Spiegel und Collodiumhaut war. Dieselbe zeigte nun in der That dieses System von Geraden nach der photographischen Entwickelung. Dies ist ein Beweis dafür, dass man einerseits überhaupt noch an einer so dünnen Collodiumhaut photographische Wirkung nachweisen kann, andererseits dass dieselbe thatsächlich in den Knoten- und Bauchebenen verschieden ist. — Zur Demonstration dieser interessanten Interferenzerscheinung kann man auch zweckmässig die Fluorescenzwirkung in einer dünnen Gelatineschicht, der Fluoresceïn zugesetzt ist, verwenden.[1]) Die Schicht leuchtet in äquidistanten, grünen Streifchen. — Von theoretischer Bedeutung, die wir später kennen lernen werden, ist, dass am Spiegel selbst ein Schwingungsknoten liegt.

10. Photographie in natürlichen Farben. Das Auftreten der stehenden Lichtwellen hat Lippman dazu benutzt, um farbige Photographieen herzustellen. Er wählte als lichtempfindliche Schicht eine durchsichtige und kornlose jod- und bromsilberhaltige Collodiumalbuminschicht, die er auf Quecksilber legte, welches den Spiegel bildete.[2]) Belichtet man die Platte durch ein Spectrum, so erblickt man nach dem Entwickeln und Fixiren der photographischen Platte annähernd wiederum die Spectralfarben. Die einfachste Annahme ist, dass in der photographischen Platte an der Stelle, an welcher sie mit Licht belichtet war, welches in der photographischen Schicht die Wellenlänge λ besitzt, sehr dünne Silberschichten in der Entfernung $^1/_2\,\lambda$ entstanden sind.

1) Vgl. hierüber das Nähere bei P. Drude und W. Nernst, Wied. Ann. 45, S. 460, 1892.

2) Näheres über diese Photographie vgl. in Valenta, Die Photographie in natürlichen Farben. Halle, 1894. — Neuhauss, Die Farbenphotographie nach Lippmann's Verfahren. Halle, 1898.

Betrachtet man nun diese Stelle im reflectirten weissen Lichte, so werden die Lichtwellen an jeder Silberschicht in einer gewissen Stärke reflectirt. Diese Reflexionen ergeben aber übereinstimmende Phase und daher maximale Verstärkung nur für diejenigen Wellen, deren Wellenlänge gleich λ, oder $^1/_2\,\lambda$, oder $^1/_3\,\lambda$ etc. ist. Daher wird eine z. B. grün belichtete Stelle im reflectirten weissen Lichte wesentlich grün erscheinen. Das Licht der Wellenlänge $^1/_2\,\lambda$ fällt dabei ins unsichtbare Ultraviolette. Dagegen erscheint unter Umständen eine mit Ultraroth belichtete Stelle violett, weil hier der Werth $^1/_2\,\lambda$ zu den sichtbaren Farben gehört.

Wenn man eine solche Photographie anhaucht, so verschieben sich die Farben nach dem rothen Ende des Spectrums zu, weil dadurch die Collodiumschicht aufquillt und die reflectirenden Schichten grösseren gegenseitigen Abstand gewinnen. — Betrachtet man die Platte unter schieferem Einfallswinkel, so verschieben sich die Farben dagegen nach dem violetten Ende des Spectrums hin. Dies hat denselben Grund, wie das Verschieben Newton'scher Ringe bei schiefem Anblick nach niedrigerer Ordnung hin. Denn, wie Formel (14) auf S. 129 lehrt, ist die Phasendifferenz Δ zweier an zwei Flächen der Distanz d reflectirten Strahlen proportional mit $\cos\chi$, wobei χ der Neigungswinkel der Strahlen zwischen beiden Flächen gegen die Normale dieser Flächen bedeutet. Bei schiefer Incidenz wird also Δ kleiner, bei den Newton'schen Ringen ist dieser Einfluss aber viel stärker als bei den Lippmann'schen Photographieen, da bei ersteren in der die Interferenz hervorrufenden L u f t platte χ mit Aenderung der Beleuchtungsrichtung viel stärker variirt als in einer Collodiumplatte, deren Brechungsindex mindestens etwa $= 1{,}5$ ist.

Beweisen die angeführten Thatsachen unzweifelhaft, dass die Farben durch Interferenz entstehen, so ist ihre Erklärung durch periodisch gelagerte Silberschichten dennoch bei näherer Prüfung wahrscheinlich nicht stichhaltig. Es hat nämlich Schütt[1]) die Grösse der gebildeten Silberkörner an solchen Photographieen mikroskopisch gemessen und sie zu 0,0007 bis 0,0009 mm Durchmesser gefunden, also viel grösser als die halbe belichtende Wellenlänge. Nach Schütt sollen durch die stehenden Wellen und durch das Ausfixiren der lichtempfindlichen Schicht periodisch wechselnde Schichten von verschiedenem Brechungsindex (hervorgerufen durch

1) F. Schütt, Wied. Ann. 57, S. 533, 1896.

periodisch wechselnde Silberablagerung) entstanden sein. Das Princip der Erklärung der Farben wird dadurch aber nicht verändert, es würde nämlich auch so die Collodiumschicht eine mit der Periode $^1/_2\,\lambda$ continuirlich sich ändernde Reflexionsfähigkeit besitzen.

Nach dieser Annahme kann man die Intensität irgend einer Farbe bei der Reflexion berechnen. Die genauere Ausführung mag aber hier unterbleiben, zumal da die Rechnung dadurch complicirt wird, dass man keineswegs berechtigt ist, die Anzahl der Perioden in der photographischen Schicht als recht gross anzunehmen.[1]) Die besten Farbenphotographieen werden nämlich erhalten, wenn die photographische Schicht eine gewisse Dicke, etwa von 0,001 mm, nicht überschreitet. Diese Dicke entspricht aber 3—5 halben Wellenlängen von wirksamem Licht. Aber auch ohne genauere Berechnung kann man übersehen, dass die reflectirten Farben Mischfarben und keine reinen Spectralfarben sind, wie dies auch durch die Analyse der reflectirten Farben mit Hülfe des Spectroskops[2]) bestätigt wird. Denn wenn auch diejenige Farbe, deren Wellenlänge gleich der belichtenden Wellenlänge ist, besonders stark im reflectirten Licht vertreten sein muss, so können doch benachbarte Farben, und überhaupt streng genommen keine einzige Farbe vollkommen fehlen.

Nach einem Versuch von Neuhauss[3]) ändert sich durch mechanisches allmähliches Abreiben der photographischen Schicht die reflectirte Mischfarbe in gewisser periodischer Weise. Dieses Verhalten folgt theoretisch, wenn man die geringe Periodenzahl in der photographischen Schicht berücksichtigt.

Eine weitere Eigenthümlichkeit dieser Photographieen besteht darin, dass sie im reflectirten Lichte verschiedene Farben zeigen je nach der Seite, von der man sie betrachtet. Abgesehen davon, dass die Glasauflage gewisse Verschiedenheiten beider Seiten be-

---

1) Die bisherigen Berechnungen, welche von Meslin (Ann. de chim. et de phys. (6) 27, S. 369, 1892) und von Lippmann (Journ. de phys. (3) 3, S. 97 1894) veröffentlicht worden sind, machen nicht nur diese unzutreffende Voraussetzung, sondern sie leiden auch an dem Widerspruch, dass unter Umständen nach diesen Rechnungen die reflectirte Intensität grösser als die einfallende sein könnte.

2) Man vgl. z. B. die citirte Arbeit von Schütt.

3) R. Neuhauss, Photogr. Rundsch. 8, S. 301, 1894. — Vgl. auch die citirte Arbeit von Schütt, S. 543.

dingt,[1]) ist es durchaus wahrscheinlich, dass die periodischen Schwankungen im optischen Charakter der photographischen Schicht an Amplitude zunehmen nach der Seite der Schicht zu, welche am Metallspiegel lag. Wegen geringer Lichtabsorption müssen sich nämlich die stehenden Wellen bei der Exposition der Platte möglichst nahe am Metallspiegel am reinsten ausbilden.

Führt man diese Annahme in die Theorie ein, und berücksichtigt man schliesslich noch eine geringe Absorption des Lichtes, so nähert man sich mehr den wirklichen Verhältnissen; es ergiebt sich dann sowohl das Resultat von Neuhauss, als die verschiedene Farbe bei Wechsel der reflectirenden Seite der Photographie.

Kapitel III.

Das Huygens'sche Princip.

1. Das Huygens'sche Princip in seiner ersten Fassung. Schon oben (S. 119) war darauf hingewiesen, dass die Erklärung der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes vom Standpunkte der Wellentheorie Schwierigkeiten macht. Um zu einer Erklärung zu gelangen, hat Huygens das Princip aufgestellt, dass jeder von einer Lichtwelle getroffene Punkt P als Ausgangspunkt von elementaren Lichtwellen aufgefasst werden könne, dass aber diese Elementarwellen nur auf der sie einhüllenden Fläche eine merkliche Wirkung hervorrufen. Wenn daher Q eine punktförmige Lichtquelle ist, deren Lichtausbreitung durch den ebenen Schirm $S_1 S_2$ mit der Oeffnung $A_1 A_2$ gehindert ist, so können wir die Wellenfläche, bis zu der die Lichterregung nach Ablauf einer gewissen Zeit t gelangt ist, in folgender Weise construiren:

Wir fassen alle Punkte A_3 auf der Ebene zwischen der Oeffnung A_1, A_2 als neue Erregungspunkte auf, die ihre Elementarwellen

1) Vgl. hierüber Wiener, Wied. Ann. 69, S. 488, 1899.

auch in den Raum hinter dem Schirme fortpflanzen können. Diese Elementarwellen sind Kugelflächen, die um die Punkte A beschrieben sind, und zwar mit verschieden grossen Radien, wenn wir die Orte ins Auge fassen, bis zu denen die Lichtfortpflanzung von Q aus immer dieselbe Zeit t gebraucht hat. Da z. B. in A_3 die directe Lichterregung von Q aus früher angelangt ist, als in A_1, so ist die Elementarwelle um A_3 entsprechend dieser Zeitdifferenz grösser zu zeichnen, als die Elementarwelle um A_1. Für alle Elementarwellen muss offenbar ihr Radius, vermehrt um die Distanz ihres Centrums von Q aus, ein und denselben Werth ergeben. Auf die Weise erhält man aber als einhüllende Fläche dieser Elementarwellen eine um Q beschriebene Kugelfläche (in Figur 58

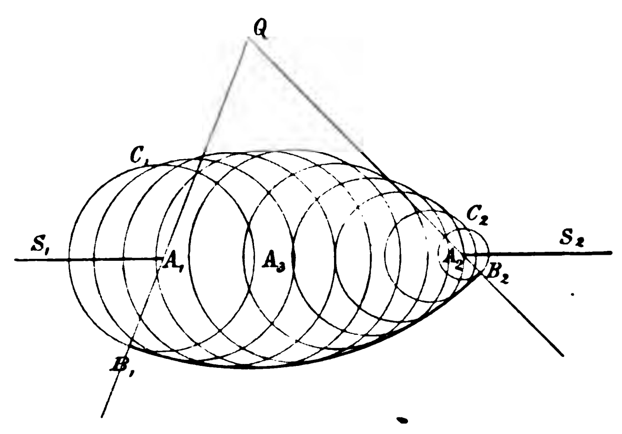


Fig. 58.

stark gezeichnet), welche durch die Punkte $B_1 B_2$ begrenzt ist, d. h. die nur innerhalb des von Q nach dem Rande des Schirmes $S_1 S_2$ gezogenen Kegels liegt. Innerhalb dieses Kegels pflanzt sich also von Q aus das Licht so fort, als ob der Schirm überhaupt nicht vorhanden wäre, ausserhalb des Kegels ist aber keine Lichterregung vorhanden.

Erhält man also nach diesem Princip in der That die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes, so stehen doch der Anwendung des Principes in dieser Fassung schwerwiegende Bedenken entgegen: Zunächst erkennt man aus Figur 58, dass die Elementarwellen um die Punkte A auch in dem Raume zwischen Schirm und Lichtquelle eine einhüllende Fläche ($C_1 C_2$) besitzen. Es müsste

also auch nach rückwärts stets Licht fortgepflanzt werden, während in vollständig homogenem Raume solche Reflexionen thatsächlich nicht vorkommen. — Ferner müsste die angeführte Construction, d. h. die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes, stets gelten, wie klein auch die Oeffnung $A_1 A_2$ im Schirm gewählt wird, während, wie schon oben S. 5 hervorgehoben wurde, bei sehr kleiner Oeffnung das Licht sich nicht mehr geradlinig fortpflanzt, sondern die sogenannte Lichtbeugung wahrnehmbar wird. Weshalb gelten überhaupt dieselben Ueberlegungen nicht auch für den Schall, bei dem stets Beugung eintritt, oder wenigstens der Schallschatten nie scharf begrenzt ist?

Bevor wir die Verbesserung des Huygens'schen Principes durch Fresnel besprechen, möge noch die Brechung und Reflexion nach Huygens erklärt werden. Wenn $A_1 A_2$ die ebene Grenze zwischen zwei Medien I und II ist, in denen die Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeiten V_1, V_2 verschieden sind, so möge eine Welle, deren Wellenebene zu irgend einer Zeit t_0 die Lage $A_1 B$ haben möge, schief auf die Grenzfläche $A_1 A_2$ auftreffen. Wir fragen, welches ist die Wellenfläche der Lichterregung im Medium II zur Zeit $t_0 + t$? Wir fassen die Punkte A der Grenze als Erreger von Elementarwellen auf, die wiederum verschiedenen Radius besitzen, da die Punkte A zu verschiedenen Zeiten von der Wellenebene AB aus erregt werden. A_1 wird zur Zeit t_0 erregt, die Elementarwelle um A_1 muss also mit dem Radius $A_1 C = V_2 t$ gezeichnet werden. Die Lage des Punktes A_2 sei so gewählt, dass er zur Zeit $t_0 + t$ erregt wird. Dies tritt ein, wenn das von A_2 auf die Wellenebene gefällte Lot $A_2 B$ die Länge $V_1 t$ besitzt, da sich in einem homogenen Medium, z. B. in I, irgend ein Stück einer ebenen Wellenfläche nach der Huygens'schen Construction parallel mit sich in Richtung der Wellennormale fortpflanzt. Die Elementarwelle um A_2 hat nach dieser Festsetzung den Radius Null. Für irgend einen Punkt A zwischen A_1 und A_2

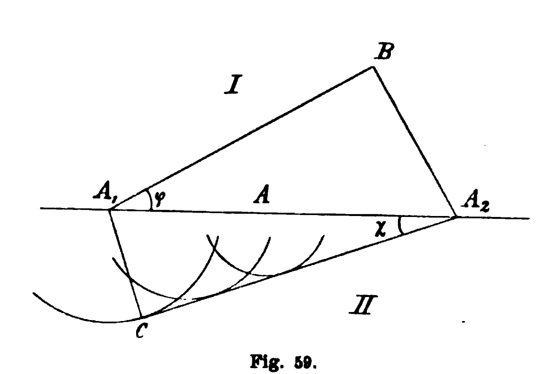


Fig. 59.

hat die Elementarwelle einen Radius, der proportional der Entfernung $A_1 A$ allmählich von $V_2 t$ auf Null abnimmt. Die einhüllende Fläche der Elementarwellen im Medium II ist daher die Tangentialebene $A_2 C$ an die Kugelfläche um A_1. Der Winkel $A_2 C A_1$ ist also ein rechter. Da nun $\sin\varphi = BA_2 : A_1 A_2 = V_1 t : A_1 A_2$, $\sin\chi = CA_1 : A_1 A_2 = V_2 t : A_1 A_2$, so ist

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\chi} = \frac{V_1}{V_2} = const.$$

Dies ist aber, da φ und χ gleich Einfalls- bezw. Brechungswinkel ist, die bekannte Form des Brechungsgesetzes. Der Brechungsindex n ist daher, wie oben S. 121 schon ausgesprochen, aber nicht theoretisch abgeleitet wurde, gleich dem Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in beiden Medien.

Wenn man die von den Punkten A in das Medium I fortgepflanzten Elementarwellen construirt, so wird man sofort auf das Reflexionsgesetz geführt.

2. Verbesserung des Huygens'schen Principes durch Fresnel. Fresnel ersetzt die willkürliche Annahme von Huygens, dass nur auf der einhüllenden Fläche der Elementarwellen merkliche Lichterregung stattfinden solle, durch den Grundsatz, dass die Elementarwellen sich bei ihrem Durchkreuzen gemäss dem Interferenzprincip beeinflussen. Es soll also Licht nicht auf der einhüllenden Fläche auftreten, sondern überall da, wo sich die Elementarwellen verstärken, dagegen da Dunkelheit, wo sie sich vernichten. Durch dieses Fresnel-Huygens'sche Princip ist nun in der That sowohl die Lichtbeugung, als auch die geradlinige Fortpflanzung, sowie Reflexion und Brechung abzuleiten.

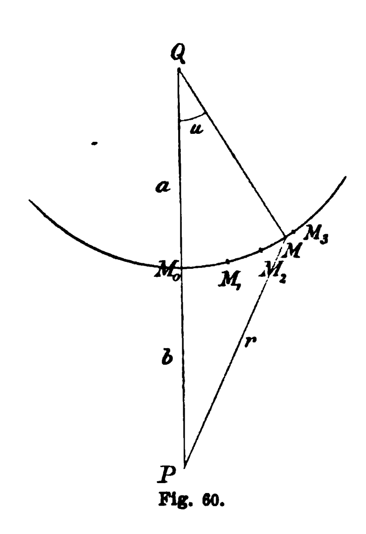


Fig. 60.

Wir wollen die Lichterregung in einem Punkte P betrachten, der von einer Lichtquelle Q erregt wird, und zwar möge zunächst kein Schirm zwischen P und Q vorhanden sein. Wir können eine um Q mit dem Radius a beschriebene Kugelfläche (Figur 60) als Wellenfläche auffassen, deren Flächenelemente die Lichterregung besitzen (vgl. oben S. 119):

$$s = \frac{A}{a} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda}\right), \tag{1}$$

wobei A die Amplitude des Lichtes in der Entfernung $a = 1$ von der Lichtquelle Q bedeutet. Fresnel theilt nun die Kugelfläche in ringförmige Zonen ein, deren Centrum auf der Geraden QP liegt, durch folgende Construction: die erste Zone (Centralzone) reiche bis zum Punkte M_1, wobei die Entfernung $M_1P = r_1$ um $^1/_2\,\lambda$ grösser sei als die Entfernung M_0P. Bezeichnen wir letztere mit b, so ist also $M_1P = r_1 = b + {}^1/_2\,\lambda$. Die zweite Zone liege zwischen M_1 und M_2, wobei $M_2P = r_2 = r_1 + {}^1/_2\,\lambda$ sei. Die dritte Zone liege zwischen M_2 und M_3, wobei $M_3P = r_3 = r_2 + {}^1/_2\,\lambda$ sei u. s. f. In irgend einer Zone, z. B. der dritten, möge nun ein ringförmiges Element betrachtet werden, welches zwischen den Punkten M und M' liege. Es mögen die Entfernungen $MP = r$, $M'P = r + dr$ sein, ferner $\sphericalangle\, MQP = u$, $\sphericalangle\, M'QP = u + du$. Dann ist die Grösse dieser Elementarzone

$$do = 2\pi\, a^2 \sin u\, du. \tag{2}$$

Da die Beziehung besteht:

$$r^2 = a^2 + (a + b)^2 - 2a\,(a + b) \cos u,$$

so folgt durch Differentiation:

$$2r\,dr = 2a\,(a + b) \sin u\, du,$$

so dass man Gleichung (2) schreiben kann:

$$do = 2\pi \frac{a}{a + b}\, r\, dr. \tag{3}$$

Die Lichterregung ds', welche diese Elementarzone im Punkte P hervorruft, muss mit do proportional sein, ferner umgekehrt proportional sein zu r, da (vgl. oben S. 118) die Erregung durch eine unendlich wenig ausgedehnte Lichtquelle umgekehrt proportional zur Entfernung von ihr abnimmt. Aus (1) folgt daher

$$ds' = \frac{kA}{ar} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a + r}{\lambda}\right) do, \tag{4}$$

oder gemäss (3):

$$ds' = 2\pi \frac{k \cdot A}{a + b} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a + r}{\lambda}\right) dr. \tag{4'}$$

Hierin ist k ein Proportionalitätsfactor, der nur noch von der Neigung des Elementes do gegen die Richtung r abhängen kann. Fresnel nimmt an, dass er um so kleiner wird, je schiefer r auf do steht. — Wenn wir nun den Winkel zwischen r und do innerhalb

einer ganzen Fresnel'schen Zone, z. B. zwischen M_{n-1} und M_n, constant annehmen, was gestattet ist, wenn a und b gross gegen die Wellenlänge λ sind, so folgt nach (4') für die Wirkung dieser n^{ten} Zone, da k gleich einer Constante k_n ist:

$$(5)\qquad s_n' = \int ds' = 2\pi \frac{k_n A}{a+b} \int\limits_{r_{n-1}}^{r_n} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+r}{\lambda}\right) dr,$$

oder

$$s_n' = \frac{k_n \lambda A}{a+b} \left\{ \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+r_{n-1}}{\lambda}\right) - \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+r_n}{\lambda}\right) \right\}.$$

Da nun $r_{n-1} = b + \frac{n-1}{2}\lambda$, $r_n = b + \frac{n}{2}\lambda$ ist, so folgt

$$(6)\qquad s_n' = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2k_n \lambda A}{a+b} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right).$$

Man ersieht hieraus, dass die successiven Zonen abwechselndes Vorzeichen für s' ergeben. Bezeichnet man den absoluten Betrag von s_n' durch s_n, so ist daher die ganze Wirkung s', welche die ersten n-Zonen in P erzeugen, nach dem Interferenzprincip gegeben durch die Reihe:

$$(7)\qquad s' = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \ldots + (-1)^{n+1} s_n.$$

Wenn man k_n für alle Zonen als gleich annehmen wollte, so würden die $s_1, s_2, \ldots$ alle einander gleich sein. Der Werth der Reihe (7) würde dann je nach der Grösse von n schwanken. Nun nimmt aber k_n und daher auch s_n mit wachsendem n beständig ab, da r immer schiefer gegen do liegt, je grösser n wird. In diesem Falle lässt sich die Reihe (7) in folgender Weise summiren:[1] Man kann schreiben, falls n ungerade ist:

$$(8)\qquad \begin{aligned} s' = \frac{s_1}{2} + \left(\frac{s_1}{2} - s_2 + \frac{s_3}{2}\right) + \left(\frac{s_3}{2} - s_4 + \frac{s_5}{2}\right) + \ldots \\ + \left(\frac{s_{n-2}}{2} - s_{n-1} + \frac{s_n}{2}\right) + \frac{s_n}{2}, \end{aligned}$$

oder auch

$$(9)\qquad \begin{aligned} s' = s_1 - \frac{s_2}{2} - \left\{\left(\frac{s_2}{2} - s_3 + \frac{s_4}{2}\right) + \left(\frac{s_4}{2} - s_5 + \frac{s_6}{2}\right) + \ldots \right. \\ \left. + \left(\frac{s_{n-3}}{2} - s_{n-2} + \frac{s_{n-1}}{2}\right)\right\} - \frac{s_{n-1}}{2} + s_n. \end{aligned}$$

---

1) Diese Betrachtungen sind von A. Schuster (Phil. Mag. (5) 31, S. 85, 1891) angestellt worden.

Wenn nun jedes s_p grösser als das arithmetische Mittel der beiden benachbarten s_{p-1} und s_{p+1} ist, so schliessen wir aus (8), dass ist

$$s' < \frac{s_1}{2} + \frac{s_n}{2},$$

dagegen folgt aus (9)

$$s' > s_1 - \frac{s_2}{2} + s_n - \frac{s_{n-1}}{2}.$$

Diese beiden Grenzwerthe, zwischen die s' auf diese Weise eingeschlossen ist, sind aber einander gleich, wenn, wie es hier der Fall ist, jedes s_p sich nur unendlich wenig unterscheidet sowohl von s_{p-1} als von s_{p+1}. Daher ist

$$s' = \frac{s_1}{2} + \frac{s_n}{2}. \tag{10}$$

In ähnlicher Weise ist zu schliessen, wenn jedes s_p kleiner als das arithmetische Mittel beider benachbarter s_{p-1} und s_{p+1} ist. Wenn man die s_p als successive Ordinaten mit äquidistanten Abscissen aufträgt, so bildet die Verbindungslinie ihrer Endpunkte in diesem Falle eine nach der Abscissenaxe convex gekrümmte Curve. — Im ersten Falle ist diese Curve concav gegen die Abscissenaxe. Man kann nun auch dieselben Schlüsse, d. h. die Formel (10), gewinnen, wenn jene Curve der s_p aus einer endlichen Anzahl convexer und concaver Stücke besteht. Nur wenn diese Zahl unendlich gross wäre, würde die Formel (10) eventuell ungiltig werden können. Dieser Fall tritt aber offenbar mit dem Factor k_n der Fresnel'schen Zonen nicht ein.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so ergiebt sich durch ähnliche Schlüsse, nur durch andere Zusammenfassung der Reihe (7):

$$s' = \frac{s_1}{2} - \frac{s_n}{2}. \tag{10'}$$

Die Fresnel'schen Zonen sind nun nach Fresnel so weit zu construiren, bis dass der von P ausgehende Radiusvector r die um Q beschriebene Wellenfläche berührt. Für die letzten Zonen steht daher r senkrecht auf ihnen und k_n, d. h. auch s_n, hat dann nach Fresnel den Werth Null. Daher werden die Werthe (10) und (10') identisch und die Lichterregung s' in P hat den Werth:

$$s' = \frac{s_1}{2} = \frac{k_1 \lambda A}{a+b} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right). \tag{11}$$

Man kann sie als herrührend ansehen allein von der Wirkung der Elementarwellen der halben Centralzone.

Wenn man nun irgend einen Schirm aufstellt, so hängt seine Wirkung auf P wesentlich davon ab, ob er die Centralzone und die nächst benachbarten freilässt, oder nicht. Man sollte zunächst denken, dass die Lichtwirkung in P schon vollkommen abgeschnitten wäre durch einen kreisförmigen Schirm, dessen Centrum in M_0 liegt, und der die halbe Centralzone verdeckt. Das ist aber nicht richtig. Wenn irgend ein kreisförmiger Schirm senkrecht zu PQ mit dem Centrum M_0 aufgestellt wird, so kann man die Fresnelsche Zonenconstruction vom Rande dieses Schirmes aus beginnen. Es bleibt dann in P wiederum die halbe Wirkung der ersten, am Schirm gelegenen Zone übrig, d. h. es gilt Formel (11), wobei b jetzt die Entfernung zwischen P und dem Rande des Schirmes bezeichnet, und k_1 sich auf die Randzone am Schirm bezieht. Auf der Centrale M_0P kann also in keinem Punkte Dunkelheit herrschen. Diesen überraschenden Schluss bestätigt nun in der That auch die Beobachtung. Nur für Schirme, die sehr gross gegen die Wellenlänge und nicht klein gegen die Entfernung b sind, ist die Lichtwirkung in P gering, weil der Factor k_n der Formel (5) dann klein wird. Ebenfalls ist die Lichtwirkung in P gering, wenn in M_0 ein nicht genau kreisförmiger Schirm S mit dem Centrum M_0, der viele Wellenlängen gross ist, aufgestellt wird. Um dieses einzusehen, denken wir uns den Schirm S begrenzt durch unendlich kleine Kreisbögen um das Centrum M_0 von wechselndem Radius. Der Centriwinkel des ersten Kreisbogens sei $d\varphi_1$, die Entfernung seines Randes vom Punkte P sei b_1, von Q sei sie a_1. Dann ist nach (11) und den vorigen Bemerkungen die Wirkung der ganzen freien Oeffnung, die zwischen den beiden Radienvectoren liegt, welche von M_0 nach den Endpunkten dieses ersten Kreisbogens gezogen werden, gegeben durch:

$$ds_1' = \frac{k_1 \lambda A}{a_1 + b_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{2\pi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a_1 + b_1}{\lambda}\right).$$

Die Wirkung der freien, durch zwei Radien begrenzten Oeffnung, die sich an einen zweiten Kreisbogen des Centriwinkels $d\varphi_2$ anschliesst, ist in analoger Bezeichnung:

$$ds_2' = \frac{k_2 \lambda A}{a_2 + b_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{2\pi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a_2 + b_2}{\lambda}\right),$$

u. s. f. Alle diese Wirkungen haben wir zu summiren, wenn wir s' im Punkte P berechnen wollen für den Fall, dass in M_0 ein Schirm S von unregelmässiger Gestalt aufgestellt ist. Wenn der-

selbe nicht zu gross ist, so können wir $k_1 = k_2 = k_3$ etc. setzen, ebenfalls können wir im Nenner $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$ etc. die Unterschiede der verschiedenen a und der verschiedenen b vernachlässigen, so dass wir erhalten:

$$s' = \frac{k_1 \lambda A}{(a+b)\, 2\pi} \left\{ d\varphi_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a_1 + b_1}{\lambda} \right) + d\varphi_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a_2 + b_2}{\lambda} \right) + \ldots \right\} \tag{11'}$$

Im Argumente der *sin* dürfen wir nicht $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ etc. setzen, da diese Grössen durch die sehr kleine Wellenlänge λ dividirt sind. Wenn nämlich der Durchmesser des Schirmes S viele Wellenlängen umfasst (er braucht dabei trotzdem nur wenige Millimeter gross zu sein), so variirt auch $a + b$ um viele Wellenlängen. Im Ausdruck (11') sind daher die einzelnen Glieder bei unregelmässiger Gestalt des Schirmes in unregelmässig wechselnder Weise positiv und negativ, die ganze Summe wird im Allgemeinen nur unendlich klein sein, weil erst bei bestimmter regelmässiger Gestalt des Schirmes, z. B. wenn alle a und b genau gleich sind, eine endliche Summe s' entsteht. Im Allgemeinen ist daher s' bei unregelmässiger Gestalt eines Schirmes bei M_0 unendlich klein. Man kann daher von einer geradlinigen Ausbreitung des Lichtes sprechen, indem durch genügend grosse Schirme von unregelmässiger Gestalt, die in der Verbindungslinie QP liegen, Dunkelheit in P herbeigeführt wird.

Wenn zwischen Q und P ein Schirm mit kreisförmiger Oeffnung, deren Centrum M_0 ist, aufgestellt wird, so ist die Lichtwirkung in P je nach der Grösse dieser Oeffnung sehr verschieden. Lässt sie nur die halbe Centralzone frei, so ist die Wirkung in P dieselbe, als ob überhaupt kein Schirm da wäre. (Natürliche Intensität.) Ist die Oeffnung doppelt so gross, so dass die ganze Centralzone freibleibt, so ist s' in P doppelt so gross als vorhin, d. h. es herrscht in P die vierfache natürliche Lichtintensität. Wird die Oeffnung wiederum verdoppelt, so dass die beiden ersten Centralzonen frei bleiben, so ist nach (7) $s' = s_1 - s_2$, d. h. nahezu Null, u. s. f. Auch diese Schlüsse hat die Beobachtung bestätigt. Anstatt dass man Schirme und Oeffnungen wechselnder Grösse wählt, braucht man nur den Beobachtungspunkt P auf der Geraden QM_0 zu verschieben.

Giebt also die Fresnel'sche Modification des Huygens'schen Principes nicht nur Rechenschaft von der geradlinigen Ausbreitung

des Lichtes, sondern präcisirt sie dieses Gesetz auch als gewissen Grenzfall,[1]) und behandelt die Abweichungen von diesem Gesetz, die sogenannten Beugungserscheinungen, in einer der Beobachtung entsprechenden Weise, so sind doch noch zwei Mängel in den Fresnel'schen Betrachtungen vorhanden. Nämlich erstens müsste von irgend einer Wellenfläche aus das Licht sich nicht nur in einem Sinne, sondern auch allemal rückwärts (nach der Lichtquelle zu) wieder ausbreiten. Diesen Uebelstand führte ja auch die ursprüngliche Fassung des Huygens'schen Principes mit sich (vgl. oben S. 151). Zweitens ergiebt sich auch durch die Fresnel'sche Berechnung eine falsche Phase der Lichterregung s' in P. Denn nach Formel (1) S. 153 müsste bei directer Fortpflanzung sein:

$$s' = \frac{A}{a+b} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right),$$

während nach (11) (S. 155) durch Uebermittelung der Elementarwellen einer Wellenfläche ist:

$$s' = \frac{k_1 \lambda A}{a+b} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right).$$

Um Identität der Amplituden in beiden Ausdrücken für s' zu erzielen, kann man die Annahme $k_1 = 1/\lambda$ machen, die Phasen sind aber in beiden Ausdrücken nicht in Uebereinstimmung zu bringen. Diese Uebelstände fallen fort, wenn man das Huygens'sche Princip auf eine strengere, analytische Basis stellt. Dieselbe ist zuerst von Kirchhoff[2]) gegeben. Nachstehende, in 5. und 6. gegebene einfachere Ableitung schliesst sich an Voigt[3]) an.

3. Die Differentialgleichung für die Lichterregung. Den analytischen Ausdruck für die Lichterregung s in irgend einem Punkte P des Raumes haben wir angeben können, falls es sich um Kugelwellen oder ebene Wellen handelte. Wenn irgend welche Hindernisse für die Lichtausbreitung vorhanden sind, so werden die Wellenflächen oft in complicirter Weise deformirt. Um dann den analytischen Ausdruck für s zu bilden, muss man zunächst von einer allgemeineren Grundlage ausgehen, nämlich von der Differentialgleichung, der s genügt.

---

1) Dass er bei den Schallerscheinungen so wenig erfüllt ist, liegt daran, dass in Anbetracht der hier auftretenden grossen Wellenlängen die Hindernisse nicht gross gegen letztere sind.

2) G. Kirchhoff, Ges. Werke, oder Vorlesungen über math. Optik.

3) W. Voigt, Kompendium d. theoret. Physik, II, S. 776. Leipzig 1896.

Jede Theorie des Lichtes, sowie überhaupt jede Theorie für einen sich wellenartig ausbreitenden Zustand führt nun zu der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right) = V^2 \Delta s, \tag{12}$$

wobei t die Zeit bedeutet, x, y, z die Coordinaten eines rechtwinkligen Axenkreuzes, V die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen. Dieses Resultat der Theorie möge hier vorausgesetzt werden, eine Ableitung der Differentialgleichung vom elektromagnetischen Standpunkte aus soll später (II. Abschnitt, Kapitel I) folgen.

Zunächst wollen wir zeigen, wie aus jener Differentialgleichung die schon oben benutzten analytischen Formen von s für ebene Wellen und für Kugelwellen folgen:

Legen wir für ebene Wellen die x-Axe in die Wellennormale (Fortpflanzungsrichtung), so kann s nur von x und t abhängen, da in jeder Ebene $x = const.$, welches eine Wellenebene ist, der Schwingungszustand für einen bestimmten Werth von t ein und derselbe sein soll. Dann reducirt sich aber (12) auf:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \tag{13}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist aber

$$s = f_1\left(t - \frac{x}{V}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{V}\right), \tag{14}$$

wobei f_1 irgend eine Function vom Argumente $t - \frac{x}{V}$ bedeutet, f_2 irgend eine Function vom Argumente $t + \frac{x}{V}$. In der That bezeichnet man die ersten Differentialquotienten der Functionen f_1 und f_2 nach ihren Argumenten mit f_1' und f_2', die zweiten Differentialquotienten mit f_1'' und f_2'', so ist

$$\frac{\partial s}{\partial t} = f_1' + f_2', \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = f_1'' + f_2'',$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{V} f_1' + \frac{1}{V} f_2', \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = +\frac{1}{V^2} f_1'' + \frac{1}{V^2} f_2'',$$

d. h. die Gleichung (13) ist erfüllt. Ist nun die Abhängigkeit des s von der Zeit eine rein periodische $\left(\text{proportional zu } \cos 2\pi \frac{t}{T}\right)$, wie es homogenem Licht entspricht, so muss nach (14) sein

$$s = A_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{VT} + \delta_1\right) + A_2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{VT} + \delta_2\right), \tag{15}$$

wobei A_1 und A_2, δ_1 und δ_2 Constanten sind. Dies entspricht aber unserem früheren Ansatz für ebene Wellen der Wellenlänge $\lambda = VT$, und zwar ist A_1 die Amplitude eines Wellenzuges, der sich nach der positiven x-Axe fortpflanzt, dagegen A_2 die Amplitude einer nach der negativen x-Axe sich fortpflanzenden Welle.

Im Falle kugelförmiger Wellen, die sich vom Coordinatenanfang ausbreiten mögen, kann s nur von t und der Entfernung r vom Coordinatenanfang abhängen. Es ist also

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{z}{r}.$$

Denn da $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, so erhält man durch partielle Differentiation:

$$r \cdot \partial r = x \cdot \partial x, \text{ d. h. } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos(rx),$$

und analog $$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Ferner folgt

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial r}\right) = \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{\partial s}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right),$$

analog $$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{\partial s}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{\partial s}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right).$$

Die Differentialgleichung (12) wird daher in diesem Falle

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right), \tag{16}$$

was auch in der Form zu schreiben ist:

$$\frac{\partial^2 (rs)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 (rs)}{\partial r^2}. \tag{17}$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie (13), nur dass rs an Stelle des dortigen s tritt, und r an Stelle von x. Das Integral von (17) ist daher gemäss (14):

$$rs = f_1\left(t - \frac{r}{V}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{V}\right). \tag{18}$$

Hat man wiederum homogenes Licht der Periode T, so folgt:

$$s = \frac{A_1}{r} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} + \delta_1\right) + \frac{A_2}{r} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{r}{VT} + \delta_2\right). \tag{19}$$

Dies ist unser früherer Ansatz für Kugelwellen. Ein Wellenzug geht vom Coordinatenanfang fort, einer geht nach ihm hin. Die Amplituden, z. B. A_1/r, sind umgekehrt proportional zu r. Dieses Resultat, welches schon oben S. 118 bei der Festlegung des Intensitätsmaasses benutzt wurde, folgt also aus der Differentialgleichung (12).

Bevor wir nun das Huygens'sche Princip aus dieser Gleichung (12) ableiten, muss ein Hülfssatz vorangestellt werden.

4. Ein mathematischer Hülfssatz. Es bezeichne $d\tau$ ein Volumenelement, und F sei eine Function, welche innerhalb eines, von einer geschlossenen Fläche S umgrenzten Raumes überall endlich, stetig und eindeutig ist. Es soll betrachtet werden das über den ganzen innerhalb S liegenden Raum zu erstreckende Integral:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = \int \frac{\partial F}{\partial x} dx\, dy\, dz\,.$$

Man kann die Integration partiell nach x ausführen, d. h. man kann zunächst eine Summation derjenigen Elemente $\frac{\partial F}{\partial x} d\tau$ des Integrals vornehmen, welche auf einer beliebigen, zur x-Axe parallelen Geraden $\mathfrak{G}$ liegen. Dadurch erhält man

$$dy\, dz \int \frac{\partial F}{\partial x} dx = dy\, dz\ (-F_1 + F_2 - F_3 + F_4 \text{ etc.}),$$

wobei die F_1, F_2 etc. die Werthe der Function F an denjenigen Stellen der Oberfläche S bedeuten, an welchen sie von der Geraden $\mathfrak{G}$ geschnitten wird. Der Allgemeinheit halber ist angenommen, dass diese Gerade $\mathfrak{G}$ die Fläche S mehrfach schneiden könne; jedenfalls muss die Anzahl der Schnittstellen gerade sein, weil S eine geschlossene Fläche ist. Wenn man die Gerade $\mathfrak{G}$ im Sinne der wachsenden x durchläuft, so bezeichnen F_1, F_3 etc. mit ungeradem Index die Werthe von F an den Eintrittsstellen des von S umschlossenen Raumes, F_2, F_4 etc. mit geradem Index die Werthe von F an den Austrittsstellen. Construiren wir nun über der Basis des sehr kleinen Rechtecks $dy\, dz$ eine Säule, deren Axe der x-Axe parallel ist, so schneidet diese aus der Fläche S Stücke der Grösse dS_1, dS_2 etc. an den vorhin betrachteten Eintritts- resp. Austrittsstellen aus, und zwar ist stets:

$$dy\, dz = \pm\, dS \cdot \cos\,(nx)\,,$$

falls (nx) den Winkel bezeichnet, welchen die Normale der Fläche S an der jeweilig geschnittenen Stelle mit der x-Axe bildet. Das

Vorzeichen ist so zu bestimmen, dass die rechte Seite positiv ist, da die betrachteten Flächenstücke positive Grössen sind. Es soll nun die positive Richtung von n nach dem Innern des von S umgrenzten Raumes weisen. Dann gilt für die Eintrittsstellen:

$$dy\,dz = +\,dS_1 \cdot cos\,(n_1 x) = +\,dS_3 \cdot cos\,(n_3 x) \text{ etc.},$$

für die Austrittsstellen dagegen:

$$dy\,dz = -\,dS_2 \cdot cos\,(n_2 x) = -\,dS_4 \cdot cos\,(n_4 x) \text{ etc.}$$

Es ist daher

$$dy\,dz \int \frac{\partial F}{\partial x}\,d\tau = -\,F_1\,cos\,(n_1 x) \cdot dS_1 - F_2\,cos\,(n_2 x) \cdot dS_2 - \text{etc.}$$

Vollführt man nun noch eine Integration nach y und z, um das ganze betrachtete Raumintegral zu erhalten, so heisst das, man muss die Producte $F\,cos\,(nx)\,dS$ über die ganze Oberfläche von S summiren. Es ist daher:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}\,d\tau = -\int F\,cos\,(nx) \cdot dS, \tag{20}$$

wobei auf der rechten Seite F den Werth der Function am Oberflächenelement dS bedeutet.

Das ursprünglich über einen Raum zu erstreckende Integral ist also durch diesen Hülfssatz in ein solches verwandelt, welches über die Oberfläche des Raumes zu erstrecken ist. — Aus dem Gange des Beweises erkennt man, dass F innerhalb des betrachteten Raumes eindeutig, endlich und stetig sein muss, weil sonst bei der partiellen Integration nicht nur Oberflächenwerthe F_1, F_2 von F auftreten würden, sondern auch Werthe, die sich auf das Innere beziehen.

5. Zwei allgemeine Formeln. Es sei U eine Function, die x, y, z und r explicit enthält. r sei die Entfernung vom Coordinatenanfang, d. h. es ist $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Es bezeichne nun $\frac{\partial U}{\partial x}$ eine Differentiation allein nach der explicit vorkommenden Variabeln x, so dass y, z und r dabei als Constante angesehen werden. Dagegen bezeichne $\frac{dU}{dx}$ den Differentialquotienten von U, der durch Fortschreiten um die Grösse dx längs der x-Axe entsteht, wobei zu berücksichtigen ist, dass sich damit auch r ändert. Es ist dann:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r}\,cos\,(rx), \tag{21}$$

da nach S. 160 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos(rx)$ ist. Es folgt daher auch

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right)\cdot \cos(rx),$$

oder, da bei der Differentiation $\frac{\partial}{\partial x}$ die Grösse r eine Constante ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial x}\cos(rx) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial x}\cos(rx).$$

Analog ist:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial y}\cos(ry) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial y}\cos(ry),$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial z}\cos(rz) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z}\cos(rz). \tag{22}$$

Unter $\frac{dU}{dr}$ soll der Differentialquotient von U nach r verstanden werden, der dadurch entsteht, dass man in der fest angenommenen Richtung r um dr fortschreitet. U ändert sich dadurch aus mehreren Gründen: einmal ändert sich die in U explicit vorkommende Variable r, dies giebt den Beitrag $\frac{\partial U}{\partial r}$, andererseits ändern sich auch die in U explicit vorkommenden Variabeln x, y, z und zwar, wie eine einfache geometrische Ueberlegung ergiebt, um bezw. $dr\cdot\cos(rx)$, $dr\cdot\cos(ry)$, $dr\cdot\cos(rz)$. Es ist daher

$$\frac{dU}{dr} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial x}\cos(rx) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(ry) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(rz). \tag{23}$$

Wenn man in dieser Gleichung anstatt U den Werth $\frac{\partial U}{\partial r}$ einsetzt, so folgt:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial x}\cos(rx) + \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial y}\cos(ry) + \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z}\cos(rz). \tag{24}$$

Durch Addition der drei Gleichungen (22) entsteht daher mit Berücksichtigung von (23) und (24):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{dU}{dr} - \frac{\partial U}{\partial r}\right). \tag{25}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right). \tag{26}$$

Multiplicirt man die Gleichung (25) mit dem Volumenelement $d\tau = dx\,dy\,dz$ und integrirt über einen Raum, innerhalb dessen $\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}$ eindeutig, endlich, stetig ist, so erhält man durch dreimalige Anwendung[1]) des Hülfssatzes (20) auf S. 162 und Berücksichtigung von (26):

$$(27)\quad \begin{aligned} &-\int \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(nz)\right\} dS = \\ &\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right) d\tau + \int \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial U}{\partial r} - U\right) d\tau. \end{aligned}$$

Der Raum, innerhalb dessen integrirt wird, darf offenbar den Coordinatenanfang nicht enthalten, da dort $^1/_r$ unendlich gross wird. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: I. Entweder wird der Integrationsraum von einer Fläche S begrenzt, welche den Coordinatenanfang nicht umschliesst, oder II. die äussere Begrenzungsfläche S des Integrationsgebietes umschliesst den Coordinatenanfang.

II. Fall. In diesem Falle, den wir zunächst betrachten wollen, schliessen wir den Coordinatenanfang durch eine um ihn beschriebene Kugel K von. sehr kleinem Radius ϱ aus dem Integrationsgebiete aus. Dasselbe hat dann zwei Begrenzungsflächen: Eine äussere Begrenzung S und eine innere durch die Oberfläche K der Kugel. Das in (27) auftretende Oberflächenintegral ist daher sowohl über die äussere Oberfläche S, als auch über die Kugelfläche K zu erstrecken. Letzteres liefert aber keinen endlichen Beitrag, wenn ϱ unendlich klein ist, da die Oberfläche von K unendlich klein wie ϱ^2 wird, und auf der linken Seite von (27) r nur in der ersten Potenz im Nenner auftritt. Wir können ferner setzen:

$$(28)\quad \frac{\partial U}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(nz) = \frac{\partial U}{\partial n},$$

wobei $\partial U : \partial n$ den Differentialquotienten bedeutet, den man erhält, wenn man in der Richtung der inneren Normale n auf S um ∂n fortschreitet und dabei r als eine Constante behandelt. So wird daher die linke Seite von (27):

$$-\int \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} dS,$$

1) Das in jener Formel (20) auftretende Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}$ hat dieselbe Bedeutung wie hier $\frac{d}{dr}$. Jene Formel ist hier auch für eine Differentiation nach y und nach z anzuwenden.

und dieses Integral ist nur über die äussere Oberfläche (nicht auch noch über die kleine Kugelfläche K) zu erstrecken.

Das letzte Glied der rechten Seite von (27) wollen wir dadurch umgestalten, dass wir schreiben

$$d\tau = r^2 \, d\varphi \, dr\,, \tag{29}$$

indem wir ein Volumenelement uns herstellen durch den Ausschnitt eines Elementarkegels des räumlichen Oeffnungswinkels $d\varphi$ aus einer Kugelschale, die zwischen den Radien r und $r + dr$ liegt. So entsteht:

$$\begin{gathered}\int \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U\right) d\tau = \int d\varphi \int_{\varrho}^{\bar r} dr \cdot \frac{d}{dr}\left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U\right) = \\ \int d\varphi \left\{\left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U\right)_{r = \bar r} - \left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U\right)_{r = \varrho}\right\}.\end{gathered} \tag{30}$$

$\bar r$ bezeichnet die Werthe von r an der äusseren Oberfläche S des Integrationsgebietes. Wenn nun ϱ unendlich klein wird, so giebt $r \frac{\partial U}{\partial r}$ für $r = \varrho$ nichts Endliches. Ferner ist für $\lim \varrho = 0$

$$\int d\varphi \cdot (U)_{r = \varrho} = 4\pi \, U_0\,, \tag{31}$$

wenn mit U_0 der Werth von U im Coordinatenanfang bezeichnet wird. Da ferner ist

$$\bar r^2 \, d\varphi = - \, dS \cos (nr)\,, \tag{32}$$

wenn die positive Richtung von r vom Coordinatenanfang fortgerichtet ist, so ist:

$$\begin{aligned}\int d\varphi \left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U\right)_{r = \bar r} &= - \int dS \cdot \cos (nr) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2}\right) \\ &= - \int dS \cdot \cos (nr) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right),\end{aligned} \tag{33}$$

wobei dieses Integral über die äussere Oberfläche S zu erstrecken ist. — Es folgt daher schliesslich nach (30), (31) und (33) aus (27):

$$\begin{gathered}- \int \left\{\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - \cos (nr) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\right\} dS = \\ \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right) d\tau + 4\pi \, U_0.\end{gathered} \tag{34}$$

In dieser Gleichung kann die Raumintegration über das ganze Innere, welches von der Fläche S umschlossen wird, ausgedehnt

werden, da die unendlich kleine Kugel K, deren Volumen proportional zu ϱ^3 ist, für $\lim \varrho = 0$ einen verschwindenden Beitrag liefert, weil r nur in der ersten Potenz im Nenner enthalten ist. —

I. Fall. Wenn die Fläche S den Coordinatenanfang nicht umschliesst, so können wir alle Betrachtungen ungeändert lassen, nur dass die Construction mit der Kugel K fortfällt. Um das letzte Glied der rechten Seite von (27) zu integriren, wollen wir gerade wie vorhin setzen:

$$d\tau = r^2 \, d\varphi \, dr;$$

die Grenzen der Integration sind jetzt aber nicht ϱ und $\bar{r}$, sondern r_1 und r_2, nämlich diejenigen beiden Entfernungen vom Coordinatenanfang, in welchen die Axe des Elementarkegels vom Oeffnungswinkel $d\varphi$ die Fläche S trifft. Daher folgt

$$(30') \quad \int \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U \right) d\tau = \int d\varphi \left\{ \left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U \right)_{r = r_2} - \left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U \right)_{r = r_1} \right\}.$$

Bezeichnet nun dS ein Flächenelement, welches der Elementarkegel aus S ausschneidet, so ist an der Eintrittsstelle des Elementarkegels, da n die innere Normale von S sein soll:

$$r_1^{\,2} \, d\varphi = + \, dS \cdot \cos (nr),$$

an der Austrittsstelle dagegen

$$r_2^{\,2} \, d\varphi = - \, dS \cdot \cos (nr).$$

Man kann daher das Raumintegral (30') als das Oberflächenintegral schreiben:

$$(30') \quad = - \int dS \cdot \cos (nr) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right) = - \int dS \cdot \cos (nr) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right).$$

Folglich leitet man für diesen I. Fall aus (27) ab:

$$(34') \quad - \int \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - \cos (nr) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right\} dS = \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) d\tau.$$

6. Strenge Formulirung des Huygens'schen Princips. Von den Formeln (34) und (34') machen wir folgende Anwendung: Es sei s die Lichterregung in irgend einem Punkte, s_0 sei der Werth von s im Coordinatenanfang. s genügt der Differentialgleichung (12) auf S. 159. Unter U wollen wir nun diejenige Function verstehen,

die aus s entsteht, wenn man das Argument t (Zeit) ersetzt durch $t - {}^r/_V$. Wir wollen dies formell ausdrücken durch:

$$U = s\,(t - {}^r/_V).$$

Es ist dann offenbar $U_0 = s_0$, da für den Coordinatenanfang $r = 0$ ist. Ferner ist nach der Differentialgleichung (12):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

da aber U eine Function vom Argument $t - {}^r/_V$ ist, so ist auch (vgl. oben S. 160 Formeln (17) und (18):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt daher

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$

Daher ergiebt (34) für den Fall, dass die Fläche S den Coordinatenanfang umschliesst:

$$4\pi\, s_0 = \int\!\!\int \left\{ -\frac{\partial \dfrac{s\,(t - {}^r/_V)}{r}}{\partial r} \cos\,(nr) - \frac{1}{r} \frac{\partial\, s\,(t - {}^r/_V)}{\partial n} \right\} dS. \quad (35)$$

Man kann den Inhalt dieser Formel in folgender Weise interpretiren: Die Lichterregung s_0 in einem beliebigen Punkte P_0 (in den wir den Coordinatenanfang gelegt haben) kann als die Superposition von Erregungen angesehen werden, welche von den Oberflächenelementen dS einer beliebigen, den Punkt P_0 einschliessenden, geschlossenen Fläche S mit der Geschwindigkeit V nach P_0 hin fortgepflanzt sind. Denn die Elemente des Oberflächenintegrals (35) sind Functionen vom Argument $t - {}^r/_V$, für eine Elementarerschütterung besteht also zu einer um ${}^r/_V$ späteren Zeit in P_0 dieselbe Phase, wie sie vorher auf dS bestanden hat.

In dieser Fassung von (35) erkennen wir die Grundlage des ursprünglichen Huygens'schen Principes, aber der Schwingungszustand der einzelnen Quellen dS ist ein viel complicirterer, als er nach unseren früheren Betrachtungen sein müsste, nach denen die Integrationselemente einfach proportional zu $s\,(t - {}^r/_V)$ waren (vgl. Formel (4) auf S. 153).

Man kann also nach der Formel (35) die Erregung s_0 im

Punkte P_0 berechnen, falls man die Erregungen s und $\frac{\partial s}{\partial n}$ auf einer geschlossenen Fläche S kennt. In gewissen Fällen tritt dies ein, wenn z. B. eine punktförmige Lichtquelle Q und nirgends Schirme für die Lichtausbreitung vorhanden sind, überhaupt die Homogenität des Raumes nirgends gestört ist. In diesem Falle kann man allerdings s_0 auch direct hinschreiben. Immerhin ist es für das Folgende nützlich, zunächst auf diesen Fall die Formel (35) anzuwenden.

Die geschlossene Fläche S möge die Lichtquelle Q ausschliessen. Die Erregung in irgend einem Punkte P auf S, der die Entfernung r_1 von der Lichtquelle Q besitzt, sei gegeben durch:

$$s = \frac{A}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right). \tag{36}$$

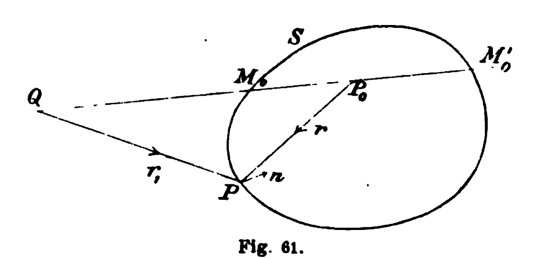


Fig. 61.

Es ist dann

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial s}{\partial r_1} \cos (nr_1), \text{ d. h.}$$

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \cos (nr_1) \left\{ -\frac{A}{r_1^2} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \frac{2\pi A}{\lambda r_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)\right\}. \tag{37}$$

Nun soll r_1 sehr gross gegen λ sein, wir können daher das erste Glied gegen das zweite vernachlässigen und erhalten so:

$$\frac{\partial s\,(t - r/V)}{\partial n} = \cos (nr_1) \cdot \frac{2\pi A}{\lambda r_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda}\right). \tag{38}$$

Ferner folgt aus (36)

$$\frac{s\,(t - r/V)}{r} = \frac{A}{rr_1} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda}\right).$$

Differenzirt man diesen Ausdruck nach r, so kann man, ähnlich wie in (37), wiederum ein Glied fortlassen, da auch r sehr gross gegen λ sein soll. Es ergiebt sich daher:

$$\frac{\partial \frac{s\,(t - r/V)}{r}}{\partial r} = \frac{2\pi A}{\lambda rr_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda}\right). \tag{39}$$

Durch Einsetzen der Werthe (38) und (39) in (35) folgt:

$$s_0 = \frac{A}{2\lambda} \int \frac{1}{rr_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda} \right) [\cos (nr) - \cos (nr_1)] \, dS. \quad (40)$$

In dieser Formel treffen wir den früheren Fresnel'schen Ansatz (4) auf S. 153 wieder, aber mit folgenden Verbesserungen:

1. Der Fresnel'sche Factor k ist hier direct aus der Grundlage der Theorie, nämlich aus der Differentialgleichung für s, bestimmt. Nehmen wir z. B. ein Element dS, welches im Punkte M_0 (vgl. Figur 61) auf der Verbindungslinie QP_0 liegt, so ist für dasselbe $\cos (nr) = - \cos (nr_1)$, da die positiven Richtungen r und r_1 gerade einander entgegenlaufen. Daher ist der Fresnel'sche Strahlungsfactor k:

$$k = \frac{\cos (nr)}{\lambda}.$$

Steht dS senkrecht auf QP_0, so ist $\cos (nr) = -1$, und abgesehen vom Vorzeichen, erhalten wir den Werth, der oben S. 158 für den Strahlungsfactor k_1 der Centralzone auf indirectem Wege abgeleitet ist.

2) Für ein Element dS, welches bei M_0' liegt (vgl. Figur 61), ist r und r_1 gleichgerichtet, d. h. $\cos (nr) - \cos (nr_1) = 0$. Sein Einfluss verschwindet also in s_0, d. h. wir erhalten nicht eine Wirkung der Elementarwellen nach rückwärts, die bei der Fresnel-Huygens'schen Fassung des Principes stets bestehen würde. Wie man sofort sieht, ist dieses Verschwinden der nach rückwärts fortgepflanzten Wellen eine Folge davon, dass in (35) jede Elementarwirkung als Differenz zweier Grössen auftritt.

3. Die Phase in P_0 wird richtig bestimmt, wie sie die directe Ausbreitung des Lichtes von Q nach P_0 ergiebt. Flächenelemente dS nämlich, welche bei M_0 senkrecht zu QP_0 liegen, besitzen in (40) den Factor

$$- \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda} \right),$$

es ist also, als ob diese Flächenelemente um $\pi/2$ in der Phase beschleunigt schwingen [1]) gegenüber der directen Fortpflanzung von Q

1) Wenn man als Lichterregung s nicht eine convexe Kugelwelle annimmt, sondern eine concave, die nach einem Punkte Q ausserhalb S hinläuft, so modificiren sich die Betrachtungen etwas, wie man leicht aus (35) ableiten kann. (In Mascart, Traité d'optique, I, S. 260, Paris 1889 ist dieser Fall berechnet.) Dies kann unter Umständen für Interferenzerscheinungen von

nach dS, welche gemäss (36) auf $\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda}\right)$ führen würde. Integrirt man über S, so ergiebt sich wiederum für den Punkt P_0 : $+ \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a + b}{\lambda}\right)$, nicht, wie bei der Fresnel'schen Rechnung, $\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a + b}{\lambda}\right)$ (cf. oben S. 158). Dieser Widerspruch der Fresnel'schen Rechnung ist also hier auch gehoben.

Wenn nun irgend welche Schirme aufgestellt sind, so wird streng genommen die Aufgabe, s_0 zu bestimmen, ausserordentlich complicirt, da durch die Anwesenheit der Schirme die Lichterregung s in einem beliebigen Punkte P verschieden ist von der Erregung $\bar{s}$, wie sie ohne Schirme von den vorhandenen Lichtquellen bewirkt würde. Zur angenäherten Lösung der Aufgabe kann man aber die Annahme machen, dass, wenn die Schirme nicht das Licht reflectiren und vollkommen undurchsichtig sind, dicht an der von den Lichtquellen abgewandten Seite eines Schirmes s sowohl, als $\frac{\partial s}{\partial n}$ verschwinden, dass dagegen an den freien Stellen, welche durch keinen vor die Lichtquellen gestellten Schirm geschützt sind, die Lichterregung s den freien Werth $\bar{s}$ besitze.

In dieser Weise wurde ja auch bei den oben angestellten Fresnel'schen Ueberlegungen verfahren. Man kann sich dann von der Gleichung (40) aus, indem man die Fläche S möglichst an den abgewandten Seiten der Schirme entlang construirt, sehr angenähert Rechenschaft über die Lichterregung s_0 in einem beliebigen Punkte P_0 geben; in (40) treten nur die ungeschützten Flächenelemente dS auf. Wie man speciell diese ungeschützte Fläche S legt, ist ganz gleichgültig, sie muss nur von den Löchern in den Schirmen umrandet sein. Dieses Resultat können wir aus der Formel (34') auf S. 166 ableiten. Dieselbe ergiebt nämlich hier, dass die rechte Seite von (40) den Werth Null hat, wenn die geschlossene Fläche S den Punkt P_0, für den s_0 berechnet werden soll (und die Lichtquelle Q) ausschliesst. Erstrecken wir daher ein Integral s_0 gemäss der Gleichung (40) über eine ungeschlossene Fläche S, welche von einer Curve C umrandet ist, und construiren wir noch irgend eine andere Fläche S', welche ebenfalls von C umrandet ist, so kann $S + S'$ als eine einzige geschlossene Fläche angesehen werden,

Wichtigkeit sein. Vgl. hierüber Gouy, Compt. Rend. 110, S. 1251; 111, S. 33, 1890. — Wied. Beibl. 14, S. 969.

welche den Coordinatenanfang P_0 nicht einschliessen soll. Nach (34') verschwindet die Summe $s_0 + s_0'$ der beiden über S und S' erstreckten Integrale. Es ist dabei aber n beständig als die innere Normale der von $S + S'$ gebildeten geschlossenen Fläche definirt, wenn also die positive Normale auf S nach der Seite hin zeigt, wo der Coordinatenanfang P_0 liegt, so zeigt die positive Normale auf S' von dieser Seite fort. Rechnen wir auch auf S' die positive Normale nach der Seite, nach welcher P_0 zu liegt, so kehrt sich dadurch das Vorzeichen des Integrals s_0' um. Wir haben daher das Resultat: $s_0 - s_0' = 0$, d. h. $s_0 = s_0'$, mit Worten ausgedrückt: Das Integral s_0, definirt durch die Gleichung (40), hat für alle, von einer Curve C umrandeten, sonst beliebig gestalteten, ungeschlossenen Flächen S denselben Werth, wenn dabei die positive Normale immer in demselben Sinne gerechnet wird (von der Seite der Lichtquelle Q nach der Seite von P_0), und wenn diese verschiedenen Flächen S weder die Lichtquelle Q, noch den Punkt P_0, für den s_0 berechnet werden soll, einschliessen.

Wie man nun vom Integral (40) aus die geradlinige Ausbreitung des Lichtes einerseits, gewisse Abweichungen davon aber auch gleichzeitig ableiten kann, ist schon oben in 2. mit Hülfe der Fresnel-schen Zonenconstruction besprochen. Im folgenden Kapitel sollen genauer die Abweichungen von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes, die sogenannten Beugungserscheinungen, besprochen werden.

Kapitel IV.

Beugung des Lichtes.

Wie aus den Entwickelungen des § 2 des vorigen Kapitels hervorgeht, treten Beugungserscheinungen (man nennt sie auch Diffraction des Lichtes) immer auf, wenn die Schirme oder freien Oeffnungen nicht sehr gross im Vergleich zur Lichtwellenlänge sind. Aber selbst in letzterem Falle treten, wie wir sehen werden,

unter Umständen Beugungserscheinungen auf, z. B. am Rande des geometrischen Schattens eines sehr grossen Schirmes. Wenn wir nun die Beugungserscheinungen auf Grund der Gleichung (40) gemäss den oben S. 170 angestellten Ueberlegungen berechnen, so dürfen wir nicht vergessen, dass wir dadurch nur eine angenäherte Theorie erhalten, da einerseits bei vorhandenen Schirmen an den ungeschützten Stellen für s nicht genau der Werth gilt, wie er bei völlig ungestörter Lichtausbreitung sein würde, andererseits an den geschützten Stellen nicht genau s und $\frac{\partial s}{\partial n}$ verschwinden. Die Annäherung wird um so mehr die Wahrheit treffen, je grösser die Oeffnungen in den Schirmen sind; und in der That stimmt in den meisten Fällen, wenn man z. B. nicht besonders kleine Oeffnungen verwendet, die angenäherte Theorie gut mit der Erfahrung. — In § 7 dieses Kapitels wird die strenge Theorie der Lichtbeugung behandelt werden.

1. Allgemeine Behandlung der Beugungserscheinungen. Wir wollen annehmen, dass zwischen Lichtquelle Q und dem Punkte P_0 ein ebener Schirm S vorhanden sei, der unendlich ausgedehnt ist und der eine beliebig gestaltete Oeffnung σ besitzt, welche klein sei im Vergleich zu der Entfernung r_1 von der Lichtquelle Q und zu der Entfernung r vom Punkte P_0, für den wir die Lichterregung s_0 nach der Formel (40) des vorigen Kapitels berechnen wollen. Da bei der Kleinheit von σ bei der Integration innerhalb σ die Winkel (nr) und (nr_1) als constant zu betrachten sind, und ebenfalls die Grössen r und r_1, sofern sie nicht durch λ dividirt sind, so folgt aus (40):

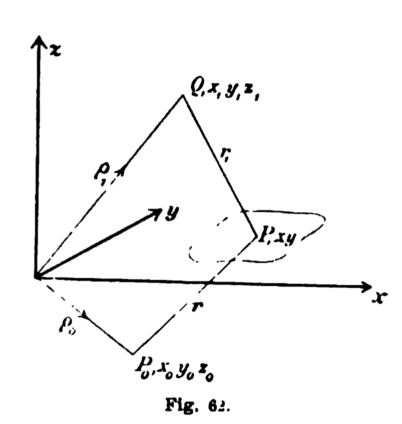


Fig. 62.

$$s_0 = \frac{A}{2\lambda} \cdot \frac{\cos(nr) - \cos(nr_1)}{rr_1} \int \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda}\right) d\sigma. \tag{1}$$

Wir wollen nun ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z zu Grunde legen. Die xy-Ebene liege im Schirme S, ein beliebiger Punkt P der Oeffnung σ haben die Coordinaten x und y. Die Lichtquelle Q habe die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und zwar sei z_1

positiv. Der Punkt P_0 habe die Coordinaten x_0, y_0, z_0. z_0 ist negativ. Dann ist

$$r_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + z_1^2, \quad r^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2. \quad (2)$$

Die Entfernungen des Q und P_0 vom Coordinatenanfang seien ϱ_1 und ϱ_0. Dann ist

$$\varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad \varrho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2. \quad (3)$$

Man kann nun schreiben:

$$\begin{aligned} r_1 &= \varrho_1 \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 - 2(xx_1 + yy_1)}{\varrho_1^2}}, \\ r &= \varrho_0 \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 - 2(xx_0 + yy_0)}{\varrho_0^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Die Dimensionen der Oeffnung σ sollen klein sein gegen ϱ_1 und ϱ_0. Ausserdem soll auch die Entfernung der Oeffnung σ vom Coordinatenanfang klein sein gegen ϱ_1 und ϱ_0. Daher ist bei der Integration über σ auch x und y klein gegen ϱ. Entwickelt man nun die Ausdrücke (4) nach steigenden Potenzen von x/ϱ_1, y/ϱ_1 bezw. x/ϱ_0, y/ϱ_0 und bricht mit den zweiten Potenzen ab, so entsteht, da $(1 + \varepsilon)^{1/2} = 1 + 1/2\,\varepsilon - 1/8\,\varepsilon^2$ ist, falls ε klein gegen 1:

$$r_1 = \varrho_1 \left\{1 + \frac{x^2 + y^2}{2\varrho_1^2} - \frac{xx_1 + yy_1}{\varrho_1^2} - \frac{(xx_1 + yy_1)^2}{2\varrho_1^4}\right\}, \quad (5)$$

$$r = \varrho_0 \left\{1 + \frac{x^2 + y^2}{2\varrho_0^2} - \frac{xx_0 + yy_0}{\varrho_0^2} - \frac{(xx_0 + yy_0)^2}{2\varrho_0^4}\right\}. \quad (6)$$

Nennen wir nun die Richtungscosinus, welche die Richtungen ϱ_1 und ϱ_0 mit den Coordinatenaxen bilden, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bezw. $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, wobei die positiven Richtungen von ϱ_1 und ϱ_0 vom Coordinatenanfang fortgehen sollen, so ist

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{\varrho_1}, \; \beta_1 = \frac{y_1}{\varrho_1}; \; \alpha_0 = \frac{x_0}{\varrho_0}, \; \beta_0 = \frac{y_0}{\varrho_0}. \quad (7)$$

Durch Addition von (5) und (6) erhält man daher:

$$\begin{aligned} r_1 + r = \varrho_1 + \varrho_0 - x(\alpha_1 + \alpha_0) - y(\beta_1 + \beta_0) + \frac{x^2 + y^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right) \\ - \frac{(x\alpha_1 + y\beta_1)^2}{2\varrho_1} - \frac{(x\alpha_0 + y\beta_0)^2}{2\varrho_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Setzt man diesen Werth in (1) ein, und schreibt zur Abkürzung:

$$(9) \quad \left.\begin{aligned} & r_1 + r = \varrho_1 + \varrho_0 + f(x, y) \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \\ & \frac{t}{T} - \frac{\varrho_1 + \varrho_0}{\lambda} = \frac{t'}{T} \text{[1]} \\ & \frac{A}{2\lambda} \frac{\cos(nr) - \cos(nr_1)}{rr_1} = A', \end{aligned}\right\}$$

so wird (1) zu:

$$(10) \quad s_0 = A' \left\{ \sin 2\pi \frac{t'}{T} \int \cos[f(x, y)]\, d\sigma - \cos 2\pi \frac{t'}{T} \int \sin[f(x, y)]\, d\sigma \right\}.$$

Man kann daher s_0 auffassen als entstanden durch die Superposition zweier Wellen, deren Amplituden proportional sind zu:

$$(11) \quad \begin{aligned} C &= \int \cos[f(x, y)]\, d\sigma, \\ S &= \int \sin[f(x, y)]\, d\sigma, \end{aligned}$$

und welche eine Phasendifferenz von $\pi/_2$ gegen einander besitzen. Nach dem Satze der S. 123 [vgl. auch die dortige Formel (11)] ist daher die Lichtintensität im Punkte P_0:

$$(12) \quad J = A'^2 (C^2 + S^2).$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: nämlich 1. Lichtquelle und der betrachtete Punkt P_0 liegen im Endlichen (Fresnel'sche Beugungserscheinungen), 2. Lichtquelle und P_0 sind unendlich weit entfernt (Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen).

2. Fresnel'sche Beugungserscheinungen. Wir legen den Coordinatenanfang auf die Verbindungslinie QP_0 (und in die Ebene des Beugungsschirmes). Dann ist ϱ_1 und ϱ_0 gerade einander entgegen gerichtet, und daher

$$\alpha_1 = -\alpha_0, \quad \beta_1 = -\beta_0.$$

Es wird dann, wie ein Vergleich von (8) und der Definitionsgleichung (9) für $f(x, y)$ lehrt:

$$(13) \quad f(x, y) = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0} \right) [x^2 + y^2 - (x\alpha_1 + y\beta_1)^2].$$

Diesen Ausdruck kann man noch weiter vereinfachen, wenn man die x-Axe in die Projection von QP_0 auf den Beugungsschirm legt. Es ist dann $\beta_1 = 0$. Bezeichnet man ferner den Winkel, den ϱ_1 mit der x-Axe macht, durch φ, so wird dann:

---

1) Man verlegt also den Anfangspunkt der Zeit.

$$f(x, y) = \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)[x^2 \cdot \cos^2\varphi + y^2]. \tag{14}$$

Um den Gang der Untersuchung nicht durch längere Rechnungen unterbrechen zu müssen, schicken wir einige mathematische Betrachtungen voraus.

3. Fresnel'sche Integrale. Wir wollen die Eigenschaften der als „Fresnel'sche Integrale" bezeichneten Functionen geometrisch discutiren [1]). Es sind dies die beiden Integrale:

$$\xi = \int_0^v \cos\frac{\pi v^2}{2}\, dv, \quad \eta = \int_0^v \sin\frac{\pi v^2}{2}\, dv. \tag{15}$$

Wir wollen ξ und η für jeden bestimmten Werth des Parameters v als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes E auffassen. Bei continuirlicher Aenderung des v beschreibt dann E eine Curve. Die Gestalt dieser Curve wollen wir bestimmen.

Die Curve geht durch den Coordinatenanfang, weil für $v = 0$ auch $\xi = \eta = 0$ ist. Wenn man v in $-v$ umkehrt, so ändert sich das Integrationselement nicht, aber die obere Grenze des Integrals, und daher auch ξ und η wechseln die Zeichen. Daher ist der Coordinatenanfang ein Symmetriecentrum der Curve, denn zu jedem $+\xi$, $+\eta$ kann man ein $-\xi$, $-\eta$ finden. Die Projectionen eines Bogenelementes ds der Curve auf die Coordinatenaxen sind nach (15):

$$d\xi = dv \cdot \cos\frac{\pi v^2}{2}, \quad d\eta = dv \cdot \sin\frac{\pi v^2}{2}. \tag{16}$$

Daher folgt

$$ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = dv,$$

oder, wenn wir die Bogenlänge s vom Coordinatenanfang an zählen:

$$s = v. \tag{17}$$

Der Winkel τ, den die Tangente der Curve in dem beliebigen Punkte E mit der ξ-Axe einschliesst, ist gegeben durch

$$tg\,\tau = \frac{d\eta}{d\xi} = tg\,\frac{\pi v^2}{2}, \text{ d. h. } \tau = \frac{\pi}{2} v^2. \tag{18}$$

Im Coordinatenanfang verläuft also die Curve parallel zur ξ-Axe, für $v = 1$, d. h. nach der Bogenlänge $s = 1$, ist sie parallel zur

1) Diesen Weg hat zuerst A. Cornu eingeschlagen im Journ. de Phys. 3, 1874.

η-Axe, für $s^2 = 2$ parallel zur ξ-Axe, für $s^2 = 3$ parallel zur η-Axe u. s. f.

Der Krümmungsradius ϱ in einem beliebigen Punkte E der Curve ist gegeben durch [vgl. (17) und (18)]:

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{\pi v} = \frac{1}{\pi s}. \tag{19}$$

Für $v = 0$, d. h. im Coordinatenanfang, hat daher die Curve einen Inflexionspunkt, für wachsende v, d. h. für wachsende Bogen, wird ϱ beständig kleiner. Die Curve bildet daher eine sich nicht schneidende Doppelspirale, welche sich um die beiden asymptotischen Punkte F und F', welche für $v = +\infty$ und $v = -\infty$ erreicht werden, herumwindet. Wir wollen die Coordinaten dieser Punkte berechnen. Für F ist

$$\xi_F = \int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}\, dv, \quad \eta_F = \int_0^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2}\, dv. \tag{20}$$

Um diese bestimmten Integrale auszuwerthen, gehen wir aus von

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = M. \tag{21}$$

Schreibt man y als Integrationsvariabele, so ist auch

$$\int_0^\infty e^{-y^2} dy = M.$$

Das Product beider bestimmten Integrale liefert:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = M^2. \tag{22}$$

Fasst man nun x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes P auf, so ist $x^2 + y^2 = r^2$, wobei r die Entfernung des P vom Coordinatenanfang ist. Ferner kann man $dx\,dy$ als Flächenelement do auffassen in der xy-Ebene. Begrenzt man aber ein Flächenelement durch zwei im Abstande dr von einander liegende unendlich kleine Kreisbogen, welche um den Coordinatenanfang beschrieben sind und den Centriwinkel $d\varphi$ haben, so ist ein Flächenelement do:

$$do = r\,dr\,d\varphi. \tag{23}$$

Man kann daher (22) schreiben, da über einen Quadranten der Coordinatenebene integrirt wird:

$$M^2 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr. \tag{24}$$

Nun ist aber

$$\int e^{-r^2} r\,dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2},$$

daher wird

$$M^2 = \frac{\pi}{4}, \quad M = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{25}$$

Schreibt man nun in (21) für x:

$$x^2 = -i\frac{\pi v^2}{2}, \text{ d. h. } x = v\sqrt{\frac{-i\pi}{2}}, \tag{26}$$

wobei i die imaginäre Einheit bedeutet, so folgert man aus (21) und (25):

$$\sqrt{\frac{-i\pi}{2}} \int_0^\infty e^{i\frac{\pi v^2}{2}} dv = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \text{ oder}$$

$$\text{da } \frac{1}{\sqrt{-i}} = \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ ist:}$$

$$\int_0^\infty e^{i\frac{\pi v^2}{2}} dv = \frac{1+i}{2}. \tag{27}$$

Da nun ist:

$$e^{i\frac{\pi v^2}{2}} = \cos\frac{\pi v^2}{2} + i\sin\frac{\pi v^2}{2}, \tag{28}$$

so folgt durch Gleichsetzen der reellen und imaginären Bestandtheile beider Seiten der Gleichung (27):

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2} dv = \frac{1}{2}, \quad \int_0^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2} dv = \frac{1}{2}. \tag{29}$$

Gemäss (20) hat also der asymptotische Punkt F die Coordinaten $\xi_F = \eta_F = 1/2$. Es ergiebt sich daher die in Figur 63 gezeichnete Gestalt der Curve. Man kann die Curve in folgender Weise construiren: Von 0 aus geht man bis zum Werthe $s = 0{,}1$ auf der Abscissenaxe fort. An diesen Punkt anschliessend construirt man

nun einen Kreis mit dem Radius (nach 19) $\varrho = \frac{1}{\pi s} = \frac{10}{\pi}$. Das Centrum des Kreises liegt vom Punkte $s = 0,1$ aus in einer Richtung, die [nach (18)] den Winkel $\tau = \frac{\pi s^2}{2} = 0,01 \frac{\pi}{2}$ mit der η-Axe einschliesst. Auf dem so construirten Kreise trägt man den Bogen $s = 0,1$ ab. An den Endpunkt trägt man einen Kreisbogen mit dem Radius $\varrho = \frac{1}{\pi s} = \frac{1}{\pi \,.\, 0,2} = \frac{5}{\pi}$. Die Richtung nach seinem Centrum macht den Winkel $\tau = \frac{\pi s^2}{2} = 0,04 \cdot \frac{\pi}{2}$ mit der η-Axe. In dieser Weise fortfahrend, kann man die ganze Curve construiren.

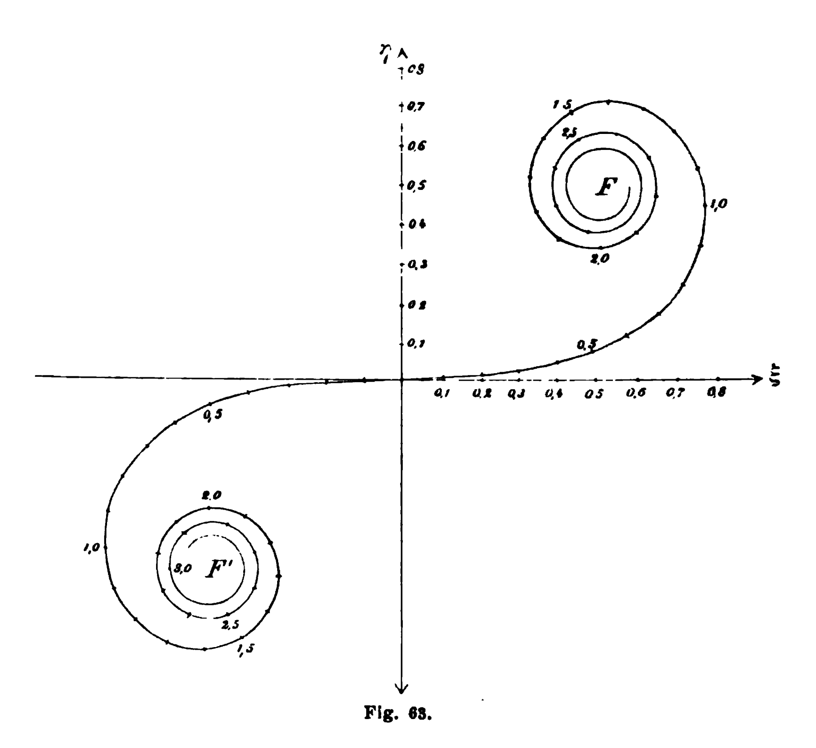


Fig. 63.

4. Beugung am geradlinigen Rande eines Schirmes. Wir nehmen die Bezeichnungen des § 2 wieder auf. Die y-Axe möge parallel zur Schirmkante liegen, der Schirm erstrecke sich vom Werthe $x = +\infty$ bis zum Werthe $x = x'$ (Schirmrand). In Figur 64 ist x' positiv, d. h. P_0 liegt ausserhalb des geometrischen Schattens

des Schirmes. Untersuchen wir die Lichtintensität in einer zur Schirmkante senkrechten Ebene, welche durch die Lichtquelle Q geht, so liegt QP_0 in der xz-Ebene. Es gilt daher dann die Formel (14), und wir haben nach (11) zu bilden:

$$C = \int_{-\infty}^{x'}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy \cos\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)(x^2 \cos^2\varphi + y^2)\right],$$

$$S = \int_{-\infty}^{x'}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy \sin\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)(x^2 \cos^2\varphi + y^2)\right]. \tag{30}$$

Zunächst haben wir es zu rechtfertigen, dass wir hier über die ganze, vom Schirm frei gelassene xy-Ebene integriren, während wir bei unseren früheren Entwickelungen (vgl. S. 172) voraussetzten, dass nur über eine Oeffnung σ integrirt werden solle, deren sämmtliche Punkte P in Distanzen vom Coordinatenanfang liegen, welche klein gegen ϱ_1 und ϱ_0 sein sollten. Ein derartiges Integrationsgebiet ist nun in der That allein für die Lichtintensität J im Punkte P_0 massgebend, da es die Centralzonen, und zwar noch sehr viele derselben, umfasst. Eine Integration über anschliessende, weitere Gebiete fügt aber keine weiteren Antheile zu J hinzu, da wir früher ableiteten, dass ein Schirmrand keinen Einfluss mehr auf die Lichtintensität in einem Punkte P_0 hat, wenn er viele Zonen weit entfernt ist von der directen Verbindungslinie von P_0 zur Lichtquelle Q. Wir können daher in (30) ohne Aenderung des Resultates die Integration über die ganze, vom Schirm frei gelassene xy-Ebene vornehmen.

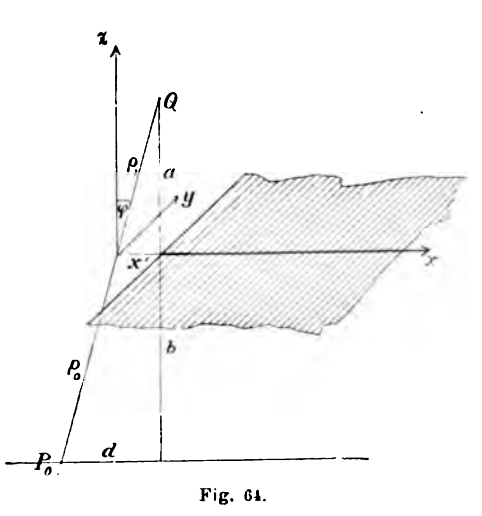


Fig. 64.

Setzt man in (30):

$$\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)x^2\cos^2\varphi = \frac{\pi v^2}{2},\quad \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)y^2 = \frac{\pi u^2}{2}, \tag{31}$$

so entsteht:

$$
(32)\quad
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{\cos\varphi\cdot\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)}\cdot\int\limits_{-\infty}^{v'}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv\,du\cos\frac{\pi}{2}(v^2+u^2),\\
S &= \frac{1}{\cos\varphi\cdot\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)}\cdot\int\limits_{-\infty}^{v'}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv\,du\sin\frac{\pi}{2}(v^2+u^2),
\end{aligned}
$$

wobei

$$
(33)\quad v' = r'\cos\varphi\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)}.
$$

Löst man nun auf:

$$
\cos\frac{\pi}{2}(v^2+u^2) = \cos\frac{\pi v^2}{2}\cos\frac{\pi u^2}{2} - \sin\frac{\pi v^2}{2}\sin\frac{\pi u^2}{2},
$$

und analog $\sin\frac{\pi}{2}(v^2+u^2)$, so kann man die Integration nach u sofort vornehmen und erhält unter Rücksicht auf (29):

$$
(34)\quad
\begin{aligned}
C &= f\cdot\left\{\int\limits_{-\infty}^{v'}\cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv - \int\limits_{-\infty}^{v'}\sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv\right\},\\
S &= f\cdot\left\{\int\limits_{-\infty}^{v'}\sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv + \int\limits_{-\infty}^{v'}\cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv\right\},
\end{aligned}
$$

$$
(35)\quad f = \frac{\lambda}{2\cos\varphi\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)}.
$$

Nach (12) folgt daher

$$
(36)\quad J = 2A'^2\cdot f^2\cdot\left\{\left(\int\limits_{-\infty}^{v'}\cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv\right)^2 + \left(\int\limits_{-\infty}^{v'}\sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv\right)^2\right\}.
$$

Für A' gilt der Werth nach (9) auf S. 174. Da nach der Bemerkung der vorigen Seite nur diejenigen Flächentheile der xy-Ebene bei der Integration zur Bestimmung der Lichtintensität J im Punkte P_0 ins Gewicht fallen, welche in der Nähe des Coordinatenanfangspunktes liegen, so ist in A' zu setzen

$$
r = \varrho_0,\ r_1 = \varrho_1,\ \cos(nr) = -\cos(nr_1) = \cos\varphi.
$$

Daher ist

$$
(37)\quad A'\cdot f = \frac{A}{2(\varrho_0+\varrho_1)}.
$$

Für die beiden in (36) auftretenden Fresnel'schen Integrale benutzen wir die geometrische Darstellung und Bezeichnung des § 3. Wenn die Coordinaten eines Punktes E der Curve der Figur 63 dargestellt sind durch die früheren Gleichungen (15), d. h. durch

$$\xi = \int_0^v \cos \frac{\pi v^2}{2}\, dv, \quad \eta = \int_0^v \sin \frac{\pi v^2}{2}\, dv,$$

ferner die Coordinaten eines anderen Punktes E' der Curve, der zum Parameter v' gehört, durch:

$$\xi' = \int_0^{v'} \cos \frac{\pi v^2}{2}\, dv, \quad \eta' = \int_0^{v'} \sin \frac{\pi v^2}{2}\, dv,$$

so ist offenbar:

$$\int_v^{v'} \cos \frac{\pi v^2}{2}\, dv = \xi' - \xi, \quad \int_v^{v'} \sin \frac{\pi v^2}{2}\, dv = \eta' - \eta.$$

Die Summe der Quadrate dieser beiden Integrale ist also gleich dem Quadrat der Entfernung zwischen den beiden Punkten E und E' der Curve in Figur 63. — Zum Parameter $v = -\infty$ gehört der Punkt $E = F'$ in Figur 63. Bezeichnet man daher die Entfernung des Punktes F' von einem zum Parameter v' gehörenden Punkte E' durch $(-\infty, v')$, so wird nach (36) und (37)

$$J = \frac{A^2}{2(\varrho_0 + \varrho_1)^2} \cdot (-\infty, v')^2. \tag{38}$$

Aus der Gestalt der Curve Figur 63 ergiebt sich nun sofort, dass J Maxima und Minima besitzt für positive Werthe v', d. h. wenn P_0 ausserhalb des geometrischen Schattens des Schirmes liegt; innerhalb desselben dagegen wird die Lichtintensität beständig kleiner, wenn P_0 tiefer in den Schatten hereinrückt, denn dann ist v' negativ und der Punkt E' nähert sich beständig dem Punkte F'.

Für $v' = +\infty$ wird $(-\infty, +\infty)^2 = 2$, da die Punkte F und F' jeder die Coordinaten $\xi = \eta = {}^1/_2$ besitzen. In diesem Falle liegt P_0 sehr weit ausserhalb des geometrischen Schattens und die Lichtintensität wird nach (38) gleich der natürlichen, wie sie ohne Vorhandensein eines Schirmes besteht. — Für $v' = o$ liegt P_0 gerade am Rande des geometrischen Schattens. Dann ist $(-\infty, o)^2 = {}^1/_2$

und die Lichtintensität ist nach (38) gleich ein Viertel der natürlichen Intensität.

Die strenge Berechnung der Maxima und Minima der Lichtstärke, falls P_0 ausserhalb des Schattens liegt, wollen wir hier nicht ausführen.[1]) Näherungsweise ergiebt sich aus der Figur (63), dass diese Maxima und Minima an den Schnittstellen der Linie FF' mit der Curve liegen. Da diese Linie von der Curve annähernd rechtwinklig geschnitten wird, so ist für die Maxima der Neigungswinkel τ der Curve gegen die ξ-Axe gleich $(^3/_4 + 2h)\pi$, dagegen für die Minima: $\tau = (^7/_4 + 2h)\pi$, wobei $h = 0, 1, 2 \ldots$ ist. Wegen der Gleichung (18) auf S. 175 ist daher für die Maxima: $v' = \sqrt{^3/_2 + 4h}$, für die Minima $v' = \sqrt{^7/_2 + 4h}$. Um nun die Lage der Beugungsfransen zu bestimmen, denken wir uns den Beugungsschirm so um seine Kante gedreht[2]), dass er senkrecht zu der kürzesten Entfernung a der Lichtquelle Q von der Schirmkante liegt (vgl. Figur 64). Dann ist $\varrho_1 = a : \cos\varphi$. Ferner ziehen wir durch P_0 eine Parallele zur x-Axe, und die Entfernung des P_0 vom geometrischen Schatten des Schirmes, gemessen auf dieser Parallelen, betrage d. Dann ist $x' : d = a : a + b$. Es bedeutet daher d den Abstand des Punktes P_0, für den die Lichtstärke berechnet wird, vom geometrischen Schatten in einer Ebene, die um die Grösse b hinter dem Schirme liegt. Führen wir nun in (33) an Stelle von x' die Grösse d ein und setzen $\varrho_1 = a$, $\varrho_0 = b$, was gestattet ist, da $\cos\varphi$ sich nur unmerkbar von 1 unterscheidet, falls wir P_0 in der Nähe des geometrischen Schattens annehmen, so wird nach (33)

$$v' = d\sqrt{\frac{2a}{\lambda b(a+b)}} = d : p, \tag{39}$$

falls p eine Abkürzung ist für

$$p = \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{2a}}. \tag{40}$$

1) Vgl. hierüber Fresnel, Oeuvr. compl. I, S. 322. — Ueber Reihenentwickelungen der Fresnel'schen Integrale vgl. Vorles. üb. theor. Optik von F. Neumann, herausgeg. v. Dorn, Leipzig, 1885, S. 62—69. — Am vollständigsten ist von Lommel in den Abhandl. der bayr. Akad. Bd. 15. S. 229 u. 529, II. Cl. die Beugung an kreisförmig und geradlinig begrenzten Schirmen theoretisch und experimentell behandelt worden.

2) Durch eine solche Drehung des Schirmes und dementsprechende Drehung der freien Fläche, über welche integrirt wird, tritt nach dem Satze der S. 171 keine Aenderung im Resultate ein.

Maxima der Lichtstärke finden daher statt für $d = p\sqrt{{}^3/_2 + 4h}$, d. h. für

$$d_1 = p \cdot 1{,}225;\quad d_2 = p \cdot 2{,}345;\quad d_3 = p \cdot 3{,}082 \text{ etc.}$$

Minima finden statt für $d = p\sqrt{{}^7/_2 + 4h}$, d. h. für:

$$d_1' = p \cdot 1{,}871;\quad d_2' = p \cdot 2{,}739;\quad d_3' = p \cdot 3{,}391 \text{ etc.}$$

Die genauen Werthe weichen nur sehr wenig von diesen Annäherungswerthen ab und die Beobachtungen[1]) bestätigen diese Zahlen.

Die Lichtintensität in diesen Maximis und Minimis ergiebt sich nach (38) einfach durch geometrische Ausmessung der Abschnitte, welche die Linie $F'F$ in Figur 63 mit der Curve bildet. Man erhält so für die Maxima, falls die freie Intensität $= 1$ gesetzt wird:

$$J_1 = 1{,}34;\quad J_2 = 1{,}20;\quad J_3 = 1{,}16;$$

für die Minima folgt:

$$J_1' = 0{,}78;\quad J_2' = 0{,}84;\quad J_3' = 0{,}87.$$

Fresnel hat durch exactere Berechnung seiner Integrale nur wenig davon abweichende Werthe gefunden.

5. Beugung durch einen schmalen Spalt. Wir legen dasselbe Coordinatensystem und dieselbeu Bezeichnungen zu Grunde, wie im vorigen Paragraphen, und untersuchen die Lichtintensität in einer zu den (einander parallelen) Spalträndern senkrechten Ebene, welche durch die Lichtquelle Q geht. Diese Ebene ist die xz-Ebene, vgl. Figur 65. Die x-Coordinaten der Spaltränder seien x_1 und x_2. Wenn der Punkt P_0, für den wir die Lichtintensität berechnen, im geometrischen Schatten eines der den Spalt zu beiden Seiten begrenzenden Schirme liegt, so sind x_1 und x_2 entweder beide positiv, oder beide negativ. Wenn aber die Verbindungslinie QP_0 durch den freien Spalt geht, so sind die Vorzeichen von x_1 und x_2 einander entgegengesetzt. Dieser Fall ist in Figur 65 gezeichnet. Wir wollen auch die dort gezeichnete Lage der Lichtquelle Q senkrecht über der Mitte des Spaltes festhalten. Bezeichnet man die Spaltbreite mit δ, so ist:

$$x_1 - x_2 = \delta,\quad x_1 - {}^1/_2\delta : d = a : a + b. \tag{41}$$

---

1) Zur Beobachtung lässt man die Beugungsfransen entweder auf einem geeignet gestellten Schirme zu Stande kommen, oder man benutzt eine Lupe mit Glasmicrometer, cf. oben S. 125, Anm.

Für a und b kann man annähernd ϱ_1 und ϱ_0 schreiben, da bei kleinem δ die Neigung von ϱ_1 gegen a sehr gering ist.

Führen wir wiederum die Grösse v ein nach der Gleichung (31) auf S. 179 und nennen wir v_1 und v_2 die Werthe des Parameters v, welche den Integrationsgrenzen x_1 und x_2 entsprechen, so wird die Lichtintensität in P_0 gerade wie nach (38):

$$J = \frac{A^2}{2(\varrho_0 + \varrho_1)^2} (v_1, v_2)^2, \tag{42}$$

wobei (v_1, v_2) die Entfernung zwischen den zwei Punkten der Curve in Figur 63 bezeichnet, welche den Parametern v_1 und v_2 entsprechen. Es ist nun aber nach (41) und (31):

$$v_1 - v_2 = \delta \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}, \quad \frac{v_1 + v_2}{2} = d : p, \tag{43}$$

wobei p die Abkürzung nach Gleichung (40) bedeutet. — Wenn wir nun die Lichtvertheilung in einer Ebene untersuchen wollen, welche um b hinter dem Beugungsschirm liegt, so haben wir den Ausdruck (42) in seiner Abhängigkeit von d zu discutiren. Nach (43) bleibt die Differenz der Parameter v_1, v_2 constant, es handelt sich also um die Frage: wie variirt der Abstand zwischen den zwei Punkten v_1, v_2 der Curve der Figur 63, zwischen denen eine constante Bogenlänge $s = v_1 - v_2$ der Curve liegt?

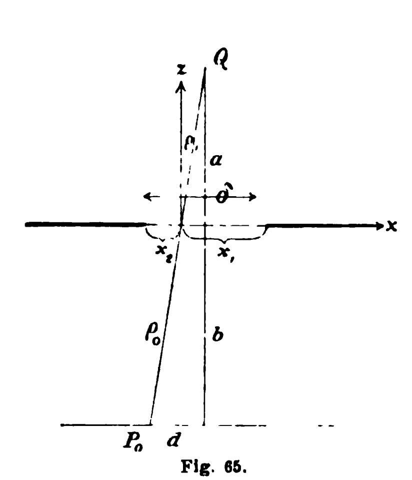


Fig. 65.

Nehmen wir zunächst einen sehr schmalen Spalt, sodass die constante Bogenlänge s etwa den Werth 0,1 besitzt,[1]) so ergiebt jene Curve sofort, dass die Lichtintensität von $d = 0$ an bis zu sehr grossen Werthen des v_1, d. h. des d, constant bleibt und dann allmählich abnimmt, wenn v_1 und v_2 beide sehr grosse positive oder negative Werthe haben, d. h. wenn P_0 schon weit im geometrischen Schatten liegt. Bei einem sehr engen Spalte ist daher der geometrische Schatten auch nicht annähernd wahrnehmbar, überhaupt

1) Für $a = b = 20$ cm müsste dazu δ etwa 30λ betragen.

giebt es nirgends eine scharfe Schattengrenze, das Licht ist über einen grossen Bereich nahezu constant vertheilt (**Diffusion des Lichtes**).[1])

Wenn die Spaltbreite δ beträchtlicher wird, aber immer noch absolut genommen sehr klein ist, so dass die constante Bogenlänge s etwa den Werth 0,5 besitzt, so ergiebt die Curve der Figur 63, dass auch hier das Licht weit in den geometrischen Schatten hereingreift und dass Maxima und Minima der Lichtstärke nur für gleiche Vorzeichen von v_1 und v_2 eintreten, d. h. dass Beugungsfransen nur im geometrischen Schatten auftreten. Deutliche Minima bestehen (vgl. Figur 66), wenn in den beiden Punkten v_1 und v_2 der Curve die Tangenten einander parallel sind, so dass sich die Tangentenwinkel τ_1 und τ_2 (vgl. oben S. 175) um ein ganzes Vielfaches von 2π unterscheiden. Da nun nach (18) auf S. 175 $\tau = \pi/2 \cdot v^2$ ist, so muss für die Orte der Beugungsfransen sein:

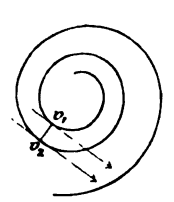


Fig. 66.

$$\frac{\pi}{2}\,(v_1{}^2 - v_2{}^2) = \pm\, 2h\pi, \quad \text{d. h.}\ (v_1 - v_2)\,(v_1 + v_2) = \pm\, 4h,$$

oder mit Rücksicht auf (43):

$$d \cdot \delta = + h\lambda b, \quad h = 1,\ 2,\ 3\,.. \tag{44}$$

Diese Beugungsfransen sind also äquidistant und unabhängig von a, d. h. der Entfernung der Lichtquelle vom Schirm.

Wenn der Spalt noch breiter wird, oder bei derselben Spaltbreite a und b verkleinert werden, so dass die Differenz $v_1 - v_2$ wesentlich grösser wird, so können, wie die Curve Figur 63 lehrt, auch für verschiedene Vorzeichen von v_1 und v_2, d. h. ausserhalb des geometrischen Schattens, Beugungsfransen auftreten; zu jedem Werthe der Differenz $v_1 - v_2$ kann man den Verlauf des J als Function von d aus der Curve auch numerisch angenähert richtig entnehmen. Wenn der Spalt sehr breit wird, d. h. $v_1 - v_2$ sehr gross ist, so nähert man sich dem im vorigen § 4 behandelten Falle.

Im Centralgebiet (für $d = 0$) verschwindet J niemals. Je nach dem Werthe von b bei bestimmten a und δ kann aber J Maxima und Minima erhalten. Da für $d = 0$ die Werthe v_1 und v_2 entgegengesetzt gleich sind, so geht die Verbindungslinie der Punkte v_1 und v_2 durch den Coordinatenanfang in Figur 63. Maxima und

---

1) Diffusion des Lichtes muss z. B. stets eintreten, wie man durch die Fresnel'sche Zonenconstruction ableiten kann, falls die Spaltbreite $\delta < {}^1\!/_2\lambda$ ist.

Minima treten daher annähernd für die Schnittpunkte der Curve mit der Linie FF' ein, d. h. nach S. 182

$$\text{Maxima für } v_1 = \sqrt{3/2 + 4h},$$
$$\text{Minima für } v_1 = \sqrt{7/2 + 4h},$$

oder nach (43), da $v_2 = -v_1$ ist:

$$(45)\quad \begin{aligned} &\text{Maxima für } \frac{\delta^2}{2\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 3/2 + 4h, \\ &\text{Minima für } \frac{\delta^2}{2\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 7/2 + 4h, \\ &h = 0, 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

6. Beugung durch einen schmalen Schirm [1]. Der Schirm habe die Breite δ, senkrecht über seiner Mitte liege im Abstande a die Lichtquelle Q. Wir untersuchen die Lichtintensität in einer, durch Q gehenden Ebene (xz-Ebene), welche senkrecht zu den (einander parallelen) Schirmrändern steht. — Wir gebrauchen die im Vorigen angewandten Bezeichnungen (vgl. Figur 65), x_1 und x_2 seien die x-Coordinaten der Schirmkanten, v_1 und v_2 die ihnen entsprechenden Werthe des Parameters v; dieselben genügen den Gleichungen (43). Die Lichtintensität J ist proportional zu der Summe der Quadrate der Integrale (vgl. die Entwickelungen der S. 180):

$$M = \int_{-\infty}^{v_1} \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv + \int_{v_2}^{+\infty} \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv,$$
$$N = \int_{-\infty}^{v_1} \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv + \int_{v_2}^{+\infty} \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv.$$

Das erste Glied in M ist nun (vgl. die analogen Entwickelungen der S. 181) gleich der ξ-Coordinate der Strecke, welche F' und den dem Parameter v_1 entsprechenden Punkt E_1 der Curve in Figur 67 verbindet. Das zweite Glied in M ist gleich der ξ-Coordinate der Strecke (E_2F), wobei der Punkt E_2 dem Parameter v_2 entspricht. Analoge Bedeutungen haben die beiden Glieder von N. Nennt man die ξ-, bezw. η-Coordinaten der Strecken $(F'E_1)$ und (E_2F): $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$, so wird also:

$$M^2 + N^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2.$$

1) Als schmaler Schirm kann z. B. zweckmässig ein gerade gespannter Draht verwendet werden.

Wenn man an die Strecke $(F'E_1)$ anträgt die Strecke $(E_1 F'')$ in gleicher Richtung und Länge, wie die Strecke $(E_2 F)$, so hat die Strecke $(F'F'')$ die Coordinaten $\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2$. Die Lichtstärke J im Punkte P_0 ist also proportional dem Quadrat der Strecke $(F'F'')$, welche man durch geometrische Addition der beiden Strecken $(F'E_1)$ und $(E_2 F)$ erhält, und hat den Werth:

$$J = \frac{A^2}{2(\varrho_0 + \varrho_1)^2} \cdot (F'F'')^2. \tag{46}$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Centralstreifen ($d = 0$) immer hell ist (obwohl er am tiefsten im geometrischen Schatten liegt), denn für ihn sind die Werthe v_1 und v_2 entgegengesetzt gleich,

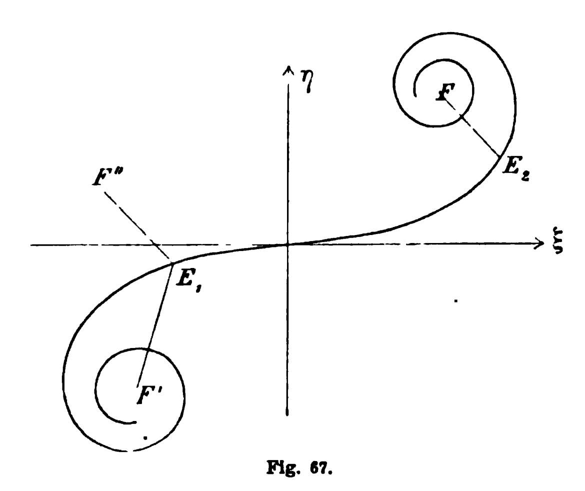


Fig. 67.

die beiden Punkte E_1 und E_2 in Figur 67 liegen also symmetrisch zum Coordinatenanfang, die Strecken $F'E_1$ und $E_2 F$ sind gleich und gleichgerichtet, ihre geometrische Summe ist daher nie Null. Je breiter der Schirm ist, desto kleiner wird die Lichtstärke im Centralstreifen.

Wenn der Schirm genügende Breite hat, so dass v_1 und v_2 ziemlich gross sind, so liegen die Punkte E_1 und E_2 in der Nähe von F' und F. Die Strecken $(F'E_1)$ und $(E_2 F)$ sind dann annähernd einander gleich, es tritt daher nahezu vollständige Dunkelheit ein, wenn $(F'E_1)$ parallel und gleichgerichtet ist mit (FE_2). Da bei grossen v_1 und v_2 die Strecken $(F'E_1)$ und (FE_2) nahezu senkrecht zur Curve der Figur 67 stehen, so sind, falls diese Strecken gleich-

gerichtet sind, die Tangenten, welche in E_1 und in E_2 an die Curve gelegt werden, einander annähernd parallel, und zwar laufen ihre positiven Richtungen, welche nach wachsenden Bögen s hinweisen, einander entgegen. Es ist also die Differenz der Tangentenwinkel $\tau_1 - \tau_2$ ein ungerades Vielfaches von π, d. h. da nach (18) $\tau = \pi/2 \cdot v^2$ ist, so treten dunkle Beugungsfransen auf, falls

$$\tfrac{1}{2}(v_1{}^2 - v_2{}^2) = +1, \pm 3, \pm 5 \text{ etc.}$$

Unter Rücksicht auf (43) wird dies:

$$2d\delta = + h\lambda b, \quad h = 1, 3, 5 \text{ etc.} \tag{47}$$

Diese Beugungsfransen nehmen an Dunkelheit mit wachsendem h ab. Sie sind äquidistant und von der Entfernung a der Lichtquelle vom Schirm unabhängig. Die ganze Betrachtung gilt nur innerhalb des geometrischen Schattens, d. h. so lange $d < \frac{1}{2}\delta\frac{a+b}{a}$ ist, und auch dann nur mit einiger Strenge, falls die beiden Schirmrändern entsprechenden Werthe von v_1 und v_2 hinreichend gross sind, d. h. bei genügend breitem Schirm in genügender Nähe an ihm in der Umgebung des Centralstreifens.

Rückt P_0 an den Rand des geometrischen Schattens, oder aus ihm heraus, so treten auch dann noch je nach der Lage von P_0 Maxima und Minima der Lichtstärke auf, die für jeden speciellen Fall durch die angegebene Construction aus der Figur 67 erhalten werden können. Die hier auftretenden Beugungsfransen gehorchen aber keinem leicht übersichtlichen Gesetze.

Diese Beispiele mögen genügen, um die Brauchbarkeit der von Cornu benutzten geometrischen Methode zu zeigen[1]. Die Beobachtungen entsprechen allen hier gezogenen Folgerungen.

7. Strenge Behandlung der Beugung am geradlinigen Rande eines Schirmes. Wie schon im Eingange dieses Kapitels hervorgehoben wurde (S. 172), ist die bisherige Behandlung der Beugungserscheinungen auf Grund des Huygens'schen Principes nur eine angenähert richtige. Es ist nun wichtig, dass man wenigstens in einem Falle, nämlich bei der Beugung durch den geradlinigen Rand eines Schirmes, das Problem nach Sommerfeld[2] in Strenge durchführen kann; man kann einerseits dadurch prüfen, welche Fehler die angenäherte Behandlung der Beugung ergiebt, anderer-

1) Diese Methode ist noch auf complicirtere Fälle angewendet in dem Lehrbuch von Mascart, Traité d'Optique, Paris 1889, T. 1, S. 283.

2) A. Sommerfeld, Math. Annalen, Bd. 47, S. 317, 1895.

seits kann man dadurch auch die Erscheinungen bei sehr grossen Beugungswinkeln, d. h. in sehr grossem Abstand von der geometrischen Schattengrenze, theoretisch behandeln, was bei der bisher angewandten Methode, ohne gewisse Erweiterungen wenigstens, nicht möglich wäre.

Die strenge Behandlung der Beugungserscheinungen hat die Differentialgleichung (12) der S. 159 für die Lichterregung:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right)$$

zu integriren unter Rücksicht auf gewisse Randbedingungen, welche an der Oberfläche der Beugungsschirme zu erfüllen sind. Die Form dieser Rand- oder Grenzbedingungen werden wir erst später im II. Abschnitt, Kapitel I, II und IV ableiten, hier wollen wir die dort abzuleitenden Resultate vorwegnehmen. — Zunächst wollen wir die Betrachtungen dadurch vereinfachen, dass wir annehmen, dass die Lichtquelle eine unendlich lange Linie ist, welche parallel zur y-Axe liegt. Ebenfalls soll der Rand des ebenen Beugungsschirmes parallel zur y-Axe liegen; wir wollen ihn direct als y-Axe wählen, die positive x-Axe soll im Beugungsschirm verlaufen, die positive z-Axe sei von der Lichtquelle abgewandt. (Vgl. Figur 68). — In diesem Falle kann s offenbar nicht mehr von der Coordinate y abhängen, die obige Differentialgleichung vereinfacht sich daher zu

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right). \tag{48}$$

Den Schirm setzen wir voraus als unendlich dünn und unendlich stark absorbirend. Es kann dann kein Licht durch ihn hindurch gehen, er reflectirt aber vollkommen, wie im II. Abschnitt gezeigt werden wird; eine sehr dünne, hochpolirte Silberschicht würde etwa unserem Schirm entsprechen. Der Schirm entspricht also nicht dem Begriff: „vollkommen schwarz“,[1]) sondern er ist

1) Ein vollkommen schwarzer Schirm, der kein Licht durchlässt, aber auch kein Licht reflectirt, ist nur durch einen Körper zu realisiren, dessen Brechungsindex nach seiner Oberfläche zu stetig in den Werth des Brechungsindex der Umgebung übergeht und dessen Absorptionsindex nach der Oberfläche zu stetig in den Werth Null übergeht. Jede Unstetigkeit in den optischen Eigenschaften eines Mediums bewirkt nothwendig Reflexion des Lichtes. Daher ist überhaupt kein ideal schwarzer Schirm als scharf begrenzter, dünner Körper denkbar, für den man gewisse Grenzbedingungen aufstellen könnte.

vollkommen blank. Die Grenzbedingung an einem solchen Schirm lautet:

(49) $s = 0$, falls das einfallende Licht senkrecht zur Schirmkante polarisirt ist,

(50) $\frac{\partial s}{\partial z} = 0$, falls das Licht parallel zur Schirmkante polarisirt ist [1]).

Die Bedeutung dieser Bezeichnungen und des Wortes „Polarisation" soll erst im nächsten Kapitel erörtert werden. Hier genügt es, zu wissen, dass die Differentialgleichung (48) entweder unter Rücksicht auf die Randbedingung (49), oder (50) zu integriren ist. Die Randbedingungen gelten an der Oberfläche des Schirmes, d. h. für $z = 0$, $x > 0$. d. h. für $\varphi = 0$, bezw. $\varphi = 2\pi$, wenn man Polarcoordinaten einführt durch die Gleichungen:

(51) $x = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$.

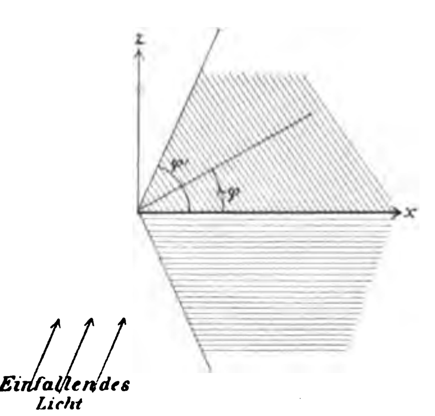


Fig. 68.

Wenn man die Differentialgleichung (48) auf diese Polarcoordinaten transformirt ist, so ergiebt sich

$$(52) \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} \right).$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung und der Grenzbedingung (49), bezw. (50), welche dem Falle entspricht, dass die Lichtquelle im Unendlichen liegt und ihre Strahlen den Winkel φ' mit der x-Axe bilden (vgl. Figur 68) ist nun:

$$(53) \qquad s = A \cdot \frac{1+i}{2} \cdot e^{i 2\pi \frac{t}{T}} \left\{ e^{-i\gamma} \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-i \frac{\pi v^2}{2}} dv + e^{-i\gamma'} \int_{-\infty}^{\sigma'} e^{-i \frac{\pi v^2}{2}} dv \right\},$$

1) Wie später bei Besprechung der elektromagnetischen Theorie erörtert werden wird, hat s in beiden Grenzbedingungen nicht dieselbe Bedeutung: in (49) bedeutet s die der Schirmkante parallel schwingende elektrische Kraft, in (50) die der Schirmkante parallel schwingende magnetische Kraft. Die Licht-

wobei ist:

$$\gamma = \frac{2\pi r}{\lambda} \cos(\varphi - \varphi'), \quad \gamma' = \frac{2\pi r}{\lambda} \cos(\varphi + \varphi'), \tag{54}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{8r}{\lambda}} \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi'), \quad \sigma' = -\sqrt{\frac{8r}{\lambda}} \sin \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi'). \tag{55}$$

In (53) gilt das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem die Grenzbedingung (49) oder (50) erfüllt werden soll. Der Buchstabe i bedeutet dabei die imaginäre Einheit, d. h. $\sqrt{-1}$. Die Lösung von s tritt also zunächst als complexe Grösse auf. Um ihre physikalische Bedeutung zu geben, braucht man unter s nur den reellen Theil der complexen Grösse zu verstehen. Wenn wir also z. B. den Ansatz machen

$$s = (A + B\,i)\, e^{i\, 2\pi \frac{t}{T}}, \tag{56}$$

so ist die physikalische Bedeutung von s der reelle Theil, d. h.

$$s = A \cos 2\pi \frac{t}{T} - B \sin 2\pi \frac{t}{T}, \tag{57}$$

Die Intensität des Lichtes würde in diesem Falle sein (vgl. den analogen Schluss von S. 174):

$$J = A^2 + B^2. \tag{58}$$

Wir können dieses Resultat aus (56) direct ableiten, wenn wir s mit seiner conjugirt complexen Grösse multipliciren, d. h. mit derjenigen Grösse, welche sich nur durch das Vorzeichen von i von der rechten Seite von (56) unterscheidet, also mit $(A - Bi)$ $e^{-i\, 2\pi \frac{t}{T}}$. Dieses Resultat mag auch für später bemerkt werden. Es lautet also: Wenn die Lichterregung s in Form einer complexen Grösse dargestellt wird, (wobei s selbst nur die Bedeutung des reellen Theiles jener complexen Grösse besitzt), so wird die Lichtintensität durch Multiplication mit der conjugirt complexen Grösse erhalten.

Dass die Formeln (53), (54), (55) wirklich eine Lösung der Differentialgleichung (52) sind, erkennt man durch Bildung der Differentialquotienten nach r und φ.[1] Ferner wird durch das obere

intensität berechnet sich aber in beiden Fällen in gleicher Weise, wenigstens auf der von der Lichtquelle abgewendeten Schirmseite.

1) Der Weg, auf welchem Sommerfeld in consequenter Weise zu dieser Lösung geführt wurde, kann hier nicht dargestellt werden, da dies zuviel Hülfsmittel beanspruchen würde.

Vorzeichen in (53) die Grenzbedingung (49) erfüllt, da für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$, $\gamma = \gamma'$, $\sigma = \sigma'$ wird. Ferner wird durch das untere Vorzeichen in (53) die Grenzbedingung (50) erfüllt, da $\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial \varphi}$ ist für $\varphi = 0$, und da die Differentialquotienten nach φ von den beiden Summanden, die in der Klammer von (53) enthalten sind, entgegengesetzte Werthe für $\varphi = 0$ oder $\varphi = 2\pi$ annehmen. Dass ausserdem die Lösung (53) thatsächlich den angenommenen ebenen Wellen einer in der vorgeschriebenen Richtung liegenden unendlich entfernten Lichtquelle Q entspricht, werden wir bei näherer Discussion einsehen. Zunächst mag aber noch ein wichtiger Punkt erörtert werden. Wenn wir einen beliebigen Punkt P_0 in der xz-Ebene, für den wir s berechnen wollen, eine volle Umkreisung um die Schirmkante (bei festem Abstande r von ihr) machen lassen, so ist φ um 2π gewachsen. Es nimmt dann s nicht den ursprünglichen Werth wiederum an, sondern einen anderen, weil σ und σ' wegen der Factoren $\sin \frac{1}{2}(\varphi \mp \varphi')$ bei Aenderung von φ um 2π ihr Vorzeichen gewechselt haben. s ist daher nicht eine eindeutige Function des Ortes. Der physikalische Sinn erfordert aber Eindeutigkeit. Wir können dieselbe nun sofort erhalten, wenn wir bei der Veränderung von φ nie durch den Schirm selbst hindurchgehen. Dies wollen wir festhalten, indem φ nur zwischen 0 (Schattenseite des Schirmes) und 2π (Lichtseite des Schirmes) variiren soll.

Es sind nun drei Räume zu unterscheiden, in denen sich s wesentlich verschieden verhält:

1. Der Schattenraum: $0 < \varphi < \varphi'$. Nach (55) sind σ und σ' negativ. Für unendlich grosses r wird daher $s = 0$.

2. Der unbeschattete Raum $\varphi' < \varphi < 2\pi - \varphi'$. Es ist σ positiv, σ' negativ. Da nach Formel (29) auf S. 177

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\pi v^2}{2}} dv = 2\int_{0}^{\infty} e^{-i\frac{\pi v^2}{2}} dv = 1 - i, \tag{59}$$

so ist daher für unendlich grosses r:

$$s = A e^{i 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\cos(\varphi - \varphi')\right)}.$$

Der reelle Theil hiervon entspricht ebenen Wellen der Amplitude A, deren Fortpflanzungsrichtung den Winkel φ' mit der x-Axe

macht. Die Lösung entspricht also thatsächlich für sehr grosse r dem einfallenden Lichte einer in der Richtung φ' liegenden, unendlich entfernten Lichtquelle Q.

3. Der Reflexionsraum $2\pi - \varphi' < \varphi < 2\pi$. Es ist σ und σ' positiv. Für unendlich grosses r wird daher

$$s = A \cdot e^{i 2\pi \frac{t}{T}} \left\{ e^{-i \frac{2\pi r}{\lambda} \cos(\varphi - \varphi')} \mp e^{-i \frac{2\pi r}{\lambda} \cos(\varphi + \varphi')} \right\}.$$

Der reelle Theil hiervon entspricht der Superposition der einfallenden ebenen Wellen und der nach dem Reflexionsgesetz am Schirm reflectirten ebenen Wellen. Die reflectirte Amplitude ist dem absoluten Betrage nach gleich der einfallenden Amplitude.

In anschaulicher Form erhalten wir die Lösung (53), wenn wir wiederum die Curve der Figur (63) benutzen. Denn nach S. 181 ist

$$\int_{-\infty}^{\sigma} e^{-i \frac{\pi v^2}{2}} dv = \xi - i\eta, \tag{60}$$

wobei ξ und η die Projectionen der Strecke $(F'E)$ auf die ξ- und η-Axe sind, und wobei E der dem Parameter σ entsprechenden Punkt der Curve bedeutet. — Analog ist

$$\int_{-\infty}^{\sigma'} e^{-i \frac{\pi v^2}{2}} dv = \xi' - i\eta', \tag{61}$$

wobei ξ' und η' die Projectionen der Strecke $(F'E')$ sind, und E' ein Punkt der Curve ist, welcher dem Parameter σ' entspricht.

Betrachten wir zunächst die von der Lichtquelle abgewendete Seite des Schirmes, d. h. $0 < \varphi < \pi$, so bemerken wir, dass σ' wegen des kleinen Nenners λ (Wellenlänge) beständig sehr gross und negativ ist, falls man r nicht sehr klein wählt. Für einigermassen grosse r kann man daher nach (61) sehr annähernd $\xi' = \eta' = 0$ setzen, und erhält dann aus (53) und (60):

$$s = A \frac{1+i}{2} e^{i 2\pi \frac{t}{T}} e^{-i\gamma} \cdot (\xi - i\eta),$$

und nach dem Lehrsatze (58) für die Lichtintensität:

$$J = \frac{A^2}{2} \cdot (F'E)^2. \tag{62}$$

Zu nahezu derselben Formel würden wir aber auch nach der früheren Näherungsrechnung in § 4 gelangt sein. Wenn nämlich die Lichtquelle unendlich entfernt ist, so würde die dortige Formel (38) ergeben

$$J = \frac{A^2}{2} (-\infty, v')^2, \tag{63}$$

und nach (39): $v' = d\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}$.

Die Bedeutung von d ist aus Figur 64 zu entnehmen. Führt man die Entfernung r des Punktes P_0 von der Schirmkante ein, so ist $d = r \sin(\varphi - \varphi')$, wenn $\varphi - \varphi'$ der Beugungswinkel ist, d. h. die Neigung der gebeugten Strahlen gegen die einfallenden Strahlen. Da in der Nähe der Schattengrenze $b = r$ zu setzen ist, so folgt $v' = \sqrt{\frac{2r}{\lambda}} \sin(\varphi - \varphi')$; denselben Werth besitzt σ nach (55) für genügend kleine Beugungswinkel, d. h. der Punkt E in Formel (62) entspricht dem Parameter v' in Formel (63). Beide Formeln führen daher zu demselben Werthe von J in der Nähe der Schattengrenze. In grösserem Abstand von ihr weicht allerdings die strengere Formel (62) ab von derjenigen, die sich nach dem früheren Näherungsverfahren ergeben würde. — Der früher gezogene Schluss, dass nur ausserhalb des Schattenraumes Beugungsfransen auftreten, gilt natürlich ebenso hier, nach der strengeren Betrachtung.

Auf der der Lichtquelle zugewendeten Seite des Schirmes $\pi < \varphi < 2\pi$, nimmt innerhalb des Reflexionsraumes ($\varphi > 2\pi - \varphi'$) auch das Integral (61) bedeutende Werthe an.

Will man daher eine allgemein gültige strenge Formel für die Lichtintensität ableiten, so darf man das Integral (61) nicht gegen das Integral (60) vernachlässigen. Dies ist sowohl für den Reflexionsraum, als auch für die anderen Räume bei sehr kleinem r oder sehr grossen Beugungswinkeln $\varphi - \varphi'$ geboten.

Man erhält diese strenge Formel für die Lichtintensität J, indem man die rechte Seite von (53) mit ihrem conjugirt complexen Ausdrucke multiplicirt. Durch Benutzung der Bezeichnungen (60) und (61) erhält man dadurch folgende völlig strenge Formel:

$$J = \frac{A^2}{2}\left\{\xi^2 + \eta^2 + \xi'^2 + \eta'^2 \mp 2\cos(\gamma - \gamma').(\xi\xi' + \eta\eta') \right.$$
$$\left. \pm 2\sin(\gamma - \gamma').(\eta\xi' - \eta'\xi)\right\},$$

oder

$$J = \frac{A^2}{2}\left\{(F'E)^2 + (F'E')^2 \mp 2(F'E)(F'E')\cos(\gamma - \gamma' + \chi)\right\} \quad (64)$$

wobei χ den Winkel bezeichnet, welchen die Strecken $(F'E)$ und $(F'E')$ mit einander bilden. χ ist positiv gerechnet, wenn die Drehung, welche auf dem kürzesten Wege $F'E$ in $F'E'$ überführt, in demselben Sinne erfolgt, wie eine Drehung der η-Axe zur ξ-Axe. — Nach (54) ist

$$\gamma - \gamma' = \frac{4\pi r}{\lambda}\sin\varphi \sin\varphi'. \quad (65)$$

Nach (64) ist J proportional zu dem Quadrat der geometrischen Differenz bezw. Summe zweier Strecken der Länge $(F'E)$ und $(F'E')$, welche den Winkel $\chi + \gamma - \gamma'$ mit einander bilden. Die geometrische Differenz ist zu bilden, falls das einfallende Licht senkrecht zur Schirmkante polarisirt ist, die geometrische Summe, falls es parallel zur Schirmkante polarisirt ist.

Den Ausdruck (64) kann man noch wesentlich vereinfachen, wenn die Lichtintensität J nicht in der Nähe des geometrischen Schattens berechnet werden soll, d. h. wenn nicht φ sehr nahe gleich φ' ist.

Im Schattenraume ist dann nämlich σ und σ' sehr gross negativ, wir können daher nach den Betrachtungen, welche in § 3 an die Gestalt der Curve der Figur (63) angeknüpft sind, $F'E$ gleich dem Krümmungsradius ϱ der Curve im Punkte E, $F'E'$ gleich dem Krümmungsradius im Punkte E' setzen, und den Winkel χ, welchen diese beiden Strecken mit einander bilden, gleich dem Winkel, welchen die in den Punkten E und E' an die Curve gelegten Tangenten mit einander einschliessen. Nach den dortigen Formeln (18) und (19) der S. 175, 176 ist also zu setzen:

$$F'E = \frac{1}{\pi\sigma}, \; F'E' = \frac{1}{\pi\sigma'}, \; \chi = \frac{\pi}{2}(\sigma^2 - \sigma'^2).$$

Unter Rücksicht auf (55) und (65) wird nun $\gamma - \gamma' + \chi = 0$, daher nach (64):

$$J = \frac{A^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{\sigma} \mp \frac{1}{\sigma'}\right)^2. \quad (66)$$

13*

Setzt man hierin die Werthe (55) für σ und σ' ein, so gilt für das obere Vorzeichen, d. h. falls das einfallende Licht senkrecht zur Schirmkante polarisirt ist:

$$(67) \qquad (\perp)\ J = \frac{A^2}{\pi^2} \cdot \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\varphi'}{(\cos\varphi - \cos\varphi')^2},$$

dagegen für das untere Vorzeichen, d. h. wenn das einfallende Licht parallel zur Schirmkante polarisirt ist:

$$(68) \qquad (\parallel)\ J = \frac{A^2}{\pi^2} \cdot \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi \cdot \sin^2 \frac{1}{2}\varphi'}{(\cos\varphi - \cos\varphi')^2}.$$

Diese Formeln für den Schattenraum gelten also nur, falls λ/r sehr klein und φ nicht in unmittelbare Nähe von φ', d. h. an die Grenze des Schattenraumes, kommt. Es geht aus den Formeln hervor, dass am Schirm selbst (für $\varphi = 0$) das Licht vollständig parallel zur Schirmkante polarisirt ist, dass ferner für wachsende φ die Intensität J nach beiden Formeln beständig zunimmt und dabei stets die Intensität (67) des senkrecht zur Schirmkante polarisirten Lichtes kleiner ist als die Intensität (68) des parallel zur Kante polarisirten Lichtes. Der Unterschied zwischen beiden Intensitäten nimmt beständig ab bei Annäherung an die Grenze des geometrischen Schattens.

Die Lichtbeugung am geradlinigen Rande eines Schirmes bei sehr grossen Beugungswinkeln ist von Gouy[1]) beobachtet worden. Bei abgerundetem Rande des Schirmes ergaben sich Färbungen, welche von der Natur des Schirmes abhingen. Die hier entwickelte Theorie ergiebt, dass unabhängig von der Natur des Schirmes die Farben grösserer Wellenlänge im stark gebeugten Lichte überwiegen müssten. Um eine Abhängigkeit von der Natur des Schirmes zu ergeben, müssten die Grenzbedingungen (49) und (50) die optischen Constanten des Schirmes enthalten. Bisher ist aber eine Integration der Differentialgleichung (48) bei solchen complicirteren Grenzbedingungen noch nicht gelungen.

Ausserhalb des Schattenraumes (und ausserhalb des Reflexionsraumes) ist in genügendem Abstande von der Grenze des Schattenraumes und des Reflexionsraumes σ sehr gross positiv, σ' sehr gross negativ. Daher ist $F'E'$ sehr klein und hat den Werth (abgesehen vom Vorzeichen) $1 : \pi\sigma'$, während $F'E$ annähernd gleich

1) Gouy, Ann. d. Chim. et de Phys. [6], 8, S. 145, 1886.

$\sqrt{2}$ ist. Ferner ist, da $F'E$ annähernd den Winkel $^1/_4\pi$ mit der ξ-Axe einschliesst: $\chi = -{}^1/_4\pi - {}^1/_2\pi\sigma'^2$, so dass wird

$$\chi + \gamma - \gamma' = -{}^1/_4\pi - \frac{4\pi r}{\lambda} \sin^2 {}^1/_2(\varphi - \varphi').$$

Mit Vernachlässigung von $(F'E')^2$ erhält man daher aus (64):

$$J = A^2 \left\{ 1 \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{4r}} \cdot \frac{\cos\left[{}^1/_4\pi + \frac{4\pi r}{\lambda} \sin^2 {}^1/_2(\varphi - \varphi')\right]}{\sin {}^1/_2(\varphi + \varphi')} \right\}. \quad (69)$$

Bei veränderlichem φ treten also Beugungsfransen auf, die allerdings nur wenig deutlich sind. Die Fransen werden um so deutlicher, je näher φ an $2\pi - \varphi'$, heranrückt. Dann gilt aber schliesslich die Formel (69) nicht mehr, und dicht am Uebergang zum Reflexionsraum muss das Resultat aus (64) und der Curve der Figur (63) abgelesen werden, da nun $F'E'$ grösser wird.

Im Reflexionsraum in genügendem Abstande von seiner Grenze $\varphi = 2\pi - \varphi'$ ist sowohl $F'E$ als $F'E'$ annähernd gleich $\sqrt{2}$, $\chi = 0$. Daher ergiebt sich aus (64) und (65) periodisch wechselnd volle Dunkelheit oder die vierfache Intensität des einfallenden Lichtes, je nachdem $\frac{2r}{\lambda} \sin\varphi \sin\varphi'$ eine ganze Zahl, oder die Hälfte einer ungeraden Zahl ist. Wir stossen so auf die oben S. 145 studirte Erscheinung der stehenden Wellen, die allemal eintritt, wenn die einfallenden Wellen sich über die reflectirten superponiren. Hier ist nun aber der in der Anm. auf S. 190 angedeutete Unterschied in der Bedeutung von s je nach dem Polarisationszustande des einfallenden Lichtes zu beachten. Es soll davon in einem späteren Kapitel noch die Rede sein.

8. Frauenhofer'sche Beugungserscheinungen. Wie oben S. 174 erwähnt wurde, bezeichnet man als Frauenhofer'sche Beugungserscheinungen diejenigen, bei denen Lichtquelle Q und betrachteter Punkt P_0 im Unendlichen liegen. Man kann diese Erscheinungen beobachten, wenn eine punktförmige Lichtquelle Q in den Brennpunkt einer Sammellinse (Collimatorlinse) gestellt wird, da dann die austretenden Strahlen parallel sind, und wenn man hinter dem Beugungsschirm ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr benutzt.

Wir gehen von den Entwickelungen des § 1 aus, d. h. vom Huygens'schen Princip. Die Behandlung ist also nicht eine völlig strenge, wie im vorhergehenden Paragraphen. Wie wir aber dort

sahen, ergiebt das Huygens'sche Princip bei nicht sehr grossen Beugungswinkeln eine sehr gute Annäherung. Nach den Formeln (8) und (9) auf S. 173, 174 ist für $\varrho_1 = \varrho_0 = \infty$ zu setzen:

$$f(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda}\left\{x(\alpha_1 + \alpha_0) + y(\beta_1 + \beta_0)\right\}, \tag{70}$$

und dabei bezeichnen α_1, β_1, α_0, β_0 die Richtungscosinus, welche die Richtungen vom Coordinatenanfang nach der Lichtquelle Q und nach dem betrachteten Punkte P_0 mit der x- und y-Axe bilden. (Vgl. Figur 62 auf S. 172.)

Nach den Formeln (11) und (12) der S. 174 ist daher mit Benutzung der Abkürzungen:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_1 + \alpha_0) = \mu, \quad \frac{2\pi}{\lambda}(\beta_1 + \beta_0) = \nu \tag{71}$$

die Lichtintensität im Punkte P_0:

$$J = A'^2 (C^2 + S^2), \tag{72}$$

wobei

$$C = \int \cos(\mu x + \nu y)\, d\sigma, \quad S = \int \sin(\mu x + \nu y)\, d\sigma, \tag{73}$$

und die Integration über die Oeffnung im Schirm zu erstrecken ist.

Die Constante A' hat eine anschauliche Bedeutung, wenn wir die Lichtintensität J' einführen, welche hinter dem Beugungsschirm beobachtet wird, falls wir das Fernrohr in die Richtung der einfallenden Strahlen bringen. Dann ist nämlich für alle Stellen des Beugungsschirmes, die nicht unendlich weit vom Coordinatenanfang entfernt liegen, $\mu = \nu = 0$, so dass die Beziehung besteht:

$$J' = A'^2 \cdot \sigma^2,$$

falls mit σ die Grösse der ganzen beugenden Oeffnung verstanden wird. Daher folgt für eine beliebige Richtung des Fernrohrs:

$$J = \frac{J'}{\sigma^2}(C^2 + S^2). \tag{74}$$

9. Beugung durch ein Rechteck. Wenn die Schirmöffnung ein Rechteck ist, lassen sich die Integrale (73) am einfachsten berechnen. Legen wir den Coordinatenanfang in den Mittelpunkt des Rechtecks, die Coordinatenaxen parallel zu den Rechteckseiten, und hat das Rechteck die Seitenlängen a (parallel zur x-Axe) und b (parallel zur y-Axe), so wird

$$C = \frac{4}{\mu\nu} \sin\frac{\mu a}{2} \sin\frac{\nu b}{2}, \quad S = 0,$$

daher nach (74), da $\sigma = ab$ ist:

$$J = J' \cdot \left[\frac{\sin \frac{\mu a}{2}}{\frac{\mu a}{2}}\right]^2 \cdot \left[\frac{\sin \frac{\nu b}{2}}{\frac{\nu b}{2}}\right]^2. \tag{75}$$

Es tritt daher völlige Dunkelheit ein in den Richtungen, welche dadurch bestimmt sind, dass entweder μa oder νb ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist.

Wenn das Licht der Quelle Q senkrecht auf den Beugungsschirm fällt, so ist $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Die optische Axe des beobachtenden Fernrohrs sei parallel dem einfallenden Licht gerichtet, d. h. ebenfalls senkrecht zum Beugungsschirm. Die Lichtintensität J in der durch α_0 und β_0 bestimmten Richtung wird dann beobachtet in einem Punkte P der Brennebene des Fernrohrobjectivs, welcher die Coordinaten:

$$x' = f\alpha_0, \quad y' = f\beta_0 \tag{76}$$

besitzt in einem Coordinatensystem $x'y'$, welches den Brennpunkt F des Objectivs zum Anfang hat und den Seiten des beugenden Rechtecks parallel ist.



Fig. 69.

Es bedeutet f die Brennweite des Objectivs. — In (76) ist vorausgesetzt, dass α_0 und β_0 kleine Grössen sind, d. h. dass der Beugungswinkel nicht erheblich ist.

Nach (71) ist nun:

$$\mu = \frac{2\pi x'}{\lambda f}, \quad \nu = \frac{2\pi y'}{\lambda f}. \tag{77}$$

Es tritt daher völlige Dunkelheit ein für

$$\mu a = \pm 2h\pi, \quad \text{d. h. } x' = \pm h\frac{\lambda f}{a}, \quad h = 1, 2, 3 \ldots$$

und für

$$\nu b = \pm 2h\pi, \quad \text{d. h. } y' = \pm k\frac{\lambda f}{b}, \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

In der Brennebene des Objectivs entsteht daher (bei homogener Beleuchtung) eine von schwarzen Linien durchzogene Figur, wie sie in beistehender Zeichnung angedeutet ist. Die Linien haben constanten Abstand von einander, nur in der Mitte der Beugungsfigur

ist dieser Abstand der doppelte. — Oben links ist die beugende Oeffnung O gezeichnet. Die Beugungsfransen bilden daher Rechtecke, welche dem beugenden Rechteck ähnlich sind, aber invers zu ihm liegen.

Im Brennpunkt F des Objectivs erreicht die Intensität J den grössten Werth, $J = J'$. Für $\mu = 0$ ist nämlich der Grenzwerth des Quotienten $\sin \mu a/2 : \mu a/2 = 1$. — Andere, aber kleinere Maxima nimmt J annähernd in den Mittelpunkten der von den Beugungsfransen der Figur 69 umgrenzten Rechtecke an. Diesen Mittelpunkten entsprechen die Werthe:

$$\mu a = \pi\,(2h + 1),\quad \nu b = \pi\,(2k + 1),\quad h,\ k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots.$$

Auf der x'-Axe ist aber für die Mittelpunkte jener Rechtecke:

$$\mu a = \pi\,(2h + 1),\quad \nu = 0,\quad h = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

Daher sind die Maxima auf der x'-Axe (oder y'-Axe):

$$J_1 = J' \frac{4}{\pi^2 (2h + 1)^2},$$

während sie in der Mitte eines beliebigen anderen Rechtecks, für welches weder x' noch y' verschwindet, den Werth haben:

$$J_2 = J' \frac{16 : \pi^4}{(2h + 1)^2 (2k + 1)^2}.$$

Die J_2 sind daher wesentlich kleiner als die J_1, sodass die ganze Beugungsfigur, roh betrachtet, den Eindruck eines nach der Mitte zu heller werdenden Kreuzes macht, dessen Balken den Seiten der Beugungsöffnung parallel liegen. (In Figur 69 ist die Lichtvertheilung durch die Schraffirung angedeutet.)

10. Beugung durch ein schiefwinkliges Parallelogramm. Diesen Fall kann man sofort aus dem vorigen ableiten auf Grund der Bemerkung, dass nach (73) die Integrale C und S und daher auch die Lichtintensität J ungeändert bleibt, wenn man die Coordinaten x, y der beugenden Oeffnung mit den Factoren p, q multiplicirt, während man gleichzeitig die Grössen μ und ν, d. h. die Coordinaten x', y' der Beugungsfigur, durch die gleichen Factoren p, q dividirt. Geht man von einem rechtwinkligen beugenden Parallelogramm aus, dessen Seiten den Coordinatenaxen xy nicht parallel sind, so erhält man durch jene Anwendung zweier Factoren p, q ein schiefwinkliges Parallelogramm als Beugungsöffnung, während die Beugungsfransen ebenfalls schiefwinklige Parallelo-

gramme einschliessen; die Beugungsfransen verlaufen senkrecht zu den Seiten des beugenden Parallelogramms.

11. Beugung durch einen Spalt. Ein Spalt lässt sich auffassen als ein Rechteck, dessen eine Seite (b) sehr gross ist. Die Beugungsfigur reducirt sich daher auf einen schmalen Lichtstreifen in der x'-Axe, der von Dunkelflecken durchschnitten ist, entsprechend der Formel:

$$J = J' \left[\frac{\sin \frac{\mu a}{2}}{\frac{\mu a}{2}} \right]^2 . \tag{78}$$

Dabei ist, falls das Licht senkrecht gegen die Ebene des Spaltes einfällt:

$$\mu = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi , \tag{78'}$$

falls φ den Beugungswinkel (Winkel der gebeugten Strahlen gegen die einfallenden Strahlen) bezeichnet. Wenn die Lichtquelle Q eine Lichtlinie ist, die zum Spalt parallel ist, so wird auch die Beugungsfigur ein breites Lichtband, das von parallelen Fransen durchschnitten ist an den Stellen $\mu a = 2h\pi$. Bedeutendere Lichtintensität findet sich nur zwischen den Grenzen $\mu a = + 2\pi$. — Die Lage der dunklen Fransen hätte man auch aus folgender Ueberlegung direct ableiten können:

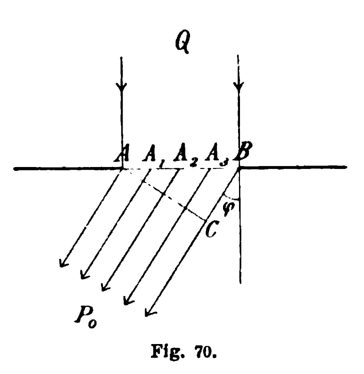


Fig. 70.

Um die Intensität für einen beliebigen Beugungswinkel φ (vgl. Figur 70) zu finden, theile man den Beugungsspalt AB in derartige Streifen AA_1, A_1A_2, A_2A_3 etc., dass die Lichtwege von A, A_1, A_2 ... nach dem unendlich fernen Punkte P_0 um je $\frac{1}{2}\lambda$ von einander verschieden sind. Die Wirkung je zweier benachbarter Zonen heben sich dann auf. Es besteht daher Dunkelheit, wenn AB in eine gerade Anzahl solcher Zonen getheilt werden kann, d. h. wenn im rechtwinkligen Dreieck ACB die Kathete BC gleich $h \cdot \lambda$ ist, wo $h = 1, 2, 3 \ldots$ Da nun $BC = a \sin \varphi$, falls a die Spaltbreite ist, so tritt Dunkelheit ein für die Beugungswinkel

(79) $$\sin\varphi = \pm h \cdot \frac{\lambda}{a}.$$

Dies ist aber (nach (78')) identisch mit der Bedingung $\mu a = 2h\pi$. Hieraus ergiebt sich, dass für $a < \lambda$ für keinen Beugungswinkel Dunkelheit eintritt, es besteht daher Diffusion des Lichtes (vgl. die analogen Betrachtungen oben auf S. 185).

Fällt weisses Licht ein und bezeichnet man die Intensität J', welche einer bestimmten Farbe oder Wellenlänge λ angehört, mit J_λ', setzt ferner zur Abkürzung $\pi a \sin\varphi = a'$, so ist für einen bestimmten Werth a' die ganze Lichtintensität:

(79') $$J = \Sigma J_\lambda' \cdot \frac{\sin^2 a'/\lambda}{(a'/\lambda)^2}.$$

Wenn a' nicht sehr klein ist, z. B. falls a' etwa bei $3\pi\lambda$ liegt, so ist in (79') $\sin a'/\lambda$ von λ viel stärker abhängig als a'/λ. Betrachtet man a'/λ annähernd als constant, so geht (79') in eine Form über, wie sie die an einem dünnen Blättchen reflectirte Lichtintensität besitzt (cf. II. Abschnitt, Kapitel II, § 11). Annähernd treten also in einiger Distanz vom Centralfelde Newton's Farben dünner Blättchen auf.

12. Beliebige Gestalt der Beugungsöffnung. Bei beliebiger unsymmetrischer Gestalt der Beugungsöffnung sind beide Integrale C und S von Null verschieden. Die Nullstellen der Intensität im Beugungsbilde sind durch die beiden, gleichzeitig zu erfüllenden Bedingungen $C = 0$, $S = 0$ characterisirt. Im Allgemeinen sind dies daher discrete Punkte, nicht, wie beim Rechteck, zusammenhängende Linien. Betreffs der Durchführung der Theorie für specielle Gestalten der Beugungsöffnung vgl. man Schwerd, Die Beugungserscheinungen, Mannheim 1835.

13. Mehrere gleichgestaltete und gleichorientirte Beugungsöffnungen. Die Coordinaten eines Punktes einer Beugungsöffnung in Bezug auf einen, in jeder Oeffnung gleich liegenden Punkt A seien mit ξ und η bezeichnet. Die Coordinaten der Punkte A in Bezug auf das beliebige, im Beugungsschirm liegende Coordinatensystem x, y seien $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ etc. Dann ist also für einen Punkt irgend einer Beugungsöffnung, z. B. der dritten, zu setzen

$$x = x_3 + \xi, \quad y = y_3 + \eta,$$

und nach (73) wird:

$$C = \sum_i \int \cos\left[\mu(x_i + \xi) + \nu(y_i + \eta)\right] d\xi d\eta,$$
$$S = \sum_i \int \sin\left[\mu(x_i + \xi) + \nu(y_i + \eta)\right] d\xi d\eta. \tag{80}$$

Die ξ und η variiren bei allen Beugungsöffnungen in den gleichen Grenzen. Bezeichnet man daher die Beugungsintegrale C und S, wenn sie nur über eine einzige Beugungsöffnung erstreckt werden, durch c und s, d. h. setzt man

$$c = \int \cos(\mu\xi + \nu\eta)\, d\xi d\eta, \quad s = \int \sin(\mu\xi + \nu\eta)\, d\xi d\eta, \tag{81}$$

und setzt man zur Abkürzung:

$$c' = \sum_i \cos(\mu x_i + \nu y_i), \quad s' = \sum_i \sin(\mu x_i + \nu y_i), \tag{82}$$

so wird nach (80):

$$C = c' \cdot c - s' \cdot s, \quad S = s' \cdot c + c' \cdot s,$$

daher nach (72):

$$J = A'^2 (c'^2 + s'^2)(c^2 + s^2). \tag{83}$$

Aus dieser Formel ersieht man, dass diejenigen Stellen des Beugungsbildes, welche Dunkelstellen für eine einzige Beugungsöffnung sind, auch in diesem Falle bei mehreren gleichliegenden Beugungsöffnungen Dunkelstellen bleiben. Die Lichtstärke wird für eine beliebige Stelle im Verhältniss $c'^2 + s'^2$ vermehrt im Vergleich zu der Lichtstärke bei einer Oeffnung. Dieses Verhältniss $c'^2 + s'^2$ kann sehr verschiedene Werthe haben. Es lässt sich schreiben in der Form:

$$c'^2 + s'^2 = \sum_i \cos^2(\mu x_i + \nu y_i) + 2\sum_{i,k} \cos(\mu x_i + \nu y_i)\cos(\mu x_k + \nu y_k)$$
$$+ \sum_i \sin^2(\mu x_i + \nu y_i) + 2\sum_{i,k} \sin(\mu x_i + \nu y_i)\sin(\mu x_k + \nu y_k),$$

d. h.
$$c'^2 + s'^2 = m + 2\sum_{i,k} \cos\left[\mu(x_i - x_k) + \nu(y_i - y_k)\right], \tag{84}$$

wobei m die Anzahl der Oeffnungen bezeichnet. — Bei ganz unregelmässiger Anordnung sehr vieler Beugungsöffnungen kommt das zweite Glied der rechten Seite in (84) gegen das erste nicht in Betracht, da die einzelnen Summanden unter dem Zeichen Σ regellos zwischen -1 und $+1$ schwanken. Daher ist die Intensität im Beugungsbilde überall m mal grösser, als bei einer einzigen Beugungsöffnung. Diese Erscheinung

kann man z. B. studiren, wenn man in ein Staniolblatt mit einer Nadel regellos vertheilte, gleich grosse Löcher stösst. Man nimmt ein concentrisches Ringsystem wahr, welches auch schon ein einziges Loch, nur in weniger intensiver Weise, hervorruft.

Völlig anders werden die Resultate, wenn man regelmässig vertheilte, oder nur wenige Oeffnungen hat. Betrachten wir z. B. den Fall zweier Oeffnungen, setzen wir z. B.

$$x_1 = 0,\ x_2 = d,\ y_1 = y_2 = 0,$$

so wird

$$c'^2 + s'^2 = 4\cos^2\frac{\mu d}{2}.$$

Die Beugungsfigur, welche eine einzige Oeffnung hervorruft, ist also noch durchzogen von dunkeln Fransen der Gleichung $\mu d = (2h + 1)\pi$, d. h. von Fransen, welche senkrecht zur Verbindungslinie zweier correspondirender Punkte der Beugungsöffnungen stehen und nach (77) den constanten relativen Abstand $\lambda f : d$ in der Brennebene des Fernrohr-Objectivs besitzen.

14. Das Babinet'sche Theorem. Bevor wir auf den Fall der Gitter, d. h. sehr zahlreicher, regelmässig vertheilter Beugungsöffnungen eingehen, wollen wir zwei complementäre Beugungsschirme betrachten. Wenn ein Beugungsschirm σ_1 irgend welche Löcher besitzt, und ein anderer Schirm σ_2 gerade die Stellen bedeckt hat, an welchen σ_1 frei ist, während die Stellen in σ_2 frei sind, welche in σ_1 bedeckt sind, so heissen σ_1 und σ_2 complementäre Beugungsschirme. Die Lichtintensität J_1 bei Anwendung des Schirmes σ_1 ist proportional zu $C_1{}^2 + S_1{}^2$, wobei C_1, S_1 Integrale sind, welche über die freien Oeffnungen in σ_1 zu erstrecken sind. Die Lichtintensität J_2 bei Anwendung des Schirmes σ_2 ist proportional zu $C_2{}^2 + S_2{}^2$, wobei die Integrale C_2, S_2 über die freien Oeffnungen in σ_2 zu erstrecken wären. Die Lichtintensität J_0 bei ganz fehlendem Beugungsschirme ist daher proportional zu $(C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2$. An einer Stelle des Beobachtungsfeldes, welche einem von Null verschiedenen Beugungswinkel entspricht, ist aber in letzterem Falle $J_0 = 0$, d. h. es ist $C_1 = - C_2$, $S_1 = - S_2$. Daher ist auch $J_1 = J_2$ und wir erhalten den Satz: Bei zwei complementären Beugungsschirmen ist die Lichtstärke an allen Stellen des Beugungsbildes die gleiche, abgesehen vom Centralfleck, welcher dem Beugungswinkel Null entspricht. Dies ist das Babinet'sche Theorem.

Wir machen eine Anwendung dieses Satzes auf die Beugungsfigur, welche durch unregelmässig vertheilte, gleich grosse kreisförmige Schirme hervorgebracht wird. Die Beugungsfigur muss dieselbe sein, welche gleich grosse, unregelmässig vertheilte, kreisförmige Oeffnungen hervorrufen. (Vgl. vorige S.). Man erhält also ein concentrisches Ringsystem. Die Erscheinung lässt sich durch Lycopodiumsamen hervorrufen, den man auf eine Glasplatte streut. Auch die Höfe um Sonne und Mond erklären sich durch die Beugungswirkung gleich grosser Wassertröpfchen.[1])

15. Beugungsgitter. Ein Beugungsgitter besteht aus sehr vielen parallelen Spalten in constantem Abstand. In der Bezeichnung des § 13 können wir setzen:

$$x_1 = 0,\ x_2 = d,\ x_3 = 2d,\ x_4 = 3d, \text{ etc.}$$
$$y_1 = y_2 = y_3 \text{ etc.} = 0,$$

falls d den Abstand correspondirender Punkte in zwei benachbarten Spalten bedeutet, die sogenannte Gitterconstante. Es ist daher nach (82):

$$c' = 1 + \cos \mu d + \cos 2\mu d + \cos 3\mu d + \ldots$$
$$s' = \sin \mu d + \sin 2\mu d + \sin 3\mu d + \ldots$$

Um $c'^2 + s'^2$ zu finden, kann man zweckmässig imaginäre Grössen benutzen, indem man schreiben kann, falls m Oeffnungen vorhanden sind:

$$c' + is' = 1 + e^{i\mu d} + e^{2i\mu d} + e^{3i\mu d} + \ldots + e^{i(m-1)\mu d}.$$

Diese Summation kann man sofort ausführen. Man erhält:

$$c' + is' = \frac{e^{im\mu d} - 1}{e^{i\mu d} - 1}.$$

Durch Multiplication beider Seiten dieser Gleichung mit ihren conjugirten complexen Ausdrücken folgt:

$$c'^2 + s'^2 = \frac{1 - \cos m\mu d}{1 - \cos \mu d} = \frac{\sin^2 \frac{m\mu d}{2}}{\sin^2 \frac{\mu d}{2}},$$

1) Betreffs der Berechnung der Grösse derselben aus den Durchmessern der Ringe der Höfe vgl. Vorles. über theoret. Optik von F. Neumann, herausgeg. von Dorn, Leipzig 1885, S. 105.

sodass aus (83) und (78) folgt:

$$(85)\qquad J = J_1' \frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{m \mu d}{2}}{\sin^2 \frac{\mu d}{2}}$$

Hierin bedeutet J_1' die Lichtintensität für den Beugungswinkel 0 ($\mu = 0$), wie sie bei einem Spalt bestehen würde. Aus dieser Formel geht hervor, dass das Beugungsbild eines Spaltes, welches durch die beiden ersten Factoren dargestellt ist, durchzogen ist von sehr eng auf einander folgenden Dunkelfransen der Gleichung $\frac{m \mu d}{2} = h\pi$. Diese Fransen folgen um so enger auf einander, je grösser die Anzahl m der Spalten ist. Zwischen den Fransen erreicht die Lichtstärke J Maxima, welche aber höchstens gleich der an gleicher Stelle des Beugungsbildes stattfindenden Lichtstärke bei einem Spalt sind. Sehr viel stärkere Maxima treten aber ein, falls $\sin \frac{\mu d}{2}$ verschwindet, d. h. für

$$(86)\qquad \mu = \frac{2h\pi}{d}, \text{ d. h. } \sin \varphi = h \frac{\lambda}{d},$$

falls φ den Beugungswinkel bezeichnet. (Das Licht soll senkrecht auf das Gitter einfallen.)

Für diese Beugungswinkel φ ist nämlich

$$\frac{\sin^2 \frac{m \mu d}{2}}{\sin^2 \frac{\mu d}{2}} = m^2,$$

sodass die Intensität m^2 mal so gross ist, als bei einem Spalt an der betreffenden Stelle des Beugungsfeldes. Wenn m sehr gross ist, so sind diese Maxima überhaupt allein wahrnehmbar.[1]) Es fällt ein solches Maximum nur dann aus, wenn an der gleichen Stelle gerade eine Nullstelle des Beugungsbildes eines Spaltes liegen würde, d. h. falls gleichzeitig mit (86) die Relation bestände:

$$\mu = \frac{2k\pi}{a}.$$

1) Wenn die Gitterconstante $d < \lambda$ ist, so ist kein Beugungsmaximum wahrnehmbar, da nach (86) $\sin \varphi > 1$ würde. Man kann daher die Constitution durchsichtiger Körper auffassen als Einlagerungen undurchsichtiger ponderabeler Theile im durchsichtigen Aether. Wenn die Distanzen der ponderabelen Theile kleiner als die Lichtwellenlänge ist, so geht nur das ungebeugte Licht hindurch.

Dies ist nur möglich, wenn die Spaltbreite a ein rationales (aus dem Quotienten zweier ganzen Zahlen bestehendes) Verhältniss zu der Gitterconstante d hat. Sehr feine Gitter stellt man her durch Einritzen sehr feiner Linien auf Glas oder Metall (Reflexionsgitter) mit Hülfe eines Diamanten. Die Striche, welche der Diamant reisst, wirken als undurchsichtige oder nicht reflectirende Stellen, d. h. als Schirme. Nach dem Babinetschen Theorem (cf. oben S. 204) kann man die Strichbreite auch als Spaltbreite a auffassen. Dieselbe ist dann sehr viel kleiner, als die Gitterconstante d, so dass jedenfalls die ersten Maxima, welche in (86) nur mässig grossen Werthen von h entsprechen, nicht ausfallen. Diese Maxima haben auch nahezu constante Intensität, da bei sehr geringer Spaltbreite a das Beugungsbild, welches ein Spalt hervorruft, einen grossen Theil des Beugungsfeldes mit nahezu gleichmässiger Intensität beleuchtet.

Bei genügend grosser Spaltenzahl m besteht daher das Beugungsbild bei Beleuchtung durch eine feine Lichtlinie Q von einheitlicher (homogener) Farbe aus feinen hellen Linien, welche bei den Beugungswinkeln φ_0, φ_1, φ_2, etc. erscheinen, die dem Gesetz gehorchen:

$$\varphi_0 = 0, \sin\varphi_1 = \pm\frac{\lambda}{d}, \sin\varphi_2 = \pm\frac{2\lambda}{d}, \sin\varphi_3 = \pm\frac{3\lambda}{d} \text{ etc.}$$

Bei Beleuchtung des Gitters mit einer weissen Lichtlinie Q müssen daher reine Spectren erscheinen, da die verschiedenen Farben bei verschiedenen Beugungswinkeln auftreten. Diese Gitterspectren werden normale Spectren (im Gegensatz zu den durch Brechung in einem Prisma entstehenden Dispersionsspectren) genannt, weil jede Farbe entsprechend ihrer Wellenlänge abgelenkt ist aus der Richtung des einfallenden Lichtes, wenigstens so lange die Beugungswinkel φ so klein bleiben, dass man $\sin\varphi = \varphi$ setzen kann. Da jede Farbe, entsprechend den verschiedenen Werthen des h in (86), vielfach auftritt, so entstehen auch vielfache Spectren. Das dem Werthe $h = 1$ entsprechende Spectrum heisst Spectrum erster Ordnung, dem Werthe $h = 2$ entspricht das Spectrum zweiter Ordnung u. s. w. Am wenigsten abgelenkt erscheint das Violett des ersten Spectrums, dann folgen die Farben bis zum Roth. Nach einem dunkeln Zwischenraum folgt das Violett des zweiten Spectrums. Das Roth des zweiten Spectrums wird aber schon überdeckt vom blauen Ende des dritten Spectrums, da $3\lambda_v < 2\lambda_r$,

falls λ_v und λ_r die Wellenlängen des sichtbaren violetten und rothen Lichtes, welches im weissen Licht enthalten ist, bezeichnen. Diese Ueberdeckung mehrerer Farben häuft sich nun immer mehr, wenn man zu grösseren Beugungswinkeln fortschreitet.

Dass hier beim Gitter reine Spectralfarben auftreten im Gegensatz zu einem Spalt, der annähernd die Newton'schen Interferenzfarben ergiebt (vgl. oben S. 202), liegt daran, dass beim Gitter die Orte der Lichtmaxima scharf bestimmte sind, bei einem Spalt dagegen die Orte der Lichtminima, d. h. der Dunkelstellen.

Die Gitter bilden das beste Hülfsmittel, um die Wellenlänge genau zu bestimmen, aus Gitterconstante d und Beugungswinkel φ. Die Bestimmung wird um so genauer, je feiner das Gitter getheilt ist, da dadurch die Beugungswinkel wachsen. Rutherford stellte Gitter auf Glas oder Metall her, bei denen bis 700 Linien auf ein Millimeter kommen. Wesentlich für die Güte eines Gitters ist vor Allem die Theilmaschine, welche das Reisserwerk (den Diamanten) bewegt. Die Striche müssen genau parallel sein und constanten Abstand haben. Von Rowland werden jetzt tadellose Gitter hergestellt mit einer Theilmaschine, die bis zu 1700 Linien pro Millimeter zu reissen erlaubt.

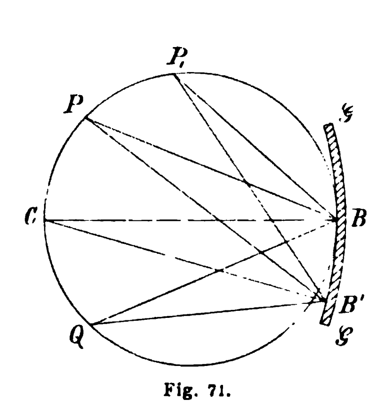


Fig. 71.

16. Concavgitter. Ein weiterer wichtiger Fortschritt ist von Rowland dadurch erzielt worden, dass das Gitter auf einer cylindrischen, gut reflectirenden Metallfläche hergestellt wurde, die Striche laufen der Cylinderaxe parallel und besitzen auf der zugehörigen Sehne einen gleich grossen Abstand. Diese Concavgitter erzeugen von einer zur Cylinderaxe parallelen leuchtenden Linie Q ein reelles Bild P ohne Hülfe von Linsen, und auch die Beugungsmaxima P_1, P_2 etc. der verschiedenen Ordnungen sind reelle Bilder. Um die Lage derselben zu finden, construire man einen Kreis, der den Krümmungsradius r des Gitters als Durchmesser hat und das Gitter GG berührt (vgl. Figur 71). Wenn die Lichtlinie auf diesem Kreise in Q liegt, so entsteht durch Reflexion das ungebeugte reelle Bild in P ebenfalls auf demselben Kreise und zwar liegen P und Q symmetrisch zu C, falls C das

Krümmungscentrum des Gitters GG ist. Denn im Punkte B ist CB die Hohlspiegelnormale, daher ist Einfallswinkel QBC gleich Reflexionswinkel PBC. Aber auch ein, in einem beliebigen anderen Punkte B' des Spiegels reflectirter Strahl muss stets durch P gehen, denn in B' ist CB' die Spiegelnormale, da C das Krümmungscentrum des Concavspiegels ist, und da nun sehr annähernd $\measuredangle QB'C = \measuredangle PB'C$ ist (es wäre streng der Fall, wenn B' auf dem Kreise selbst läge, da die Winkel dann Peripheriewinkel über gleichen Kreisbögen wären), so ist $B'P$ die Richtung des reflectirten Strahles. P ist also der Ort des ungebeugten Bildes, welches der Spiegel von Q durch Reflexion entwirft.[1])

Der Ort eines Beugungsbildes P_1 ist nun der Schnitt zweier Strahlen BP_1 und $B'P_1$, welche gleiche Winkel einschliessen mit BP und $B'P$. Man erkennt daher, dass P_1 ebenfalls auf dem durch $PCQB$ gehenden Kreise liegt, da die Winkel $PB'P_1$ und PBP_1 als Peripheriewinkel über demselben Bogen streng einander gleich wären, wenn B' ebenfalls auf jenem Kreise läge.

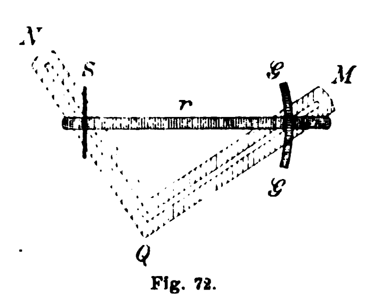


Fig. 72.

Wenn man in P_1 das reelle Beugungsspectrum auf einem Schirme S auffangen wollte, so müsste derselbe sehr schief gegen die das Bild hervorrufenden Strahlen stehen. Es ist günstiger, wenn der auffangende Schirm senkrecht zu ihnen steht. Daher bringt man den Schirm S im Punkte C parallel zum Gitter an. Die Lichtquelle Q muss jedenfalls auf dem Kreise liegen, der CB als Durchmesser hat, d. h. $\measuredangle CQB$ muss stets ein rechter sein. Um praktisch geeignete Lagen von Q zu finden, bei welchen ein Beugungsspectrum auf S entsteht, sind das Gitter G und der Schirm S auf einer Leiste der Länge r (Krümmungsradius des Gitters) befestigt, die auf den rechtwinkligen Schienen QM und QN gleiten kann, wie es Figur 72 andeutet. In Q befindet sich die Lichtquelle. Durch

1) Dasselbe würde folgen aus der zweiten der Formeln (34) auf S. 48, die bei der astigmatischen Abbildung durch Reflexion abgeleitet wurde. Es ist zu setzen $\measuredangle CBQ = \varphi$, $CB = -r$, daher $QB = s = -r \cos \varphi$. Aus jener Formel folgt daher $s_1 = -s$, d. h. bei Berücksichtigung der dort positiv gerechneten Richtung s_1 muss der symmetrisch zu C gelegene Punkt P auf dem Kreise das Bild von Q sein.

Entfernung des S von Q erhält man successive die Spectren höherer Ordnung.

17. Brennpunktseigenschaften ebener Gitter. Wenn der gegenseitige Abstand d der Gitterstriche nicht constant ist, so sind die Beugungswinkel φ, welche einem Lichtmaximum, z. B. dem ersten, nach der Formel $\sin\varphi = \lambda : d$ entsprechen, für die verschiedenen Partien des Gitters verschiedene. Bei einer geeignet gewählten Variabilität des d können diese Richtungen, welche dem Lichtmaximum entsprechen, sich alle in einem Punkte F schneiden. Dieser Punkt ist dann ein Brennpunkt des Gitters, da er dieselben Eigenschaften hat, wie der Brennpunkt einer Linse.[1])

18. Das Auflösungsvermögen eines Gitters. Die Fähigkeit eines Gitters, zwei benachbarte Spectrallinien von einander zu trennen, muss proportional zu der Strichzahl m des Gitters sein, da wir oben gesehen haben, dass das Beugungsmaximum, welches eine bestimmte Wellenlänge λ hervorbringt, eine um so schmälere Lichtlinie ist, je grösser m ist. Nach Formel (86) der S. 206 liegt das Beugungsmaximum der h-ten Ordnung bei den Werthen

$$\mu = 2h\pi : d, \text{ d. h. } \sin\varphi = h\lambda : d.$$

Wenn μ von diesem Werthe aus wächst oder abnimmt, so erhält man nach (85) eine erste Nullstelle der Intensität, wenn sich μ derartig geändert hat, dass $m\mu d : 2$ um π geändert ist, d. h. wenn die Aenderung von μ beträgt:

$$d\mu = 2\pi : m\,d.$$

Daher muss sich der Beugungswinkel φ, der mit μ nach der Gleichung (78′) S. 201 zusammenhängt, um

$$d\varphi = \lambda : m\,d\cos\varphi \tag{87}$$

geändert haben. Diese Grösse $d\varphi$ misst daher die halbe Winkelbreite des Beugungsbildes.

Für eine benachbarte Spectrallinie der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ ist der Ort ihres h-ten Beugungsmaximums gegeben durch

$$\sin(\varphi + d\varphi') = h(\lambda + d\lambda) : d,$$

1) Näheres über das Vertheilungsgesetz der Gitterstriche vgl. bei **Cornu**, Compt. rend. 80, S. 645, 1875. — Pogg. Ann. 156, S. 114, 1875. — **Soret**, Arch. d. scienc. phys. 52, S. 320, 1875. — Pogg. Ann. 156, S. 99, 1875. — **Winkelmann's** Handb. II, S. 622 (Autor **Feussner**).

d. h. der Winkel $d\varphi'$, um den die Beugungsmaxima der Linie λ und $\lambda + d\lambda$ verschieden liegen, ist

$$d\varphi' = h \cdot d\lambda : d \cos \varphi.$$

Damit das Gitter nun diese beiden Spectrallinien trennt, muss dieser Winkel $d\varphi'$ grösser sein als die halbe Breite des Beugungsbildes der einen Linie, d. h. es muss sein:

$$d\varphi' > d\varphi, \quad h \cdot d\lambda > \lambda : m, \quad \frac{d\lambda}{\lambda} > \frac{1}{hm}. \tag{88}$$

Die **auflösende Kraft eines Gitters ist daher proportional zur Gesammtstrichzahl m und der Ordnung h des Spectrums, dagegen von der Gitterconstante d** (Strichabstand) **unabhängig.** Bei zu kleinem Strichabstand d kann es allerdings eintreten, dass die Trennung der Spectrallinien noch besonderer Ocularvergrösserung bedarf, durch eine solche lässt sich dann aber auch wirklich die Trennung stets erreichen, sobald nur das nach (88) definirte Auflösungsvermögen des Gitters nicht überschritten ist.

Zur Trennung der Doppellinie D des Natriumlichtes, für welche $d\lambda : \lambda = 0{,}001$ ist, bedarf man also eines Gitters von mindestens 500 Strichen, wenn man im Spectrum zweiter Ordnung beobachtet.

19. Michelson's Glasplattenstaffeln.[1]) Um das Auflösungsvermögen zu steigern, muss es nach den obigen Auseinandersetzungen günstig sein, die Ordnungszahl h des Spectrums möglichst hoch zu wählen. Bei den bisher betrachteten Gitterconstructionen kann man nun aber practisch etwa über die dritte Ordnung ($h = 3$) nicht hinausgehen, da die Intensität sonst zu gering wird. Man kann nun aber schon bei sehr kleinen Beugungswinkeln eine bedeutende Phasendifferenz der interferirenden Strahlen erzielen, d. h. denselben Effect erreichen, den Spectra hoher Ordnungszahl ergeben, wenn man die interferirenden Strahlenbündel Glas von verschiedener Dicke durchsetzen lässt. Gehen wir z. B. nur von zwei parallelen Spalten aus und legen wir hinter den einen Spalt eine mehrere Millimeter dicke Glasplatte, so gelangen bei minimalen Beugungswinkeln Strahlen zur Interferenz, welche mehrere Tausend Wellenlängen Gangunterschied besitzen. Dieser Gedanke liegt den Michelson'schen Glasplattenstaffeln zu Grunde. Es werden

1) A. Michelson, Astrophysical Journ. 1898, S. 37, Bd. 8.

m-Platten der Dicke δ in der aus Figur 73 ersichtlichen Weise staffelartig aufeinander gelegt, die Breite des Staffelschrittes sei a. Das Licht falle von oben (in der Figur) senkrecht auf die Platten. Für die parallelen Strahlen AA' und CC', welche den Winkel φ mit dem einfallenden Lichte machen, ist ihre Gangdifferenz, wenn $CD \perp$ zu AA' ist und der Brechungsindex der Glasplatten mit n bezeichnet wird:

$$n \cdot BC - AD = n\delta - \delta \cos \varphi + a \sin \varphi ,$$

da $AD = DE - AE$ und $DE = \delta \cos \varphi$, $AE = a \sin \varphi$ ist. Wenn diese Gangdifferenz ein ganzzahliges Vielfaches einer Wellenlänge ist, d. h. falls ist

$$(89) \qquad h \cdot \lambda = n\delta - \delta \cos \varphi + a \sin \varphi ,$$

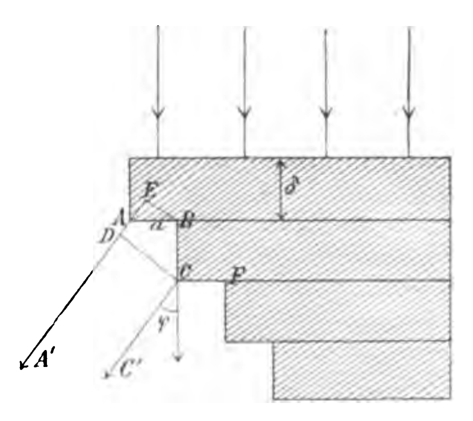


Fig. 73.

so muss in der Richtung φ maximale Lichtwirkung eintreten, da dann alle von AB unter dem Winkel φ austretenden Strahlen in ihrer Wirkung unterstützt werden durch die von CF austretenden parallelen Strahlen. Die Gleichung (89) giebt also die Richtung φ der Beugungsmaxima an.

Bei einer nur geringen Aenderung von λ um $d\lambda$ ist die Aenderung $d\varphi'$ des Beugungsmaximums bedeutend, denn aus (89) folgt durch Differentiation:

$$h\, d\lambda = \delta \cdot dn + (\delta \sin \varphi + a \cos \varphi)\, d\varphi' ,$$

d. h. wenn φ klein gewählt wird, so ist

$$(90) \qquad d\varphi' = \frac{h \,.\, d\lambda - \delta \,.\, dn}{a} .$$

Da bei kleinem φ nach (89) $h\lambda = (n - 1)\, \delta$ ist, so lässt sich (90) schreiben:

$$(90') \qquad d\varphi' = \frac{\delta}{a} \left[(n-1) \frac{d\lambda}{\lambda} - dn \right] ;$$

es ist daher $d\varphi'$ bei grossem $\delta : a$ erheblich gross. Es ist zu

berücksichtigen, dass in dieser Formel in Wirklichkeit eine Summe und keine Differenz auftritt, weil n mit wachsendem λ beim Glase und überhaupt allen durchsichtigen Körpern abnimmt.

Ein Uebelstand dieser Anordnung liegt darin, dass die Beugungsmaxima verschiedener Ordnung, welche demselben λ entsprechen, sehr nahe aufeinander folgen. Denn aus (89) folgt für den Beugungswinkel $\varphi + d\varphi''$ der Ordnung $h + 1$ für die Wellenlänge λ die Beziehung:

$$\lambda = (\delta \sin \varphi + a \cos \varphi)\, d\varphi'',$$

d. h. bei kleinem φ:

$$d\varphi'' = \lambda : a. \tag{91}$$

So folgt z. B. für 5 mm dicke Flintglasplatten, dass die beiden Natriumlinien D_1 und D_2 10 mal weiter getrennt sind als zwei aneinander grenzende Spectra (der Ordnung h und $h + 1$) einer der beiden Natriumlinien. In Folge dessen muss die Lichtquelle sehr schmal begrenzte, d. h. homogene, Spectrallinien besitzen, wenn nicht die Spectren verschiedener Ordnung übereinander fallen sollen, d. h. falls $d\varphi'' > d\varphi'$ sein soll. So hat z. B. Michelson ein Instrument mit 20 Platten der Dicke $\delta = 18$ mm, $a = 1$ mm construirt, welches eine Lichtquelle erfordert, deren Spectrallinien $^1/_{15}$ der Distanz der beiden Natriumlinien höchstens als Breite haben dürfen.

Um das Auflösungsvermögen der Glasplattenstaffel zu finden, müssen wir die Breite des Beugungsmaximums h_{ter} Ordnung berechnen, d. h. diejenigen Beugungswinkel $(\varphi \pm d\varphi)$ berechnen, welche Nullstellen ergeben, die dem der Gleichung (89) entsprechenden Lichtmaximum am nächsten benachbart sind. Um diese Nullstellen zu finden, denken wir die Staffel der Plattenzahl m in zwei gleiche Theile I und II der Plattenzahl $^m/_2$ zerlegt. Es tritt Dunkelheit für diejenigen Beugungswinkel $\varphi + d\varphi$ ein, für welche der Gangunterschied zweier Strahlen, von denen der eine durch den Theil I der Staffel, der andere durch einen homolog liegenden Punkt des Theiles II der Staffel geht, ein ungerades Vielfaches von $^1/_2\,\lambda$ beträgt. Gerade wie die rechte Seite von (89) den Gangunterschied zweier Strahlen angiebt, von denen der eine eine Glasplatte mehr durchsetzt hat als der andere, so würde der Gangunterschied in unserem Falle, wo der eine Strahl $^m/_2$ Glasplatten mehr passirt hat als der andere, durch Multiplication der rechten Seite von (89) mit $^m/_2$ zu erhalten sein.

Für eine Nullstelle, welche dem Beugungswinkel $\varphi \pm d\varphi$ zugehört, muss also sein:

$$(k \pm \tfrac{1}{2})\,\lambda = \frac{m}{2}\,[n\delta - \delta\cos(\varphi \pm d\varphi) + a\sin(\varphi \pm d\varphi)] \quad .$$

Damit $d\varphi$ möglichst klein sei, d. h. um die beiden Nullstellen zu erhalten, welche dem der Gleichung (89) entsprechenden Lichtmaximum am nächsten benachbart sind, haben wir, wie eine Vergleichung mit (89) lehrt, in der letzten Gleichung $k = h \cdot {}^m/_2$ zu setzen. Es ergiebt sich dann aus der letzten Gleichung und aus (89):

$$\pm \tfrac{1}{2}\lambda = \frac{m}{2}\,(\delta\sin\varphi + a\cos\varphi)\,d\varphi\,,$$

oder für kleine Winkel φ:

$$d\varphi = \pm \frac{\lambda}{ma}\,. \tag{92}$$

Dieser Winkel $d\varphi$ misst also die halbe Winkelbreite des Beugungsbildes der Spectrallinie λ. Damit eine Doppellinie der Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ noch aufgelöst werde, muss der der Gleichung (90) entsprechende Dispersionswinkel $d\varphi'$ grösser sein als $d\varphi$, d. h. es muss sein

$$\frac{d\lambda}{\lambda} > \frac{1}{m\delta\left(\frac{n-1}{\lambda} - \frac{dn}{d\lambda}\right)}\,. \tag{93}$$

Das Auflösungsvermögen hängt also nur von der Gesammtdicke $m\delta$ der Staffel ab, einerlei, ob man sie aus vielen Platten kleiner Dicke oder wenig Platten von grösserer Dicke aufbaut. Nur zum Zwecke einer weiteren Trennung $d\varphi''$ der Spectren verschiedener Ordnungen und zur Vergrösserung des Dispersionswinkels $d\varphi'$ empfiehlt sich eine grössere Plattenzahl, damit a klein wird [vgl. dazu die Formeln (90) und (91)].

Für Flintgläser hat $-\frac{dn}{d\lambda}$ etwa den Werth 100, wenn man λ in Millimeter ausdrückt. Bei einer Plattendicke δ von 18 mm und Plattenzahl $m = 20$ wird daher das Auflösungsvermögen nach (93):

$$m\delta\left(\frac{n-1}{\lambda} - \frac{dn}{d\lambda}\right) = 0{,}46 \cdot 10^6,$$

was man nach (88) mit einem Strichgitter erst bei etwa einer Halbmillion Strichen erreichen könnte.

Obgleich, wie wir oben sahen, die Beugungsmaxima verschie-

dener Ordnung sehr nahe bei einander liegen, so sind doch nur wenige, nämlich höchstens zwei, sichtbar. Es ist nämlich zu berücksichtigen, dass nach S. 206 für die Lichtintensität in der Beugungserscheinung eines Gitters die von einem einzelnen Spalt hervorgebrachte Intensität als Factor auftritt. Als einzelner Spalt wirkt bei der Glasplattenstaffel der unbedeckte Theil der Breite a je einer Glasplatte, die Intensität ist daher nach S. 201 nur zwischen den Beugungswinkeln $\varphi = \pm \frac{\lambda}{a}$, welche den ersten Nullstellen der Beugungsfigur des Spaltes entsprechen, wesentlich von Null verschieden, d. h. auf einem Winkelbereich $2\lambda : a$. Da nach (91) die Winkeldistanz zweier Maxima aufeinander folgender Ordnungen den Werth $\lambda : a$ hat, so werden also nur zwei solcher Maxima sichtbar.

Damit eine solche Plattenstaffel gute Resultate giebt, müssen die einzelnen Platten genau gleiche Dicke δ überall besitzen. Sie werden mit Hülfe der Interferenzcurven gleicher Neigung (cf. oben S. 139, Anm. 1) daraufhin controlirt, bezw. durch Abschleifen corrigirt.

20. Das Auflösungsvermögen eines Prismas. Im Anschluss an die vorangegangenen Betrachtungen ist die Frage von Interesse, ob ein Gitter einem Prisma an Auflösungsvermögen überlegen ist oder nicht. Das Trennungsvermögen eines Prismas hängt nicht nur von der Dispersion des Prismas ab, sondern auch von seiner Breite (senkrecht zur brechenden Kante gerechnet). Denn wenn diese Breite ziemlich klein ist, so wird jede einzelne Spectrallinie durch Beugung verbreitert.

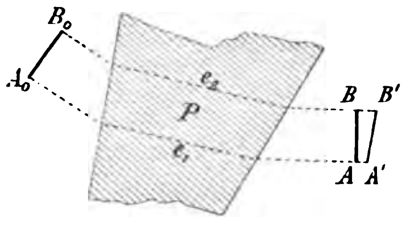


Fig. 74.

Der combinirte Einfluss von Dispersion und Büschelquerschnitt auf das Auflösungsvermögen eines Prismas oder irgend eines Prismensystems ist nach Rayleigh[1]) in folgender Weise einfach abzuleiten: Wird durch Brechung im System P (vgl. Figur 74) die ebene Wellenfläche A_0B_0 des einfallenden Lichtes der Wellenlänge λ in die Lage AB gebracht, so sind die Lichtwege (cf. oben S. 9) von A_0 bis A und B_0 bis B ein-

1) L. Rayleigh, Phil. Mag. (5) 9, S. 271, 1879. — Winkelmann's Handbuch, Optik, S. 166.

ander gleich. Eine Welle von anderer Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ wird in der gleichen Zeit in eine andere Lage $A'B'$ gebracht. Die Differenz zwischen den Lichtwegen $(A_0A') - (A_0A)$, d. h. die Strecke AA', können wir setzen

$$(A_0A') - (A_0A) = A'A = dn \,.\, e_1\,,$$

falls dn der Unterschied des Brechungsindex des Prismas für die Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ bedeutet,[1]) und e_1 den von den Randstrahlen im Prisma zurückgelegten Weg. (Wir setzen denselben als gleich voraus für die beiden verschiedenen Farben, was annähernd gestattet ist, da AA' den kleinen Factor dn enthält.)

Ebenso ist die Differenz zwischen den Lichtwegen $(B_0B') - (B_0B)$, d. h. die Strecke BB':

$$(B_0B') - (B_0B) = B'B = dn \cdot e_2\,,$$

wobei e_2 den von den anderen Randstrahlen des Büschels im Prisma zurückgelegten Weg bedeutet. — Nun ist der Winkel di, welchen die Wellenebene $A'B'$ mit der Wellenebene AB macht, d. h. die Dispersion des Prismas, offenbar

$$di = \frac{BB' - AA'}{b} = dn\,\frac{e_2 - e_1}{b}\,,$$

falls b die Breite des austretenden Lichtbüschels, d. h. die Strecke AB, bedeutet. Wenn die Randstrahlen A_0A durch die Prismenkante gehen, so ist $e_1 = 0$, und es ist

$$di = dn \cdot \frac{e}{b}\,, \tag{94}$$

wobei e die Prismendicke an der Basis bedeutet, falls das Prisma auf Minimum der Ablenkung, d. h. symmetrischen Durchgang der Lichtstrahlen, eingestellt ist und das einfallende Lichtbündel die Prismenöffnung ganz ausfüllt. Dieselben Betrachtungen gelten bei einem Prismensatze: falls alle Prismen auf Minimum der Ablenkung eingestellt sind, bedeutet e die Summe der Prismendicken an der Basis.

Damit ein solcher Prismensatz eine Doppellinie im Spectrum auflösen könne, deren angularer Abstand di sei, müssen die Beugungsbilder, welche von jeder Spectrallinie in Folge des begrenzten Büschelquerschnittes b entstehen, genügend getrennt sein. Bei einem Spalt der Breite b liegt nach S. 202, Formel (79) das erste Minimum im Beugungsbilde bei dem Beugungswinkel $\varphi = \lambda : b$.[2]) Wenn also

---

1) Von der Dispersion der Luft wird abgesehen.

2) Da b sehr gross gegen λ ist, wird φ für $\sin \varphi$ geschrieben.

zwei Spectrallinien getrennt werden sollen, muss ihre Dispersion di mindestens grösser sein als obiger Winkel φ, der die halbe Breite des Centralfeldes im Beugungsbilde einer Spectrallinie angiebt, d. h. es muss sein nach (94)

$$dn \cdot \frac{e}{b} > \frac{\lambda}{b},$$

$$e > \frac{\lambda}{dn}. \tag{95}$$

Das Auflösungsvermögen eines Prismas hängt also nur von seiner Basisdicke ab und ist unabhängig vom Prismenwinkel. So ist z. B. zur Auflösung der Hauptdoppellinie des Natriumlichtes bei Flintglas ($n = 1{,}650$, $dn = 0{,}000055$, $\lambda = 0{,}000589$ mm) ein Prisma von mindestens 1 cm Dicke erforderlich. — Damit aber zwei Linien, für welche $d\lambda : \lambda = 2 : 10^6$ beträgt, noch aufgelöst werden, wie es bei der Michelson'schen Plattenstaffel oder mit einem Gitter von einer Halbmillion Strichen möglich ist (cf. oben S. 213), würde die Prismendicke $e = 5 \cdot 10^2$ cm, d. h. 5 m betragen müssen, was unmöglich erreicht werden kann. Es tritt auch zuviel Lichtabsorption durch zu grosse Glasdicken ein. — Die Gitterconstructionen können also zu höherer Auflösungskraft gebracht werden als Prismensysteme.

21. Die Leistungsgrenze eines Fernrohrs. Wenn ein Fernrohr auf einen Fixstern gerichtet wird, so entsteht durch Beugungswirkung am Rande der Objectivöffnung ein Lichtscheibchen in der Brennebene des Objectivs, welches um so grösser ist, je kleiner der Radius h der Objectivöffnung ist. Bei der Beugung durch einen kreisförmigen Schirm des Radius h entstehen concentrische dunkele Ringe. Das erste Lichtminimum tritt ein[1]) für den Beugungswinkel $\sin\varphi = 0{,}61 \frac{\lambda}{h}$. Nehmen wir an, dass ein zweiter Stern noch vom ersten zu unterscheiden wäre, falls sein Centralbild auf das erste Lichtminimum des ersten Sternes fällt, so ergiebt sich als Grenze des Sehwinkels φ, unter dem zwei Sterne dem unbewaffneten Auge erscheinen müssen, damit sie vom Fernrohr bei geeigneter Ocularvergrösserung noch aufgelöst werden können:

$$\varphi > 0{,}61 \cdot \frac{\lambda}{h} \text{ [2])}.$$

1) Hinsichtlich der Herleitung dieser Zahl vgl. F. Neumann's Vorlesungen über Optik, herausgeg. von Dorn, S. 89.

2) Bei der Kleinheit von φ kann man φ an Stelle von $\sin\varphi$ schreiben.

Nimmt man λ zu 0,00056 mm an, und drückt man φ in Bogenminuten aus, so folgt

$$\varphi > \frac{1{,}17'}{h}. \tag{96}$$

Dabei ist h in Millimeter ausgedrückt. Ein Fernrohr von 20 cm Objectivdurchmesser kann also noch zwei Sterne der Winkeldistanz $\varphi = 0{,}0117' = 0{,}7''$ auflösen.

22. Die Leistungsgrenze des menschlichen Auges. Die vorigen Ueberlegungen können wir auch auf das menschliche Auge anwenden nur mit dem Unterschiede, dass die Wellenlänge λ des Lichtes im Glaskörper des Auges entsprechend dem Brechungsindex 1,4 desselben im Verhältniss 1 : 1,4 kleiner ist, als in Luft. Für h ist der Pupillenradius einzusetzen. Nimmt man h zu 2 mm an, so ist der kleinste Sehwinkel, unter dem das Auge noch zwei leuchtende Punkte zu unterscheiden vermag

$$\varphi = 0{,}42'.$$

In Wirklichkeit liegt die Grenze etwa bei $\varphi = 1'$.

23. Die Leistungsgrenze des Mikroskops. Beim Mikroskop handelt es sich um Abbildung durchleuchteter Objecte, nicht selbstleuchtender[1]) Objecte. Auf diesen principiellen Unterschied hat zuerst Abbe aufmerksam gemacht. Vom Standpunkte der rein geometrischen Optik aus, welche mit Lichtstrahlen operirt, folgt die Aehnlichkeit von Object und Bild nach den im ersten Abschnitt dieses Buches behandelten Grundsätzen. Vom Standpunkt der physikalischen Optik dagegen, welche nicht mit Lichtstrahlen als von einander unabhängigen geometrischen Richtungen operirt, da dies nicht genau zulässig ist, sondern welche an die Deformationen der Wellenflächen anknüpft, ist die Aehnlichkeit von Object und Bild durchaus nicht selbstverständlich, sondern sogar streng genommen nie zu erreichen. Nehmen wir nämlich zunächst parallel einfallendes Licht an, so wird dasselbe nach dem Durchgang durch das durchleuchtete Object eine Beugungsfigur in der dem Ocular zugewandten Brennebene $\mathfrak{F}'$ des Objectivs entstehen lassen. Es handelt sich nun darum, welche Lichtwirkung diese Beugungsfigur in der der Objectebene $\mathfrak{P}$ in Bezug auf das Objectiv conjugirten Ebene $\mathfrak{P}'$ hervorruft. Dieses hier entstehende Bild wird vom Ocular betrachtet. Die Abbildung eines durch-

1) Als selbstleuchtende Objecte sind auch nahezu die Objecte zu betrachten, welche durch diffus reflectirtes Licht sichtbar werden.

leuchteten Objectes ist also nicht eine direkte (primäre), sondern eine indirekte (sekundäre), indem es sich um die Lichtwirkung eines vom Object entworfenen Beugungsbildes handelt.

Es ist ohne Weiteres klar, dass gleiche Beugungsbilder in der Brennebene $\mathfrak{F}'$ auch gleiche Bilder in der Pointirungsebene $\mathfrak{P}'$ hervorrufen. Verschiedene Objecte werden nun im Allgemeinen immer verschiedene Beugungsbilder in $\mathfrak{F}'$ hervorrufen.[1]) Wenn aber die Apertur des Mikroskop-Objectivs sehr klein ist, sodass nur ein enges, nahezu gleichmässig helles Centralfeld des Beugungsbildes zweier verschiedener Objecte zur Wirkung gelangt, so müssen sie gleiche Lichtwirkung in der Ebene $\mathfrak{P}'$ hervorrufen, d. h., im Mikroskop betrachtet, gleich aussehen. In diesem Falle sieht man nun im Mikroskop nur ein gleichmässig helles Gesichtsfeld, d. h. überhaupt keine Andeutung von Structur des Objectes. Soll diese wahrgenommen werden, so muss die numerische Apertur des Mikroskops so gross sein, dass ausser dem hellen Centralfeld des Beugungsbildes wenigstens noch das nächste Lichtmaximum im Beugungsbilde zur Wirkung gelangen kann. Dann ist die Lichtvertheilung in der Ebene $\mathfrak{P}'$ nicht mehr gleichmässig, d. h. es tritt in ihr ein gewisses Bild zu Tage, welches in einer ersten rohen Annäherung dem Objecte ähnlich ist. Je mehr Lichtmaxima des Beugungsbildes in den Tubus gelangen, d. h. je vollständiger das Beugungsbild des Objectes benutzt wird, um so ähnlicher wird das Mikroskopbild dem Objecte. Vollständige Aehnlichkeit kann aber nur erreicht werden, wenn alle vom Object ausgehenden Beugungsrichtungen, welche noch eine merkliche Lichtwirkung in der Brennebene $\mathfrak{F}'$ des Objectivs hervorrufen würden, vom Objectiv wirklich aufgenommen, d. h. nicht abgeblendet werden. Hieraus ergiebt sich die grosse Bedeutung einer hohen numerischen Apertur des Objectivs. Je grösser dieselbe ist, um so eher kann man noch bei feinen Structuren des Objectes eine annähernd ähnliche Abbildung

---

1) Durch geeignete Abblendung in der Ebene $\mathfrak{F}'$ kann man von verschiedenen Objecten gleiche Beugungsbilder zur Abbildung benutzen. Es entsteht dann auch stets das gleiche Bild in der Ebene $\mathfrak{P}'$, d. h. das Ocular sieht gleiche Bilder, obwohl die Objecte sehr verschieden sind. Ist z. B. das Object ein Gitter des Strichabstandes d und blendet man alle Beugungsbilder ungerader Ordnung ab, so macht das Object im Bilde den Eindruck, als ob das Object doppelt so feine Structur, d. h. den Strichabstand $d/2$ erhalten hätte. Vgl. hierüber Müller-Pouillet (Lummer), Optik, S. 713. — Die Firma C. Zeiss construirt Apparate zum experimentellen Nachweis dieser Thatsachen.

erzielen; wirkliche vollständige Aehnlichkeit ist allerdings principiell überhaupt nicht zu erwarten, wir sehen im Mikroskop stets nur das Detail eines Objectes bis zu einem gewissen Grade der Feinheit.

Um an einem Beispiele diese Ueberlegungen zu illustriren, wollen wir annehmen, das Object P sei ein Gitter des Strichabstandes d; es werde mit parallelem, senkrecht einfallendem Lichte beleuchtet. In der Beugungsrichtung $\sin\varphi = \lambda : d$ findet sich das dem Centralfeld zunächst benachbarte erste Lichtmaximum. Das reelle Bild dieses Lichtmaximums in der Brennebene $\mathfrak{F}'$ des Objectivs sei C_1 (vgl. Figur 75), während C_0 das Centralbild sei.

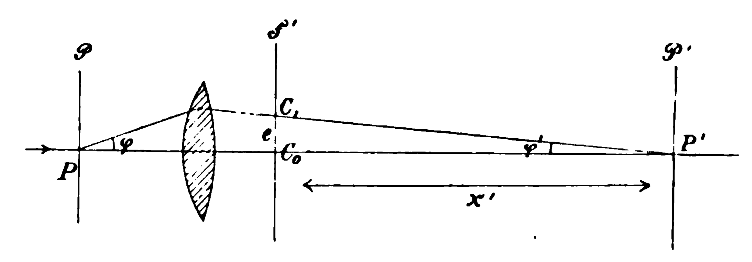


Fig. 75.

Der Abstand beider Bilder sei e. Diese beiden Bilder C_0 und C_1 haben nun annähernd gleiche Intensität und senden cohärente, d. h. interferenzfähige Wellen aus. Im Abstand x' hinter der Brennebene $\mathfrak{F}'$ entsteht daher nach S. 124 ein Fransensystem mit dem Fransenabstande $d' = x'\,\lambda : e$. Wenn nun das Objectiv aplanatisch ist, d. h. der sinus-Bedingung genügt (vgl. oben S. 55), so ist

$$\sin\varphi = \varepsilon \cdot \sin\varphi',$$

wobei ε eine Constante bedeutet. Setzt man nun $\sin\varphi' = e : x'$, was annähernd gestattet ist, da φ' stets klein ist (während φ gross sein kann), und berücksichtigt, dass $\sin\varphi = \lambda : d$ ist, so folgt

$$\frac{\lambda}{d} = \varepsilon\,\frac{e}{x'},$$

d. h. der Fransenabstand d' ergiebt sich zu

$$d' = \frac{x'\lambda}{e} = \varepsilon d,$$

d. h. der Fransenabstand ist proportional dem Strichabstand, ganz unabhängig von der Farbe des angewandten Lichtes. Die Struc-

tur d' des Mikroskopbildes ist also proportional der Structur d des Objectes.

Damit diese Structur noch wahrnehmbar sei, muss also das Objectiv mindestens noch einen Strahl der Richtung φ aufnehmen, für den $\sin \varphi = \lambda : d$ ist. Bei Immersionssystemen ist für λ die Wellenlänge des Lichtes in der Immersionsflüssigkeit zu setzen, d. h. $\lambda : n$, wenn λ die Wellenlänge in Luft und n den Brechungsindex der Immersionsflüssigkeit gegen Luft bedeutet. Daher wird dann

$$n \sin \varphi = \lambda : d \, .$$

Nun wird $n \sin U = a$ die numerische Apertur des Mikroskops [cf. oben S. 79, Formel (80)], falls U der Winkel ist, den der Randstrahl des Objectivs mit der Axe bildet. Daher ist die feinste Structur d, die das Mikroskop der numerischen Apentur a aufzulösen vermag:

$$d = \lambda : a \, . \tag{97}$$

Diese Formel gilt für senkrechte Beleuchtung des Objectes. Durch schiefe Beleuchtung kann man die Auflösungskraft noch steigern, weil, falls das Mittelfeld des Beugungsbildes nicht im Centrum liegt, sondern seitlich verschoben ist, schon bei einem kleineren Winkel gegen die Mikroskopaxe das erste Beugungsmaximum auftritt. Am günstigsten muss es sein, wenn das einfallende Licht und das dem ersten Maximum entsprechende gebeugte Licht gleiche Winkel mit der Mikroskopaxe machen und vom Objectiv gerade noch aufgenommen werden.

Machen das einfallende Licht und das gebeugte Licht gleiche Winkel U mit der Normale gegen das Beugungsgitter, so ist nach (71) S. 198 zu setzen $\mu = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 \sin U$. Da ferner nach (86) (S. 206) das erste Beugungsmaximum auftritt bei $\mu = \frac{2\pi}{d}$, so wird in diesem Falle

$$\sin U = \frac{\lambda}{2d} \, .$$

Die kleinste Distanz d, welche das Mikroskopobjectiv daher noch aufzulösen vermag bei geeigneter schiefer Beleuchtung, ist

$$d = \frac{\lambda}{2a} \, , \tag{98}$$

wobei a die numerische Apertur des Mikroskopes, λ die Wellen-

länge des Lichtes in Luft bedeutet. Dieses ist die oben S. 85 angegebene Formel für die Leistungsgrenze des Mikroskops.

Um die Lichtmenge im Mikroskop zu vergrössern, beleuchtet man (mit Hülfe des Abbe'schen Kondensor, cf. oben S. 95) das Object mit stark convergentem Licht. Die soeben angestellten Betrachtungen gelten dann für jede einzelne Richtung der einfallenden Lichtstrahlen; nur diejenigen Richtungen derselben tragen wirklich zur Auflösung des Objectes bei, für welche ausser dem direkten Bild mindestens noch das erste Maximum des Beugungsbildes zur Wirkung kommt. Die den verschiedenen Richtungen des einfallenden Lichtes entsprechenden Beugungsmaxima liegen an verschiedenen Stellen der Brennebene des Objectivs, sie beeinflussen sich gegenseitig aber durchaus nicht, da sie incohärenten, d. h. nicht interferenzfähigen Strahlen entsprechen; denn die verschiedenen Richtungen des einfallenden Lichtes kommen von verschiedenen Punkten der Lichtquelle, z. B. des hellen Himmels.

Wenn wir an Stelle des Gitters nur einen Spalt der Breite d als Object hätten, so würde solange überhaupt keine Structur zu erkennen sein, als das Beugungsbild nicht mindestens über das erste Minimum hinaus zur Wirkung gelangt. Da dieses erste Minimum bei senkrecht einfallendem Licht nach Formel (79) auf S. 202 bei dem Beugungswinkel $\sin\varphi = \frac{\lambda}{d}$ [1] eintritt, so kommt man auf dieselben Resultate, wie beim Gitter. Nur wird hier eine wirklich ähnliche Abbildung des Spaltes, d. h. eine richtige Erkennung der Spaltbreite, noch durchaus nicht erreicht, wenn das Beugungsbild nur bis etwas über das erste Minimum hinaus zur Wirkung gelangt.

Verzichtet man auf eine nur annähernd ähnliche Abbildung des Objectes, sondern will man nur die Existenz eines kleinen undurchsichtigen Körpers nachweisen, so können dessen Dimensionen ziemlich weit unter die hier ermittelte Leistungsgrenze d des Mikroskops heruntergehen; sowie nämlich das vom Object entworfene Beugungsbild die gleichmässige Lichtvertheilung in der zum Object gehörenden Bildebene merklich stört, wird die Existenz des Objectes wahrnehmbar.

Aus den angestellten Betrachtungen geht hervor, dass die Leistungsgrenze d um so höher ist, je kleiner die Wellenlänge des

1) Dort ist a für d geschrieben.

angewandten Lichtes ist. Daher ist Mikrophotographie mit ultraviolettem Lichte günstig, jedoch ist die hierdurch herbeigeführte Steigerung der Leistung nicht sehr bedeutend. Dagegen tritt die bessere Wirkung der Immersionssysteme deutlich hierdurch zu Tage, da man durch hohe Brechungsindices der Immersionsflüssigkeit die Wellenlänge des Lichtes bedeutend verkleinern kann. Dies ergeben auch die Formeln (97) und (98), da die numerische Apertur a proportional zum Brechungsindex der Immersion wächst.

Kapitel V.

Polarisation.

1. Polarisation durch Doppelbrechung. Man nennt einen Lichtstrahl polarisirt, wenn er sich nicht rings um seine Fortpflanzungsrichtung gleichmässig verhält. Man kann dies daran erkennen, dass eine Drehung des Lichtstrahles um die Richtung der Fortpflanzung als Axe eine Aenderung in den beobachteten Lichterscheinungen hervorruft. Eine solche ist zuerst von Huygens[1]) beim Durchgang des Lichtes durch Kalkspath beobachtet worden. — Polarisation ist stets vorhanden, wenn Doppelbrechung eintritt. Die Krystalle, welche nicht dem regulären System angehören, zeigen im Allgemeinen stets Doppelbrechung, d. h. ein einfallender Lichtstrahl wird im Krystall in zwei Strahlen verschiedener Richtung gespalten.

Besonders bequem ist die Erscheinung am Kalkspath (isländischen Doppelspath) zu beobachten, welcher dem hexagonalen Krystallsystem angehört und in ausgezeichneter Weise nach den drei Flächen eines Rhomboeders spaltet. In sechs Ecken desselben stossen je drei Kanten zusammen, welche einen stumpfen und zwei

1) Huygens, Traité de la lumière, Leyden, 1690.

spitze Winkel bilden. Aber in zwei gegenüber liegenden Ecken A, A' (vgl. Figur 76) stossen drei gleich grosse stumpfe Winkel zusammen von $101^{0}53'$. Ziehen wir durch die stumpfe Ecke A eine Linie, die mit den drei in ihr zusammen stossenden Kanten gleiche Winkel einschliesst, so ist dies die Richtung der krystallographischen Hauptaxe.[1]) Stellen wir uns durch Spaltung ein Rhomboeder von überall gleichen Kantenlängen her, so verbindet die Hauptaxe die beiden stumpfen Ecken A, A'. Auf diesen Fall bezieht sich die Figur.

Lässt man nun auf die obere Fläche des Rhomboeders senkrecht einen Lichtstrahl LL einfallen, so spaltet er sich in zwei Strahlen gleicher Intensität LO und LE, welche als Parallelstrahlen OL' und EL'' senkrecht aus der unteren Rhomboederfläche wieder austreten. Dabei ist LO die directe Fortsetzung des einfallenden Strahles, dieser Strahl entspricht also dem gewöhnlichen Verhalten isotroper Körper, da keine Richtungsänderung bei normaler Incidenz eintritt; dieser Strahl LO und seine Fortsetzung $L'O$ wird daher der ordentliche oder ordinäre Strahl genannt. Der zweite Strahl dagegen LE und seine Fortsetzung $L''E$, der ein vom isotropen (nicht krystallinischen) Körper wesentlich abweichendes Verhalten zeigt, heisst ausserordentlicher oder extraordinärer Strahl. Die Ebene, welche durch beide Strahlen geht, enthält auch die Richtung der krystallographischen Hauptaxe. Die durch diese Axe und das Einfallslot gelegte Ebene wird Hauptschnitt genannt. Der ausserordentliche Strahl liegt also im Hauptschnitt, er dreht sich daher, wenn man das Rhomboeder um die Axe LL dreht, um den ordentlichen Strahl herum.

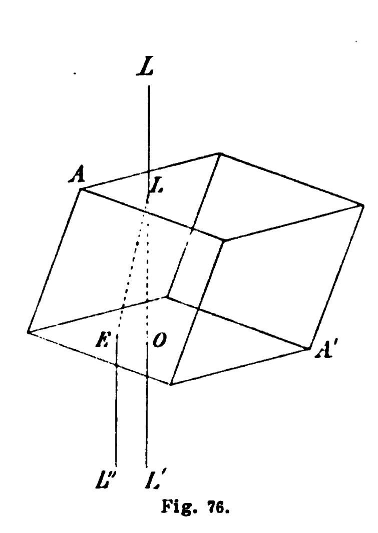


Fig. 76.

Die Intensitäten des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles

1) Die Hauptaxe wird, gerade z. B. wie das Einfallslot, immer nur als Richtung, die man beliebig parallel mit sich verschieben kann, definirt, sodass sie keine bestimmte einzelne Linie ist.

sind gleich, blendet man aber einen dieser Strahlen, z. B. den ausserordentlichen, ab und lässt den ordentlichen Strahl auf ein zweites Kalkspathrhomboeder fallen, so wird er wiederum im Allgemeinen in zwei Strahlen zerlegt, welche nun aber im Allgemeinen verschiedene Intensität besitzen. Diese Intensitäten hängen von der Orientirung der beiden Kalkspathrhomboeder gegeneinander ab, nämlich von dem Winkel, den ihre Hauptschnitte mit einander machen. Ist derselbe Null oder 180°, so entsteht im zweiten Rhomboeder nur ein ordinärer Strahl und gar kein extraordinärer; ist der Winkel der Hauptschnitte dagegen 90°, so entsteht nur ein extraordinärer Strahl; zwei gleich intensive Strahlen entstehen, wenn die Hauptschnitte einen Winkel von 45° mit einander bilden. Die Erscheinungen wechseln also, wenn man das zweite Rhomboeder festhält und das erste dreht, d. h. den ordinären Strahl um seine Richtung als Axe herumdreht. Daher wird der Strahl polarisirt genannt. — Dieselben Experimente kann man mit dem extraordinären Strahl anstellen, d. h. auch er ist polarisirt. Da man mit Hülfe des extraordinären Strahles dieselben Lichterscheinungen im zweiten Rhomboeder hervorrufen kann, wie mit Hülfe des ordinären Strahles, falls man das erste Rhomboeder um 90° um das Einfallslot dreht, so nennt man zweckmässig den ordentlichen und ausserordentlichen Strahl senkrecht zu einander polarisirt.

Auch bei allen anderen doppelbrechenden Krystallen sind die beiden Strahlen senkrecht zu einander polarisirt.

Will man die Richtungsunterschiede der Polarisation der beiden Strahlen des Kalkspaths auf eine feste Ebene beziehen, so wählt man dazu am zweckmässigsten den Hauptschnitt. Da die vorhin betrachteten Lichterscheinungen bei zwei Kalkspathrhomboedern nur von der absoluten Grösse des Winkels ihrer Hauptschnitte abhängen, nicht vom Vorzeichen dieses Winkels, so müssen die Eigenschaften des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles symmetrisch zum Hauptschnitt beschaffen sein.

Man nennt den Hauptschnitt die Polarisationsebene des ordentlichen Strahles, eine Ausdrucksweise, mit der vorläufig weiter Nichts gesagt ist, als dass dieser Strahl rings um seine Fortpflanzungsrichtung herum sich nicht gleichmässig verhält, dass aber die nach verschiedenen Richtungen stattfindenden Verschiedenheiten symmetrisch zu seiner Polarisationsebene, dem Hauptschnitt, liegen.

Da, wie wir oben sahen, der ausserordentliche Strahl rechtwinklig zum ordentlichen polarisirt ist, so muss man consequenter Weise die zum Hauptschnitt senkrechte Ebene die Polarisationsebene des ausserordentlichen Strahles nennen. Man drückt diese Bezeichnung auch in der Form aus, dass man sagt: Der ordentliche Strahl ist im Hauptschnitt, der ausserordentliche senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt.

2. Das Nicol'sche Prisma. Um einheitlich polarisirtes Licht zu erhalten, muss der eine der beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen abgeblendet oder entfernt werden. Zu dem Zweck gab Nicol im Jahre 1828 folgende Construction an: Man stellt sich durch Spaltung ein Kalkspathrhomboeder her, welches reichlich dreimal so lang als breit ist, schleift die Endflächen, deren Neigungswinkel gegen die Seitenkanten ursprünglich 72° beträgt, so ab, dass dieser Winkel (∢ ABA' in Figur 77) 68° gross wird, und führt durch die Ecken AA' des Prismas einen Schnitt so, dass er senkrecht zu den Endflächen und der Ebene, welche die Längsaxe und krystallographische Hauptaxe verbindet, steht. An diesem Schnitt werden die beiden Prismenhälften mit Canadabalsam wieder zusammengekittet. Dieser Balsam besitzt einen Brechungsindex, der kleiner als der des ordentlichen, aber grösser als der des ausserordentlichen Strahles ist. Wenn nun ein Lichtstrahl LL parallel zur Längsaxe eintritt, so wird der ordentliche Strahl LO an der Canadabalsamschicht total reflectirt und an der geschwärzten Seitenfläche BA' absorbirt, während der ausserordentliche Strahl LE allein das Prisma durchsetzt. Das austretende Licht EL'' ist also vollständig senkrecht zum Hauptschnitt, d. h. parallel zur langen Diagonale der Grenzflächen AB oder $A'B'$, polarisirt.

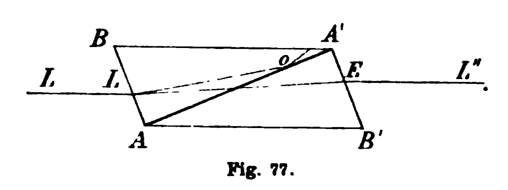


Fig. 77.

Der Oeffnungswinkel des in das Prisma eintretenden Lichtkegels, dessen ordinäre Strahlen noch total reflectirt werden, beträgt etwa 30°. Uebrigens ist ein convergent eintretendes Lichtbündel nicht mehr streng einheitlich polarisirt, indem die Polarisationsebene etwas mit der Neigung der Lichtstrahlen variirt, da die Polarisationsebene stets senkrecht steht zum Hauptschnitt, d. h. zur Ebene durch Strahl und Hauptaxe.

3. Andere Herstellung polarisirten Lichtes. Abgesehen von anderen Constructionen von sogenannten Polarisationsprismen [1]) kann man auch durch eine Turmalinplatte einerlei polarisirtes Licht erhalten, falls die Platte der Hauptaxe des Krystalls parallel geschliffen ist und etwa 1—2 mm dick ist. In diesem Falle wird nämlich der ordentliche Strahl durch Absorption im Krystall vernichtet. Ferner kann man polarisirtes Licht durch Reflexion an irgend einem durchsichtigen Körper erhalten, falls man den Reflexionswinkel φ nach dem (Brewster'schen) Gesetz wählt: $tg\,\varphi = n$, wobei n der Brechungsindex des Körpers ist. Dieser Winkel φ heisst der Polarisationswinkel. Bei Crownglas beträgt dieser Reflexions- (oder Einfalls-)Winkel etwa 57°. Die Einfallsebene ist die Polarisationsebene des reflectirten Lichtes, wie man erkennen kann, falls man das reflectirte Licht durch ein Kalkspathbruchstück gehen lässt.

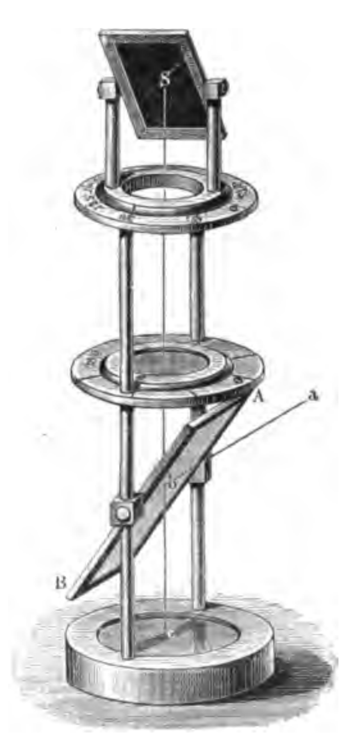


Fig. 78.

Lässt man das unter dem Polarisationswinkel von einer Glasfläche reflectirte Licht von einer zweiten Glasfläche unter demselben Winkel reflectiren, so hängt die schliessliche Intensität vom Neigungswinkel α der beiden Einfallsebenen der zwei Glasflächen ab, indem sie proportional zu $cos^2\alpha$ ist. Man kann dies bequem am Nörrenberg'schen Polarisationsapparate studieren. Der Lichtstrahl a wird durch Reflexion an der Glasplatte A polarisirt und gelangt unter senkrechter Incidenz bei c zu einem belegten Glasspiegel. Derselbe reflectirt den Strahl nach dem hinten geschwärzten Glasspiegel S, welcher um eine verticale Axe drehbar ist. Auch S wird unter dem Polarisationswinkel vom

1) Man vgl. hierüber W. Grosse, Die gebräuchlichen Polarisationsprismen etc. Klausthal 1889. — Winkelmann's Handb. d. Physik, Optik, S. 629—631.

Strahl *bc* getroffen, der an *S* schräg nach oben reflectirte Strahl nimmt also wechselnde Intensitäten an bei Drehung von *S* um die verticale Axe. Zwischen *A* und *S* ist eine drehbare Glasplatte eingeschaltet, um bequem durchsichtige Objecte bei verschiedener Orientirung im polarisirten Lichte untersuchen zu können. Da die Intensität des Lichtes aber schon nach einmaliger Reflexion verhältnissmässig gering ist, so wendet man praktisch dies Mittel, polarisirtes Licht durch Reflexion herzustellen, nicht häufig an; an demselben Uebelstand zu kleiner Intensität (und noch dazu vorhandener Färbung) leidet die Turmalinplatte.

Auch bei schiefem Durchgang des Lichtes durch einen Satz paralleler Glasplatten tritt Polarisation ein, allerdings keine vollständige. Dieser Fall wird in einem späteren Kapitel behandelt werden (II. Abschn. Kap. II). — Dass durch Beugung Polarisation hervorgebracht wird, ist schon oben S. 196 angedeutet.

4. Interferenz polarisirten Lichtes. Die früher beschriebenen Interferenz-Erscheinungen lassen sich unverändert mit einheitlich polarisirtem Lichte anstellen. Dagegen interferiren zwei rechtwinklig zu einander polarisirte Strahlen niemals. Man kann dies konstatiren, wenn man vor die beiden Oeffnungen eines Doppelspaltes je eine von zwei gleich dicken Turmalinplatten schaltet. Die Beugungsfransen, welche durch die Anwesenheit der zwei Spalten entstehen, sind bei parallel orientirten Turmalinplatten vorhanden, bei senkrecht gegen einander gekreuzten Platten verschwinden sie dagegen vollkommen.

Fresnel und Arago untersuchten weiterhin die Interferenzfähigkeit zweier rechtwinklig zu einander polarisirter Strahlen, welche sie auf dieselbe Polarisationsebene zurückführten, indem sie dieselbe durch einen Kalkspath treten liessen, dessen Hauptschnitt um 45° gegen jede der Polarisationsebenen der beiden Strahlen geneigt war. Sie fanden die Gesetze:

1. Zwei von einem natürlichen (unpolarisirten) Strahle herrührende rechtwinklig polarisirte Strahlen interferiren auch dann nicht, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden.

2. Zwei von einem polarisirten Strahle herrührende rechtwinklig polarisirte Strahlen interferiren, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden.

5. Die mathematische Darstellung der Lichterregung in polarisirtem Licht. Wir haben früher gesehen, dass die Erscheinungen der Interferenz zu der Wellentheorie des Lichtes führen,

nach der an einer bestimmten Stelle des Raumes die Lichterregung in der Form zu schreiben ist:

$$s = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right). \tag{1}$$

Wir können jetzt noch nähere Aussagen über die Eigenschaften dieser Lichterregung machen. Dieselbe muss nämlich im polarisirten Lichte offenbar eine gerichtete Grösse, ein sogenannter Vector sein, wie z. B. eine Strecke, eine Geschwindigkeit, eine Kraft etc. Vectoren sind, im Gegensatz zu einer ungerichteten Grösse, einem sogenannten Scalar, wie z. B. der Dichte, der Temperatur. Denn sonst konnten keine seitlichen Verschiedenheiten vorhanden sein, wie sie im polarisirten Lichte auftreten. Um diese darzustellen, muss s ein Vector sein, der jedenfalls nicht vollständig mit der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes zusammenfällt, da sonst auch keine seitlichen Verschiedenheiten eintreten könnten. Wir wollen daher s jetzt kurz als Lichtvector bezeichnen. Einen Vector kann man nach den drei rechtwinkligen Axen x, y, z in drei Komponenten zerlegen, wir wollen die Komponenten von s nennen u, v, w. Die allgemeinste Lichtbewegung, welche in einem beliebigen Punkte P bestehen kann, wird daher dargestellt durch:

$$\begin{gathered} u = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p\right), \; v = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + q\right), \\ w = C \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + r\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Man erhält eine anschauliche Bedeutung dieser Gleichungen, wenn man vom Coordinatenanfang aus zu jeder Zeit den resultirenden Lichtvector s nach Grösse und Richtung durch eine Strecke einträgt. Der Endpunkt $\mathfrak{E}$ dieser Strecke wird erhalten, wenn man u, v, w als seine rechtwinkligen Coordinaten auffasst. Dieser Endpunkt $\mathfrak{E}$ beschreibt im Laufe der Zeit eine gewisse Bahn (wir wollen sie Erregungsbahn nennen), die aus den Gleichungen (2) durch Elimentation von t erhalten wird. Man kann (2) schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{u}{A} &= \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos p + \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin p, \\ \frac{v}{B} &= \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos q + \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin q, \\ \frac{w}{C} &= \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos r + \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin r. \end{aligned} \tag{3}$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen mit bezw. $\sin(q - r)$, $\sin(r - p)$, $\sin(p - q)$ und Addition erhält man:

$$(4)\qquad \frac{u}{A}\sin(q - r) + \frac{v}{B}\sin(r - p) + \frac{w}{C}\sin(p - q) = 0,$$

d. h. da eine lineare Gleichung zwischen den u, v, w besteht, so ist die Erregungsbahn stets eine ebene Curve.

Die Gleichungen ihrer Projectionen auf die Coordinatenebenen erhält man durch Elimination von t aus je zweien der Gleichungen (3). So folgt z. B. aus den beiden ersten dieser Gleichungen:

$$\sin 2\pi \frac{t}{T}(\cos p \sin q - \cos q \sin p) = \frac{u}{A}\sin q - \frac{v}{B}\sin p,$$

$$\cos 2\pi \frac{t}{T}(\cos p \sin q - \cos q \sin p) = -\frac{u}{A}\cos q + \frac{v}{B}\cos p,$$

d. h. durch Quadriren und Addiren dieser beiden Gleichungen:

$$(5)\qquad \sin^2(p - q) = \frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} - \frac{2uv}{AB}\cos(p - q).$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ellipse, deren Hauptaxen in die Coordinatenrichtungen fallen, wenn $p - q = \pi/2$ ist. Im allgemeinsten Falle ist daher die Erregungsbahn eine ebene, elliptische Curve. Man hat dann sogenanntes elliptisch polarisirtes Licht. Wenn die Bahnellipse zu einem Kreise wird, so hat man circular-polarisirtes Licht. Dies tritt z. B. ein, wenn $w = o$ wäre, und $A = B$, $p - q = \pm \pi/2$, sodass entweder der Ansatz:

$$(6)\qquad u = A \sin 2\pi \frac{t}{T},\ v = A \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

oder der Ansatz:

$$(6')\qquad u = A \sin 2\pi \frac{t}{T},\ v = -A \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

besteht. Man unterscheidet diese beiden Ansätze als rechts- und links-circular polarisirtes Licht. Wenn nämlich der Endpunkt $\mathfrak{E}$ des Lichtvectors im Sinne des Uhrzeigers rotirt, falls man dem Strahl entgegen sieht, so hat man rechts-circular polarisirtes Licht.

Wenn die Bahnellipse zu einer geraden Linie degenerirt, so hat man geradlinig-polarisirtes Licht. Dies tritt z. B. ein, wenn $w = o$ wäre, und $p - q = o$, oder $= \pi$ wäre. Die Bahnlinie wäre dann nach (5):

$$(7)\qquad \frac{u}{A} \pm \frac{v}{B} = o.$$

Die Intensität der Lichterregung haben wir früher proportional dem Quadrat A der Amplitude des Lichtvectors gesetzt. Diesen

Standpunkt müssen wir auch jetzt festhalten und berücksichtigen, dass das Quadrat der Amplitude durch die Summe der Quadrate der Amplituden der drei Componenten gegeben ist. Die Lichtintensität J ist also, bei Annahme der Gleichungen (2):

$$J \sim A^2 + B^2 + C^2. \tag{8}$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Erregungsbahn beschaffen ist bei den in früheren Paragraphen schlechthin als polarisirtes Licht bezeichneten Fällen, die bei Doppelbrechung und Reflexion unter dem Polarisationswinkel vorliegen. Das Hauptcharakteristische ist, dass zwei rechtwinklig zu einander polarisirte Strahlen nie interferiren, sondern stets die Summe der Einzelintensitäten ergeben.

Superponiren wir nun zu dem Strahl (2), dessen Fortpflanzungsrichtung die z-Axe sein soll, einen rechtwinklig polarisirten Strahl gleicher Intensität, dessen Componenten u', v', w' seien und der eine beliebige Phasenänderung δ gegen den Strahl (2) besitzen kann, so müssen wir schreiben:

$$\begin{gathered} u' = B \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + q + \delta\right),\quad v' = -A \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + p + \delta\right), \\ w' = C \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + r + \delta\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Denn abgesehen von der Phasenänderung δ muss die Gleichung dieses Strahles in die Gleichungen (2) übergehen, wenn man das Coordinatensystem um 90° um die z-Axe drehen würde.

Durch Superposition beider Strahlen (2) und (9), d. h. durch Bildung von $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$ erhält man nach der Regel oben auf S. 123 [dortige Formel (11)] die Amplitudenquadrate der drei Componenten:

$$\begin{aligned} A'^2 &= A^2 + B^2 + 2AB \cos(\delta + q - p), \\ B'^2 &= A^2 + B^2 - 2AB \cos(\delta + p - q), \\ C'^2 &= 2C^2 (1 + \cos\delta). \end{aligned}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen folgt unter Rücksicht auf (8) für die resultirende Intensität J':

$$J' = 2J + 2C^2 \cos\delta - 4AB \sin\delta \sin(q - p).$$

Da nun J' nach der Beobachtung einfach gleich der doppelten Intensität der Einzelstrahlen ist, d. h. ganz unabhängig von δ beobachtet wird, so folgt $C = o$, d. h. der Lichtvector liegt senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung (Transversal-Wellen), ferner folgt $\sin(q - p) = o$, d. h. nach (5) bezw. (7) ist die Erregungsbahn eine gerade Linie.

Die durch Doppelbrechung (und Reflexion unter dem Polarisationswinkel) entstehenden Strahlen sind also geradlinig polarisirte, transversale Wellen.

Da wir S. 225 sahen, dass die Eigenschaften des polarisirten Strahles symmetrisch in Bezug auf seine Polarisationsebene sein müssen, so liegt der Lichtvector entweder in der Polarisationsebene oder senkrecht zu ihr. Auf diese Frage wird nun ein Licht geworfen durch folgende Versuchsanordnung:

6. Stehende Wellen durch schief einfallendes polarisirtes Licht. Als Wiener mit polarisirtem Licht, welches unter 45° auf den Spiegel fiel, die Bildung stehender Wellen untersuchte (cf. oben S. 145), erhielt er dieselben dann sehr deutlich, wenn die Polarisationsebene mit der Einfallsebene des Spiegels zusammen fiel. Dagegen verschwand die Bildung stehender Wellen vollkommen, wenn die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes senkrecht zur Einfallsebene stand. Man muss daraus schliessen, dass der für die photographische Wirkung[1]) massgebende Lichtvector senkrecht zur Polarisationsebene liegt, denn stehende Wellen können sich nur bilden, wenn die Lichtvectoren der einfallenden und reflectirten Welle einander parallel sind; sind sie aber senkrecht zu einander, so hört jede Andeutung von Interferenz auf.

Wir werden nun allerdings auf Grund der elektromagnetischen Lichttheorie zu der Anschauung gelangen, dass die oben aufgeworfene Frage keinen Sinn hat, wenn man nur von der Richtung des Lichtvectors schlechthin spricht. Denn es treten in jener Theorie (und auch in jeder anderen) stets zwei Vectoren nothwendig mit einander verknüpft auf, welche senkrecht gegen einander stehen (elektrische und magnetische Kraft). Man kann aber wohl danach fragen, welcher dieser beiden Vectoren für eine bestimmte Lichterscheinung massgebend ist, oder ob das eventuell beide Vectoren sind. Wäre dies z. B. bei der photographischen (photochemischen) Wirkung der Fall, so könnte man nach dem Wiener'schen Verfahren auch bei senkrechter Incidenz überhaupt keine stehenden Wellen nachweisen, da die Bäuche und Knoten für jeden der beiden Vectoren gerade abwechselnd liegen, d. h. die Knoten des einen Vectors auf den Bäuchen des anderen und umgekehrt. Es folgt dies aus der später zu entwickelnden, vertieften

1) Dasselbe gilt für die Fluorescenzwirkung stehender Wellen. Vgl. oben S. 146, Anm. 1.

Theorie des Lichtes. Dass aber thatsächlich stehende Wellen zu beobachten sind, zeigt, dass für die photochemische und ebenso für die Fluorescenzwirkung thatsächlich nur der eine Lichtvector massgebend ist, und zwar, wie aus dem erwähnten Versuche mit polarisirtem Lichte hervorgeht, derjenige, welcher senkrecht zur Polarisationsebene liegt.

Auch die Erscheinungen in pleochroitischen Krystallen, wie z. B. im Turmalin, knüpfen am besten an diesen Lichtvector an.

7. Lage des massgebenden Lichtvectors in Krystallen. In Krystallen ist die Lichtgeschwindigkeit von der Lage der Wellennormale und der Polarisationsebene abhängig. Ebenso ist in den sogenannten pleochroitischen Krystallen (Turmalin z. B.) die Absorption des Lichtes von der Lage der Wellennormale und der Polarisationsebene abhängig. Es stellt sich nun heraus[1]: dass man zur einfachsten Beschreibung dieser Erscheinungen gelangt, wenn man den Lichtvector als senkrecht gegen die Polarisationsebene liegend annimmt. Dann ist nämlich Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption[2] einer Welle nur abhängig von der Lage des Lichtvectors gegen die Krystallaxen. — Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel: Eine parallel zur Hauptaxe geschnittene Turmalinplatte ändert ihre Helligkeit und Farbe nicht, wenn man die Platte um ihre Hauptaxe dreht, d. h. das Licht schief hindurchgehen lässt derart, dass die Hauptaxe senkrecht zum Lichtstrahl bleibt. Dagegen ändert sich die Helligkeit der Platte bedeutend, wenn man sie um die, zur Hauptaxe senkrechte Axe dreht, welche in der Platte liegt. Die Polarisationsebene des austretenden Strahles liegt im ersten Falle senkrecht zur Hauptaxe, d. h. der Drehungsaxe der Platte, im zweiten Falle parallel zur Drehungsaxe derselben. Der senkrecht zur Polarisationsebene liegende Vector ist daher im ersten Falle beständig parallel zur Hauptaxe des Turmalins, im zweiten Falle ändert er aber seine Lage gegen die Hauptaxe des Turmalins.

Man kennt bisher noch keinen Fall, für welchen ein Lichtvector allein massgebend[3] wäre, der in der Polarisationsebene liegt.

1) Dies ist weiter unten im II. Abschnitt, Kap. III, § 7 näher ausgeführt.

2) Auch die Fluorescenzerscheinungen in Krystallen führen auf diesen Schluss (vgl. Lommel, Wied. Ann. 44, S. 311).

3) Massgebend soll heissen: zur einfachsten Beschreibung der Erscheinungen dienend.

Insofern kann man daher kurz sagen: Der Lichtvector liegt senkrecht zur Polarisationsebene.[1])

8. Das natürliche und theilweise polarisirte Licht. Dass man durch Doppelbrechung aus einem natürlichen Lichtstrahl zwei geradlinig polarisirte erhält, ist oben abgeleitet. Durch Superposition zweier geradlinig poarisirten Strahlen gleicher Fortpflanzungsrichtung, aber verschiedener Polarisationsrichtung und verschiedener Phase erhält man, wie z.B. aus Gleichung (5) hervorgeht, elliptisch polarisirtes Licht. Dasselbe ist noch rein transversal, da die Ebene der Ellipse senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung liegt.

Wie wir später ausführlicher betrachten werden, erhält man bei Durchgang eines geradlinig polarisirten Strahles durch eine doppelbrechende Krystallplatte elliptisch polarisirtes Licht, wenn man nicht die Wirkung der beiden durch Doppelbrechung im Krystall entstehenden Strahlen von einander trennt. — Aber auch den durch die Gleichungen (2) dargestellten allgemeinsten Fall nicht transversalen, elliptisch-polarisirten Lichtes kann man durch Totalreflexion, oder in absorbirenden Körpern realisiren, wie weiter unten ausgeführt werden wird.

Es drängt sich nun aber noch die Frage auf: Wie ist das natürliche Licht beschaffen? Da dasselbe keine seitliche Verschiedenheit zeigt und andererseits auch circular polarisirtes Licht durchaus nicht identisch ist mit natürlichem Licht, da ersteres bei Durchgang durch eine doppelbrechende Krystallplatte sofort seitliche Verschiedenheiten annimmt, das natürliche Licht aber nicht (wenn man nicht die beiden durch Doppelbrechung entstandenen Strahlen von einander trennt), so bleibt nur die Annahme übrig, dass für ein gewisses Zeitintervall δt auch das natürliche Licht geradlinig, oder elliptisch polarisirt ist, dass aber im Laufe längerer Zeit die Erregungsbahn ihre Lage und Gestalt derartig wechselt, dass im Mittel der Lichtstrahl vollkommen symmetrisch rings um seine Fortpflanzungsrichtung herum beschaffen ist.

Da Michelson im natürlichen Lichte noch Interferenzen von 540000 λ Gangunterschied beobachtet hat (vgl. oben S. 141), so muss also in diesem Falle das Licht mindestens 540000 Schwingungen ausführen, bevor es seinen Polarisationszustand wechseln kann. Da aber selbst 1 Million Schwingungen in einer sehr kurzen

1) Man gewinnt wenigstens durch diese Annahme eine einfachere Darstellung der optischen Erscheinungen, als wenn man die (auch mögliche) Annahme macht, dass der Lichtvector parallel zur Polarisationsebene liegt.

Zeit, nämlich in $20 \cdot 10^{-10}$ sec. ausgeführt werden, so könnte das menschliche Auge doch nie, selbst für eine kurze Zeit, eine Polarisation des natürlichen Lichtes wahrnehmen, auch wenn der Schwingungszustand erst allemal nach mehreren Millionen Schwingungen wechseln sollte. Denn für die kürzesten Lichteindrücke, die man herstellen kann, hätte der Schwingungszustand doch schon viele tausend mal gewechselt.

Betrachten wir nun die beiden von Fresnel und Arago ausgesprochenen und auf S. 228 angeführten Interferenzgesetze, so ist das zweite Gesetz, dass zwei rechtwinklig polarisirte Strahlen interferiren, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden und ursprünglich aus einem polarisirten Strahle entstanden sind, sofort einleuchtend, denn man geht dabei von einer bestimmten Erregungsbahn aus und lässt schliesslich wiederum nur einheitlich polarisirtes Licht interferiren. Derselbe Fall muss eintreten, wenn man von einem natürlichen Lichtstrahl zwei rechtwinklig polarisirte ableitet und sie dann auf dieselbe Polarisationsebene bringt, so lange der Schwingungszustand im natürlichen Licht nicht gewechselt hat, d. h. innerhalb des obigen Zeitintervalls δt. Auch für ein anderes Zeitintervall $\delta t'$ müssen Interferenzfransen aus dem natürlichen Lichte in jenem Falle zu erhalten sein, sie liegen aber nicht an derselben Stelle, an welcher die Fransen für das erste Intervall δt lagen. Denn ein Wechsel der Erregungsbahn hat den Effect, dass die beiden abgeleiteten, rechtwinklig zu einander polarisirten Strahlen eine Phasendifferenz erhalten. Daher entsteht als Mittelwerth über viele Zeitintervalle δt nur eine gleichmässige Lichtintensität, d. h. zwei von einem natürlichen Lichtstrahl herrührende rechtwinklig polarisirte Strahlen interferiren nicht, auch wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden. Das ist das erste der oben genannten Fresnel-Arago'schen Gesetze.

Unter theilweise polarisirtem Licht versteht man solches, welches durch Superposition von natürlichem und einheitlich polarisirtem entsteht. Theilweise polarisirtes Licht besitzt seitliche Verschiedenheiten, doch kann man nie aus ihm geradlinig polarisirtes Licht herstellen, was sonst bei einheitlich polarisirtem Licht stets möglich ist, wie im Folgenden auseinandergesetzt wird.

9. Experimentelle Untersuchung elliptisch polarisirten Lichtes. Um die Gestalt der Erregungsbahn von elliptisch polarisirtem Lichte zu finden, verwandelt man dasselbe mit Hülfe einer doppelbrechenden Krystallplatte in geradlinig polarisirtes Licht.

Wie schon oben S. 223 besprochen wurde, wird nämlich geradlinig polarisirtes Licht beim Durchgang durch eine doppelbrechende Krystallplatte in zwei senkrecht zu einander polarisirte Wellen zerlegt. Die Lage der Lichtvectoren in beiden Wellen wollen wir als Hauptschwingungsrichtungen bezeichnen. Dieselben haben eine feste Lage in der Krystallplatte (und sind senkrecht zu einander). Da nun beide Wellen im Krystall sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen, so ertheilt die Krystallplatte beiden Wellen eine relative Phasendifferenz, die von der Natur und Dicke der Platte abhängt. — Ein einfallender Lichtvector, welcher schon in einer der beiden Hauptschwingungsrichtungen der Krystallplatte liegt, wird nicht durch dieselbe in zwei Wellen zerlegt.

Man kann nun auf zwei verschiedenen Wegen vorgehen: Entweder benutzt man eine Krystallplatte bestimmter Dicke, welche den beiden in ihr fortgepflanzten Wellen eine Phasendifferenz $\pi/2$ (Gangunterschied $\frac{1}{4}\lambda$) ertheilt (z. B. $\frac{1}{4}\lambda$-Glimmer-Plättchen, Senarmont's Compensator). Wird diese Krystallplatte so gedreht, dass ihre Hauptschwingungsrichtungen mit den Hauptaxen der elliptischen Erregungsbahn des einfallenden Lichtes zusammen fallen, so muss offenbar das austretende Licht geradlinig polarisirt sein und zwar hängt die Lage der Polarisationsebene vom Verhältniss der Hauptaxen der einfallenden Erregungs-Ellipse ab. Denn die beiden in der Richtung der Hauptaxen dieser Ellipse liegenden Lichtvectoren haben nach dem Durchgang durch die Krystallplatte die Phasendifferenz o oder π, und dann entsteht nach S. 230 geradlinig-polarisirtes Licht, bei dem die Lage des Lichtvectors aus der dortigen Formel (7) folgt. Betrachtet man daher das austretende Licht noch durch ein drehbares Nicol, so tritt völlige Dunkelheit bei geeigneter Stellung desselben ein. Zur Untersuchung muss man daher sowohl die Krystallplatte (um ihre Normale), als das Nicol so drehen, bis dass volle Dunkelheit eintritt. Die Lage der Krystallplatte ergiebt dann die Lage der Hauptaxen der Erregungsellipse des einfallenden Lichtes, die Lage des Nicols das Verhältniss jener Hauptaxen.

Oder man benutzt eine nicht drehbare Krystallplatte veränderlicher Dicke (z. B. Quarzkeil), um den beiden Componenten u, v des einfallenden Lichtes, welche in den beiden Hauptschwingungsrichtungen der Platte liegen, eine derartige Phasendifferenz zu ertheilen, dass sie nach dem Austritt aus der Krystallplatte geradlinig polarisirtes Licht ergeben. Ob dieses eintritt, wird wiederum

mit einem drehbaren Nicol geprüft. Die Lage desselben ergiebt daher das Amplitudenverhältniss der einfallenden Componenten u, v, während ihre ursprüngliche Phasendifferenz aus derjenigen Dicke der Krystallplatte zu berechnen ist, welche das einfallende Licht in geradlinig polarisirtes verwandelt.

Um bequem auch die Phasendifferenz Null im Krystall herstellen zu können, ist es praktisch, zwei Quarzkeile verschiedener Orientirung so zu combiniren, dass beide Keile eine Phasendifferenz von verschiedenem Vorzeichen hervorbringen. In Figur 79 ist z. B. A ein Quarzkeil, dessen krystallographische Hauptaxe parallel zur Keilkante liegt, während im Keil B die Hauptaxe senkrecht zur Keilkante und parallel zur Oberfläche liegt (Babinet's Compensator). Beide Keile wirken mit der Differenz ihrer Dicken. Bei einfallendem homogenen elliptisch polarisirten Lichte ist daher bei richtiger Stellung des hinteren (analysirenden) Nicols dieser Compensator von schwarzen Streifen durchzogen, die parallel zu den Keilkanten verlaufen. Diese Streifen wandern über den Compensator hin, falls der eine Quarzkeil gegen den anderen verschoben wird. Hierzu dient eine Micrometerschraube. Aus der Stellung derselben, falls z. B. ein Streifen eine bestimmte Lage haben soll, ergiebt sich in einfacher Weise die Phasendifferenz derjenigen beiden Componenten u, v des einfallenden Lichtes, welche parallel den beiden Hauptaxen der beiden Quarzkeile schwingen, wenn man zur Aichung des Instrumentes geradlinig polarisirtes Licht einfallen lässt.

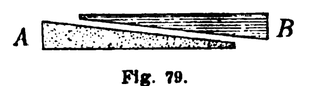


Fig. 79.

Die Construction muss etwas geändert werden, wenn ein grösseres, optisch homogenes Feld von geradlinig polarisirtem Lichte geschaffen werden soll. Dann muss nämlich an Stelle eines Quarzkeiles eine planparallele Quarzplatte von veränderlicher Dicke als Compensator verwendet werden. Man stellt eine solche Platte her durch zwei micrometrisch über einander verschiebbare Quarzkeile A, A' gleicher Orientirung mit entgegengesetzt liegenden Keilwinkeln. Um auch die Phasendifferenz Null bequem durch den Compensator hervorbringen zu können, wird mit den Keilen A, A' noch combinirt eine planparallele Quarzplatte B, deren Hauptaxe senkrecht liegt gegen die der Keile A, A', so dass die Differenz der Dicke von B und der Summe der Dicken der Keile A, A' wirkt. In Figur 80

B
A A'
Fig. 80.

ist diese Construction (Soleil-Babinet'scher Compensator) skizzirt. In den Keilen A, A' liegt die Hauptaxe parallel zu den Keilkanten, in der Platte B liegt sie senkrecht dazu und parallel zur Oberfläche. Zweckmässig kann ein Keil, z. B. A', fest auf die Platte B gekittet werden, während A micrometrisch verschoben wird. Bei geeigneter Stellung der Micrometerschraube und des hinteren analysirenden Nicols wird das ganze Gesichtsfeld dunkel.



Fig. 81.

Diese Construction des Kompensators ist besonders bequem anzuwenden, um die Modification zu erfahren, welche geradlinig polarisirtes einfallendes Licht durch Reflexion oder Brechung erfährt. In einem Spectrometer (Figur 81) enthalten das Collimatorrohr K und das Fernrohr F Nicol'sche Prismen, deren Lage an den Theilkreisen p, p' abzulesen ist. An dem Fernrohr ist der Babinet-Soleil'sche Compensator C vorgesteckt; seine Hauptschwingungsrichtungen (Hauptaxen) liegen parallel und senkrecht zur Einfallsebene des Lichtes. S ist der reflectirende oder brechende Körper. Nicols und Compensator sind dort eingeschaltet, wo die Lichtstrahlen parallel sind.[1])

[1]) Wegen Benutzung eines auf Unendlich eingestellten Fernrohres kann man daher die einfache Babinet'sche Construction nicht benutzen.

II. Abschnitt.

Optische Eigenschaften der Körper.

Kapitel I.

Theorie des Lichtes.

1. Mechanische Theorie. Eine Theorie des Lichtes will die Differentialgleichung, welcher der Lichtvector gehorcht, und die Grenzbedingungen, welche beim Uebergang des Lichtes über die Grenze zweier verschiedener Körper zu erfüllen sind, auf Grund einer gewissen Hypothese mathematisch ableiten. Die Differentialgleichung (12) (S. 159) des Lichtvectors tritt nun allemal bei Bewegungen in einem elastischen Körper auf, und daher lag es nahe, für eine Theorie des Lichtes zunächst die Anschauungen der Elasticitätstheorie zu verwerthen. Nach dieser mechanischen Auffassung soll der Lichtvector die Verschiebung der Aethertheilchen aus ihrer Gleichgewichtslage sein, und der Aether, d. h. der Raum, in welchem sich Lichtschwingungen fortpflanzen können, wird als elastischer Stoff von sehr geringer Dichte aufgefasst.

Nun liegt aber eine Schwierigkeit sofort in der Transversalität ebener Lichtwellen. Im Allgemeinen pflanzen sich in einem elastischen Körper sowohl transversale, als longitudinale Schwingungen fort, in Flüssigkeiten sogar letztere allein, während Transversal-Schwingungen allein nur in einem festen Körper auftreten, dessen Theile nie Volumenänderungen erleiden, der also vollkommen incompressibel ist. — Die widerstandslose Bewegung der Weltkörper im leeren Raume (dem freien Aether) würde nun entschieden dem Aether den Zustand einer Flüssigkeit zuschreiben, nicht den

eines incompressibelen festen Körpers. — Indessen kann man vielleicht diese Schwierigkeit durch die Ueberlegung überwinden, dass sich der Aether solchen groben Kräften gegenüber, wie sie bei der Massenbewegung der Himmelskörper auftreten, wie eine reibungslose Flüssigkeit verhält, dass aber bei den so ausserordentlich schnell wechselnden Kräften, wie sie bei Lichtschwingungen vorkommen, doch ein kleiner Rest von Reibung im Aether derartigen Einfluss gewinnt, dass er sich Lichtschwingungen gegenüber wie ein starrer Körper verhält.

Es tritt aber noch eine zweite Schwierigkeit ein bei Aufstellung der Grenzbedingungen des Lichtvectors. Die Elasticitätstheorie liefert für den Uebergang der Bewegung über die Grenze zweier elastischer Körper 6 Grenzbedingungen, nämlich die Gleichheit der Verschiebungskomponenten der Körpertheilchen und die Gleichheit der Komponenten der elastischen Druckkräfte zu beiden Seiten der Grenze. Um diese 6 Grenzbedingungen zu befriedigen, müssen aber nothwendig ausser transversalen Wellen auch longitudinale auftreten. Es soll hier nicht genauer erörtert werden,[1] wie die verschiedenen mechanischen Theorien diese Klippe umschiffen, es mag nur erwähnt werden, dass die meisten Theorien nur 4 Grenzbedingungen beibehalten.

Um Uebereinstimmung mit den Beobachtungen über die Beschaffenheit des reflectirten Lichtes zu erhalten, speciell z. B. um das Brewster'sche Gesetz über den Polarisationswinkel (vgl. oben S. 227) zu folgern, muss man entweder annehmen, dass die Dichte des Lichtäthers in allen Körpern die gleiche sei, oder die Elasticität. Ersteres ist der F. Neumann'sche Standpunkt, letzteres der Fresnel'sche. Aus ersterem folgt, dass die Verrückung der Aethertheilchen einer linear polarisirten Welle in der Polarisationsebene liegt, während sie nach Fresnel senkrecht zu dieser Ebene steht.

2. Elektromagnetische Theorie. Die Grundhypothese, welche von Faraday ausgesprochen, von Maxwell mathematisch ausgebaut wurde, ist, dass die Fortpflanzung des Lichtes in einem das Licht nicht absorbirenden Medium identisch ist mit der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in einem Isolator. Als Lichtvector kann die elektrische Kraft, oder auch die

---

1) Genaueres hierüber findet sich in der Darstellung des Verf. in Winkelmann's Handbuch, Optik, S. 641—674.

magnetische Kraft interpretirt werden, beide sind stets gleichzeitig in Schwingung begriffen und stehen in ebenen linearpolarisirten Wellen senkrecht auf einander. Durch diese Vielseitigkeit der Theorie wird die nicht specieller formulirte Frage nach der Lage des Lichtvectors zur Polarisationsebene gegenstandslos, indess ist es aus gewissen oben S. 233 angeführten Gründen einfacher, die elektrische Kraft, welche senkrecht zur Polarisationsebene liegt, als Lichtvector zu interpretiren. Man gelangt dadurch zu den Resultaten der Fresnel'schen mechanischen Theorie, während die Resultate der F. Neumann'schen Theorie erhalten werden, falls die magnetische Kraft als Lichtvector interpretirt wird.

Der Vortheil der elektromagnetischen Theorie liegt wesentlich in drei Punkten:

1. Die Transversalität der Wellen folgt direct aus der von Maxwell gewonnenen einfachsten Darstellung der elektromagnetischen Vorgänge, nach der es nur geschlossene elektrische Ströme giebt.

2. Die Grenzbedingungen sind die in jedem elektromagnetischen Felde gültigen. Man braucht nicht, wie bei den mechanischen Theorien, besondere Annahmen für die Lichtschwingungen zu machen.

3. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume (im freien Aether) und in manchen Fällen auch in ponderabelen Körpern lässt sich aus rein elektromagnetischen Experimenten im Voraus berechnen. Dies ist ein Hauptvortheil der Theorie gegenüber den mechanischen Theorien, und dieser Punkt ist fast sofort ausschlaggebend zur Annahme der elektromagnetischen Auffassung der Natur des Lichtes geworden. In der That bedeutet dies einen wesentlichen Fortschritt in der Naturkenntniss, wenn in dieser Weise zwei, ursprünglich lose neben einander stehende Gebiete, wie die Optik und die Elektricitätslehre, in messbar controllirbare, nahe Beziehung zu einander treten.

Im Folgenden soll der elektromagnetische Standpunkt festgehalten werden. Es mag aber hervorgehoben sein, dass die Darlegungen der vorangegangenen Kapitel durchaus unabhängig von dem besonderen Standpunkte der Theorie sind, d. h. unabhängig davon, was man unter dem Lichtvector versteht.

3. Die Definition der elektrischen und der magnetischen Kraft. Zwei sehr lange, dünne Magnete üben auf einander Kraftwirkungen aus, die scheinbar von ihren Enden (Polen) ausgehen.

Die Stärken zweier magnetischer Pole m und m_1 werden dadurch definirt, dass sie im Vacuum aufeinander in der Entfernung r die nach mechanischem Maasse (nach Länge, Masse und Zeit) zu messende Kraft

$$K = \frac{m \cdot m_1}{r^2} \tag{1}$$

aufeinander ausüben. Danach ist auch ein magnetischer Einheitspol ($m = 1$) definirt als solcher, der auf einen gleichen in der Einheit der Entfernung die Krafteinheit ausübt.

Die Stärke $\mathfrak{H}$ irgend eines magnetischen Feldes in irgend einem Medium[1]) ist die Kraft, welche auf einen magnetischen Einheitspol ausgeübt wird. — Die, nach drei rechtwinkligen Axen x, y, z genommenen Componenten von $\mathfrak{H}$ seien α, β, γ.

Die magnetischen Kraftlinien geben durch ihre Richtung die Richtung der resultirenden Feldstärke an, durch ihre Dichte die Feldstärke $\mathfrak{H}$ selbst, indem im Vacuum $\mathfrak{H}$ gleich sein soll der Anzahl von Kraftlinien, welche die Flächeneinheit senkrecht durchschneiden. Man gelangt zu einer richtigen Darstellung des Kraftgesetzes (1), wenn man von einem Pole der Stärke m eine Anzahl $4\pi m$ von Kraftlinien austretend denkt, welche sich ohne Unterbrechung (d. h. ohne freie Enden) in den Raum fortsetzen. Denn die Kraftliniendichte ist dann auf einer, um einen einzigen vorhandenen Pol beschriebenen Kugel vom Radius r gleich $m : r^2$, d. h. gleich der Feldstärke $\mathfrak{H}$ nach dem Gesetz (1).

Analoge Definitionen gelten für das elektrische Feld im elektrostatischen Maassystem:

Die Stärken zweier elektrischer Pole e und e_1 werden dadurch definirt, dass sie im Vacuum aufeinander in der Entfernung r die nach mechanischem Maasse zu messende Kraft:

$$K = \frac{e \cdot e_1}{r^2} \tag{2}$$

aufeinander ausüben. Dadurch ist auch ein elektrischer Einheitspol definirt, für welchen $e = 1$ ist.

Die Stärke $\mathfrak{F}$ irgend eines elektrischen Feldes in irgend einem Medium ist die Kraft, welche auf einen elektrischen Einheitspol ausgeübt wird. — Die nach den drei rechtwinkligen Axen x, y, z genommenen Componenten von $\mathfrak{F}$ seien X, Y, Z.

---

1) Dasselbe kann sowohl mit Materie erfüllt, als auch leer sein (Vacuum).

Die elektrischen Kraftlinien geben durch ihre Richtung die Richtung der resultirenden Feldstärke $\mathfrak{F}$ an, die Anzahl der Kraftlinien, welche die Flächeneinheit senkrecht durchschneiden, soll im Vacuum gleich $\mathfrak{F}$ sein. Aus einem Pole der Stärke e treten daher $4\pi e$ Kraftlinien aus, weil das Gesetz (2) gilt.

4. Definition des elektrischen Stromes nach elektrostatischem und elektromagnetischem Maasse. Als elektrischer Strom i nach elektrostatischem Maass, welcher durch irgend einen Querschnitt q geht, wird definirt die Anzahl elektrostatischer Einheiten, welche in der Zeiteinheit durch q gehen. Geht also im Zeitelement dt die Elektricitätsmenge de durch q, so ist der Strom:

$$i = \frac{de}{dt}. \tag{3}$$

Ist der Querschnitt q gleich der Flächeneinheit, so wird i gleich der Stromdichte j. Die Componenten der Stromdichte j_x, j_y, j_z werden erhalten, wenn man q senkrecht zur x-, y- oder z-Axe wählt.

Der elektrische Strom i' nach elektromagnetischem Maasse wird durch seine magnetischen Wirkungen definirt. Man kann einen dauernden elektrischen Strom in einem Metalldraht leicht herstellen, wenn man ihn an die Pole eines galvanischen Elementes anlegt. Auch hier handelt es sich um die Verschiebung bestimmter Elektricitätsmengen durch den Querschnitt des Drahtes, denn die isolirten Pole des Elementes verhalten sich wie elektrostatisch geladene Körper. Ein Magnetpol erfährt gewisse Kraftäusserungen in der Nähe des elektrischen Stromes. Die Stromstärke i' nach elektromagnetischem Maasse wird dadurch definirt, dass bei einmaliger Umkreisung des Stromes von einem Magnetpol der Stärke $m = 1$ die Arbeit $\mathfrak{A} = 4\pi i'$ ausgeübt wird.[1])

Nehmen wir z. B. ein Rechteck der Seitenlängen dx, dy (vgl. Figur 82), welches senkrecht von einem Strome $i' = j'_x \cdot dx dy$ durchflossen wird. j'^z ist die z-Componente der Stromdichte in elektromagnetischem Maasse. Fliesst der Strom von hinten nach vorn, so dass die positiven Coordinatenrichtungen die in der Figur

1) Die Arbeit $\mathfrak{A}$ ist unabhängig von dem besonderen Wege des Magnetpoles und auch unabhängig von der Natur des den Strom umgebenden Mediums. Vgl. hierüber die Lehrbücher des Elektromagnetismus (z. B. die Physik des Aethers des Verf. S. 77, 83).

gezeichneten Lagen zu einander haben[1]), so wird nach der sogenannten Ampère'schen Regel ein positiver Magnetpol in der Richtung der Pfeile der Figur abgelenkt. (Figur 82.) Die ganze Arbeit $\mathfrak{A}$ beim Verschieben eines Magnetpoles $m = +1$ von A über B nach C, D und nach A zurück ist also:

$$\mathfrak{A} = \alpha \cdot dx + \beta' \cdot dy - \alpha' \cdot dx - \beta \cdot dy, \tag{4}$$

wenn α und β die Componenten der magnetischen Kraft, wie sie längs AB und AD wirken, bezeichnet, während α' und β' die längs DC und BC wirkenden Componenten sind. α' unterscheidet sich nur dadurch von α, dass es längs einer Linie wirkt, deren y-Coordinaten um dy grösser sind, als die y-Coordinaten der Linie AB, längs der α wirkt. Bei genügender Kleinheit von dy hat also $(\alpha' - \alpha) : dy$ die Bedeutung des partiellen Differentialquotienten $\partial\alpha : \partial y$, sodass man hat:

$$\alpha' = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\, dy.$$

Analog ist

$$\beta' = \beta + \frac{\partial \beta}{\partial x}\, dx,$$

sodass aus (4) entsteht:

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{4'}$$

Da nun nach der Definition der Stromstärke i' diese Arbeit gleich $4\pi i' = 4\pi j_z' \cdot dx\, dy$ sein soll, so entsteht:

(5)

$$4\pi j_z' = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

und analog würden zwei andere Differentialgleichungen abzuleiten sein:

$$4\pi j_x' = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$
$$4\pi j_y' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}.$$

Dieses sind die Maxwell'schen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes. Damit sie mit diesen Vorzeichen, wie in (5), giltig sind, muss das Coordinatensystem entsprechend der Figur (82) gewählt sein. — Man kann in diesen Gleichungen die

---

1) Diese relative Lage der Coordinatenrichtungen soll im Folgenden stets festgehalten werden.

elektromagnetisch definirte Stromdichte j' ersetzen durch die elektrostatisch definirte j, wenn man das Verhältniss c einführt, in welchem beide Maassysteme, das elektrostatische zu dem elektromagnetischen, stehen. Wir wollen also setzen

$$i : i' = c, \; j_x : j'_x = c, \text{ etc.} \tag{6}$$

Daher wird nach (5)

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \; \frac{4\pi}{c} j_y = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \; \frac{4\pi}{c} j_z = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \tag{7}$$

Diese Gleichungen sind unabhängig von der Natur des Mediums, in welchem die elektromagnetischen Vorgänge bestehen (nach der Anm. 1 der S. 243), sie gelten daher in jedem, auch in einem inhomogenen oder krystallinischen Medium.

Die Verhältnisszahl c kann man erhalten, wenn man die magnetische Wirkung beobachtet, die durch die Entladung einer nach elektrostatischem Maass gemessenen Menge e entsteht. Es ergiebt sich c gleich der Dimension einer Geschwindigkeit, die den Werth hat

$$c = 3 \cdot 10^{10} \; cm/sec.$$

5. Definition des magnetischen Stromes. Analog wie der elektrische Strom soll der magnetische Strom, der durch irgend einen Querschnitt q geht, definirt werden als das Quantum magnetischer Polstärke, welches durch q in der Zeiteinheit fliesst. Falls q gleich der Flächeneinheit ist, sprechen wir von der Dichte des magnetischen Stromes, ihre Componenten seien durch s_x, s_y, s_z bezeichnet.

Die Formeln (7) sind ein Ausdruck dafür, dass ein elektrischer Strom von circularen magnetischen Kräften um sich herum begleitet ist. Andererseits muss aber auch ein magnetischer Strom von circularen elektrischen Kräften um sich herum begleitet sein. (Dieser Vorgang wird als Magnet-Induction bezeichnet.)

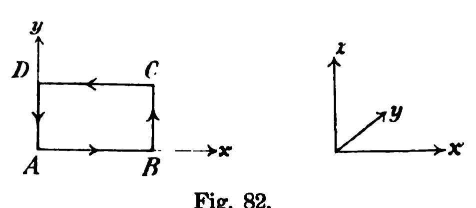


Fig. 82.

Dies folgt nothwendig aus der Anwendung des Energieprincipes. Denken wir uns das Rechteck $ABCD$ der Fig. 82 von einem elektrischen Strome der Stärke i nach elektrostatischem Maasse um-

flossen in dem Sinne der eingezeichneten Pfeile, so würde ein positiver Magnetpol von hinten nach vorn, d. h. im Sinne der positiven z-Axe durch das Rechteck hindurch getrieben werden und fortwährend um eine der Rechteckseiten herum kreisen. Diese hierdurch geleistete Arbeit muss darin ein Aequivalent haben, dass der Strom auf constanter Stärke i nur unter Aufwendung eines gewissen Energiequantums gehalten werden kann, während er jene mechanische Arbeit leistet, m. a. W. **durch die mechanische Arbeit muss eine gewisse elektromotorische Gegenkraft erzeugt werden**, die überwunden werden muss, falls der Strom auf constanter Stärke i bleiben soll. Für die Arbeit, welche entsteht, wenn ein elektrischer Einheitspol einmal um das Rechteck im Sinne der Pfeile geführt wird, gilt nun der analoge Ausdruck wie in (4) und (4'), d. h. sie ist

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{8}$$

Um den Strom i während der Zeit t zu erhalten, ist die Arbeit noch mit der Anzahl der umgeführten elektrostatischen Einheiten, d. h. mit $i \cdot t$ zu multipliciren. Diese Arbeit, d. h. $\mathfrak{A} \cdot i \cdot t$, muss nach dem Energieprincip gleich der Arbeit sein, welche ein Magnetpol der Stärke m ausübt, der innerhalb der Zeit t eine Rechteckseite einmal umkreist; da diese Arbeit nach S. 243 gleich $4\pi m i' = 4\pi m i : c$ ist, so folgt also

$$\mathfrak{A} \cdot i \cdot t = 4\pi m i : c\,, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{A} = 4\pi m : ct. \tag{9}$$

Nun ist aber $m : t$ gleich der Stärke des magnetischen Stromes, welcher durch das Rechteck tritt, und $^m/_t \cdot dx\, dy$ ist gleich der z-Componente s_z der magnetischen Stromdichte. Daher folgt aus (8) und (9):

$$\frac{4\pi}{c} s_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\,, \tag{10}$$

und analog wären noch zwei andere Gleichungen für s_x und s_y abzuleiten.

In (10) bezeichnen X und Y die elektrischen Kräfte, welche man anwenden muss, um den Strom constant zu erhalten. Nennt man aber X und Y die durch den magnetischen Strom selbst durch Induction hervorgerufenen (Gegen-)Kräfte, so sind diese von gleicher Grösse, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet, sodass die Gleichungen entstehen

$$\frac{4\pi}{c} s_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{4\pi}{c} s_y = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{4\pi}{c} s_z = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \quad (11)$$

Auch diese Gleichungen gelten ganz allgemein in jedem Medium, d. h. auch in inhomogener oder krystallinischer Umgebung.

Die Formeln (7) und (11) gelten ganz allgemein in jeder Umgebung. Wir können sie als die Grundgleichungen der Maxwell'schen Theorie bezeichnen. Bei allen Erweiterungen der ursprünglichen Maxwell'schen Theorie auf Körper mit besonderen optischen Eigenschaften (Dispersion, Absorption, Krystallinität, natürliche und magnetische Rotationspolarisation) bleiben diese Grundgleichungen dieselben; nur die Gleichungen, welche j_x und s_x etc. mit der elektrischen, bezw. magnetischen Kraft verbinden, haben für besondere Fälle verschiedene Formen.

6. Das Vacuum (der freie Aether). Constante elektrische Ströme kann man nur in Leitern, z. B. in Metallen, herstellen, aber nicht in Isolatoren. Durch Ladungswechsel kann man aber auch in letzteren Ströme herstellen (sogenannte Verschiebungsströme im Gegensatz zu den Leitungsströmen der Leiter), und es ist der Grundpfeiler der Maxwell'schen Theorie, dass diese Verschiebungsströme dieselben magnetischen Wirkungen ausüben, als die Leitungsströme. Durch diesen Grundsatz erreicht Maxwell den Vorzug der grössten Einfachheit seiner Theorie gegenüber anderen elektrischen Theorien. — Constante magnetische Ströme kann man überhaupt nicht herstellen, da es keinen magnetischen Leiter giebt.

Es handelt sich nun darum, wie im freien Aether die elektrische und magnetische Stromdichte von der elektrischen und magnetischen Kraft abhängt. Im freien Aether giebt es keine an gewissen Raumstellen concentrirte Ladungen e oder m, aber es sind Kraftlinien vorhanden. Nun können wir nach dem auf S. 242 u. 243 ausgesprochenen Satz, dass jede Ladung e oder m $4\pi e$ bezw. $4\pi m$ Kraftlinien aussendet, sagen, dass 4π multiplicirt mit der Stromdichte gleich der Aenderung der Kraftliniendichte in der Zeiteinheit sein muss, d. h. es ist

$$4\pi j_x = \frac{\partial N_x}{\partial t}, \quad 4\pi j_y = \frac{\partial N_y}{\partial t}, \quad 4\pi j_z = \frac{\partial N_z}{\partial t},$$
$$4\pi s_x = \frac{\partial M_x}{\partial t}, \quad 4\pi s_y = \frac{\partial M_y}{\partial t}, \quad 4\pi s_z = \frac{\partial M_z}{\partial t}, \quad (12)$$

wobei N_x, N_y, N_z, M_x, M_y, M_z die Componenten der elektrischen, bezw. magnetischen Kraftliniendichte sind. — Im Vacuum ist nun aber nach der Definition der S. 242, 243 die Kraftliniendichte gleich der elektrischen, bezw. magnetischen Kraft, sodass für das Vacuum (12) übergeht in:

$$(13) \qquad \begin{aligned} 4\pi j_x &= \frac{\partial X}{\partial t}, \quad 4\pi j_y = \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad 4\pi j_z = \frac{\partial Z}{\partial t}, \\ 4\pi s_x &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad 4\pi s_y = \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad 4\pi s_z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (7) und (11) des elektromagnetischen Feldes nehmen daher für den freien Aether die Gestalt an:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{aligned}$$

7. Isotroper Isolator. In einem mit Materie erfüllten Raume, der isolirt, ändern sich die Kraftgesetze (1) und (2). Bringt man nämlich die elektrischen Pole e, e_1 aus dem leeren Raume in einen isolirenden Körper, z. B. Flüssigkeit, so wirken sie dort schwächer auf einander, als im leeren Raume, sodass man zu setzen hat

$$(15) \qquad K = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{e e_1}{r^2}.$$

Die Constante ε des Isolators heisst seine Dielektricitätsconstante. Die Definition gilt auch für feste Isolatoren, nur kann man in ihnen die Anziehungs- oder Abstossungskräfte der elektrischen Pole nicht so bequem beobachten, wie in Flüssigkeiten. Es giebt aber andere Methoden, um auch für feste Körper ihre Dielektricitätsconstante zu bestimmen, auf die aber auf die Lehrbücher über Elektricität verwiesen sein möge. — Für alle Körper ist die Dielektricitätsconstante grösser als 1.

Analoges gilt auch für die Kräfte zwischen magnetischen Polen, die etwas verändert erscheinen, wenn sie vom Vacuum in einen Körper gebracht worden, sodass man zu schreiben hat

$$(16) \qquad K = \frac{1}{\mu}\,\frac{m m_1}{r^2}.$$

Die Constante μ heisst die Magnetisirungsconstante des Körpers. Sie ist bald grösser als 1 (paramagnetische Körper),

bald kleiner als 1 (diamagnetische Körper); sie unterscheidet sich aber stark von 1 nur in den paramagnetischen Metallen Eisen, Nickel, Kobalt, dagegen in Isolatoren sehr wenig von 1. Auf Isolatoren kommmt es aber zunächst allein an, da es sich zunächst um vollkommen durchsichtige Körper handelt, d. h. solche, welche die Energie der elektromagnetischen Wellen ohne Absorption, d. h. ohne sich dabei zu erwärmen, fortpflanzen. In Isolatoren ist der Unterschied von μ gegen 1 so gering (meist nur wenige Tausendstel Procent), dass wir im Folgenden immer $\mu=1$ setzen können.[1])

Durch die Aenderung des Kraftgesetzes (2) in (15) wird in den Gleichungen (13) eine Aenderung eintreten, da bei denselben Ladungen, d. h. auch denselben Stromstärken, die elektrische Kraft im Isolator im Verhältniss $1/\varepsilon$ schwächer ist, als im Vacuum. Daher ist an Stelle von (13) zu schreiben:

$$4\pi j_x = \varepsilon \frac{\partial X}{\partial t}, \text{ etc.}, \qquad 4\pi s_x = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \text{ etc.} \tag{17}$$

Für einen isotropen Isolator gelten also vermöge der auch im Isolator gültigen Gleichungen (7) und (11) die Formeln (für $\mu = 1$):

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, & \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, & \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Diese Gleichungen bestimmen alle Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes in einem Isolator vollkommen.

Wenn man allgemein an den Gleichungen (12) festhält, d. h. wenn man festsetzt, dass die Anzahl der von einer Ladung ausgesandten Kraftlinien unabhängig von der Natur ihrer Umgebung sein soll, so lehrt ein Vergleich mit (17), dass man in dem Körper zu setzen hat:

$$\begin{aligned}
N_x &= \varepsilon X, \; N_y = \varepsilon Y, \; N_z = \varepsilon Z, \\
M_x &= \mu\alpha, \; M_y = \mu\beta, \; M_z = \mu\gamma,
\end{aligned} \tag{19}$$

1) Wir werden später bei Besprechung der optischen Eigenschaften magnetisirter Körper genauer beweisen, wesshalb für alle Körper die Annahme $\mu = 1$ bei Lichtschwingungen berechtigt ist. Es liegt dies nicht etwa daran, dass die Magnetisirung des Körpers bei so schnellen Feldwechseln, wie sie im Lichte bestehen, nicht folgen könnte, sondern der Grund ist complicirter.

d. h. nur im Vacuum (für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) ist die Kraftliniendichte gleich der elektrischen, bezw. magnetischen Kraft.

Denken wir uns einen Elementar-Würfel der Seitenlängen dx, dy, dz, welcher die elektrische Ladung e enthält, so müssen aus der ganzen Oberfläche des Würfels $4\pi e$ Kraftlinien ausstrahlen. Wenn wir andrerseits die ausstrahlenden Kraftlinien berechnen als Summe der aus den Oberflächen des Würfels austretenden Kraftlinien, so geben z. B. die beiden senkrecht zur x-Axe liegenden Flächen die Antheile: $-(N_x)_1\, dy\, dz + (N_x)_2\, dy\, dz$, wobei die Indices 1 und 2 sich auf die beiden gegenüberliegenden, um dx von einander entfernten Seiten beziehen. Nun ist offenbar (nach der Definition des Differentialquotienten):

$$(N_x)_2 = (N_x)_1 + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx,$$

sodass auf diese Weise die ganze, durch die Oberfläche des Würfels tretende Kraftlinienzahl gefunden wird zu

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Setzen wir also dieses Aggregat gleich $4\pi e$ und berücksichtigen die Gleichungen (19), so folgt, falls man $e : dx\, dy\, dz = \varrho$ die Ladung der Volumeneinheit (Dichte der Ladung) nennt:

$$4\pi\varrho = \frac{\partial(\varepsilon X)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon Z)}{\partial z}. \tag{20}$$

Nach ihrer Herleitung gilt diese Gleichung auch in isotropen, inhomogenen Körpern, d. h. falls ε mit x, y, z variirt. — Eine analoge Gleichung kann man für die magnetische Ladungsdichte aufstellen.

8. Die Grenzbedingungen. Wenn zwei verschiedene Körper aneinander stossen, so sind gewisse Bedingungen für den Uebergang der elektrischen und magnetischen Kraft über die Grenze der Körper zu erfüllen, die man aus den Hauptgleichungen (18) durch folgende Bemerkung gewinnen kann: In Wirklichkeit vollzieht sich der Uebergang von einem Körper der Dielektricitätsconstante ε_1 zu einem anderen Körper der Dielektricitätsconstante ε_2 nicht plötzlich, sodass nur eine Trennungsfläche im mathematischen Sinne besteht, sondern allmählich, sodass die Dielektricitätsconstante innerhalb einer, allerdings sehr dünnen

Uebergangsschicht stetig vom Werthe ε_1 bis ε_2 variirt. Auch in einer solchen Uebergangsschicht bestehen die Gleichungen (7), (11) und (17), daher auch (18), d. h. alle in jenen Gleichungen vorkommenden Differentialquotienten müssen endliche Werthe behalten. Nehmen wir nun z. B. an, die beiden Körper stiessen in der xy-Ebene aneinander. Da in der Uebergangsschicht die Differentialquotienten $\frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial \beta}{\partial z}, \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ endliche Werthe behalten müssen, so folgt, dass, wenn die Dicke der Uebergangsschicht, d. h. dz, unendlich klein wird, auch die Differenz von Y, X, β, α an den Grenzen der Uebergangsschicht unendlich klein wird, mit anderen Worten: Die der Grenzfläche parallelen Componenten der elektrischen und magnetischen Kraft müssen sich stetig verhalten beim Durchgang durch die (als verschwindend dünn angenommene) Grenzfläche, in Formeln:

$$X_1 = X_2 , \quad Y_1 = Y_2 , \quad \alpha_1 = \alpha_2 , \quad \beta_1 = \beta_2 \text{ für } z = 0, \tag{21}$$

wobei durch untere Indices die Zugehörigkeit zu den beiden verschiedenen Körpern gekennzeichnet ist.

Da in den Hauptgleichungen (18) die Differentialquotienten $\frac{\partial Z}{\partial z}$ und $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$ nicht vorkommen, so gelten für Z und γ nicht dieselben Schlüsse, wie für X, Y, α, β. Indessen ersieht man aus der letzten der Gleichungen (18), dass $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$, daher auch γ, zu beiden Seiten der Uebergangsschicht denselben Werth hat, weil X und Y für alle Werthe von x und y zu beiden Seiten der Uebergangsschicht dieselben Werthe haben. Daher geht auch γ stetig durch die Grenze, wenn diese als eine Schicht von verschwindender Dicke aufgefasst wird. Aus demselben Grunde schliesst man aus der dritten der Gleichungen (18) auf Stetigkeit des Productes εZ, d. h. auf Unstetigkeit von Z. Man kann also zu den Grenzbedingungen (21) noch die Grenzbedingungen hinzufügen:

$$\varepsilon_1 Z_1 = \varepsilon_2 Z_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 \text{ für } z = 0. \tag{21'}$$

Von den 6 Gleichungen (21) und (21′) sind aber wegen des Bestehens der Hauptgleichungen (18) nur 4 von einander unabhängig.

Aus (19) in Verbindung mit (21′) ergiebt sich, dass die Kraftlinien auch an der Trennungsfläche zwischen zwei

Körpern keine freien Enden besitzen. (NB.: es ist in (21') $\mu = 1$ angenommen, sonst würde $\mu\gamma$ stetig sein!)

9. Die Energie des elektromagnetischen Feldes. Wenn man die Formeln (18) mit den Factoren $X d\tau$, $Y d\tau$, $Z d\tau$, $\alpha d\tau$, $\beta d\tau$, $\gamma d\tau$ multiplicirt, wobei $d\tau$ ein Volumenelement bedeutet, und über einen beliebigen Bereich integrirt, so erhält man, falls man setzt

$$\mathfrak{E} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{8\pi}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2): \tag{22}$$

$$\frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{E}\, d\tau = \int\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) X\, d\tau + \cdots \tag{23}$$
$$+ \int\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\alpha\, d\tau + \cdots$$

Mit Benutzung des Hülfssatzes S. 162 (Formel 20) erhält man nun leicht:

$$\int \frac{\partial \gamma}{\partial y} X\, d\tau = -\int \gamma\, X \cos(ny)\, dS - \int \gamma\, \frac{\partial X}{\partial y}\, d\tau,$$

wobei dS ein Oberflächenelement der Oberfläche desjenigen Raumes bedeutet, über welchen die Integration erstreckt wird, und n die innere Normale auf dS. Wendet man diese Umformung an auf die ersten drei Integrale, welche auf der rechten Seite von (23) auftreten, so heben sich die Raumintegrale gegenseitig fort. Es folgt daher:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{E}\, d\tau = \frac{c}{4\pi}\int\Big[(\gamma Y - \beta Z)\cos(nx) + (\alpha Z - \gamma X)\cos(ny)$$
$$+ (\beta X - \alpha Y)\cos(nz)\Big]\, dS. \tag{24}$$

Ziehen wir die Grenzen des Integrationsbereiches so weit, dass an ihnen die elektrische und magnetische Kraft verschwindet, so besagt Formel (24), dass die Grösse $\mathfrak{E}$ dieses Bereiches sich mit der Zeit nicht ändert. $\mathfrak{E}$ bedeutet die Energie des elektromagnetischen Feldes in der Volumeneinheit. Man kann diese Bedeutung thatsächlich durch Berechnung der Arbeitsleistungen, welche bei Verschiebung von elektrischen oder magnetischen Ladungen geleistet werden, erhalten. (Vgl. hierüber das Nähere in der Physik des Aethers vom Verf., S. 127, 272.)

10. Die Lichtstrahlen als Strömungslinien der Energie. Wenn an den Grenzen des Integrationsbereiches X, Y, Z, α, β, γ nicht verschwinden, so kann man den Sinn der Formel (24) so interpretiren, dass die Aenderung der elektromagnetischen Energie

eines Raumes dadurch herbeigeführt wird, dass dieselbe in seine Begrenzungsfläche ein- resp. ausströmt. Als Componenten f_x, f_y, f_z dieses Energieflusses können nach (24) angesehen werden:

$$f_x = \frac{c}{4\pi}(\gamma Y - \beta Z), \quad f_y = \frac{c}{4\pi}(\alpha Z - \gamma X), \quad f_z = \frac{c}{4\pi}(\beta X - \alpha Y). \quad (25)$$

Da hiernach die Relationen bestehen:

$$\alpha \cdot f_x + \beta \cdot f_y + \gamma \cdot f_z = 0,$$
$$X \cdot f_x + Y \cdot f_y + Z \cdot f_z = 0,$$

so steht die Bahn des Energieflusses stets senkrecht auf der elektrischen und magnetischen Kraft.

Diese von Poynting herrührende Theorie der Bewegung der Energie im elektromagnetischen Felde hat für die Lichttheorie in so fern grosse Bedeutung, als wir die Lichtstrahlen als diese Strömungslinien der Energie auffassen müssen. Denn nach S. 5 haben wir einen Lichtstrahl, der von einer Lichtquelle Q nach einem Punkte P geht, als den geometrischen Ort derjenigen Punkte definirt, auf welchen irgend ein Hinderniss, d. h. ein undurchsichtiger Körper angebracht sein muss, um die Lichtwirkung in P abzuschneiden. Nun kann offenbar Energie von Q nach P nicht fortgepflanzt werden, wenn die durch Q und P gehende Strömungslinie der Energie auf ein Hinderniss stösst.

Nach (25) ist daher die Richtung des Lichtstrahles als senkrecht zur elektrischen und magnetischen Kraft bestimmt.

Kapitel II.

Durchsichtige isotrope Körper.

1. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Das Zustandekommen einer ebenen elektromagnetischen Welle kann man sich nach den Anschauungen der elektrischen Theorie in folgender Weise klar machen: Denken wir uns, dass in einem gewissen Zeit-

moment eine elektrische Strömung parallel zur x-Axe innerhalb einer dünnen Schicht erregt würde, welche parallel zur xy-Ebene liegt. Diese Strömung ruft magnetische Kräfte am Rande der Schicht hervor, die parallel zur y-Axe liegen. Durch die entstehenden magnetischen Kraftlinien werden elektrische Kräfte inducirt, welche innerhalb der Schicht nach der negativen x-Axe, ausserhalb der Schicht nach der positiven x-Axe gerichtet sind. Im Inneren der Schicht verschwindet daher die elektrische Strömung, weil die inducirten Ströme die ursprünglich erregten Ströme aufheben, dafür treten aber ausserhalb der Schicht elektrische Ströme auf, welche nach der positiven x-Axe laufen. In dieser Weise pflanzt sich ein elektrischer Impuls als Welle nach der positiven und negativen z-Axe fort.

Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu finden, wollen wir auf die Hauptgleichungen (18) des vorigen Kapitels zurückgreifen.

Differencirt man die ersten drei Gleichungen (18) nach der Zeit t und setzt für $\partial\alpha/\partial t$, $\partial\beta/\partial t$, $\partial\gamma/\partial t$ die aus den letzten drei Gleichungen (18) folgenden Werthe, so entsteht:

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right),$$

und analog zwei andere Gleichungen. Man kann diese Gleichung nun in der Form schreiben:

$$(1)\qquad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Nun erhält man aber durch Differentiation der ersten drei Gleichungen (18) bezw. nach x, y, z und Addition:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0\,.$$

Da es sich im Folgenden stets nur um periodische Veränderungen der elektrischen und magnetischen Kräfte handelt, bei denen der Differentialquotient nach der Zeit t den Grössen selbst proportional ist (wenn man noch die Phase $\pi/2$ hinzufügt), so kann man aus der letzten Gleichung den Schluss ziehen, dass sein muss:

$$(2)\qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0\,.$$

Die Gleichung (1) wird daher

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \Delta X.$$

Analoge Gleichungen befolgen Y, Z, sodass das Gleichungssystem entsteht:

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X,\quad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta Y,\quad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta Z. \tag{3}$$

Die magnetischen Kraftcomponenten befolgen analoge Gleichungen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0, \tag{2'}$$

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \Delta\alpha,\quad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \Delta\beta,\quad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \Delta\gamma. \tag{3'}$$

Nun haben wir schon früher S. 159 gesehen, dass Differentialgleichungen der Form (3) (3′) auf Wellen führen, welche sich mit der Geschwindigkeit

$$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{4}$$

fortpflanzen. Dies ist also nach der elektromagnetischen Auffassung der Natur des Lichtes die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, wobei es ganz gleichgültig ist, ob man die elektrische Kraft oder die magnetische Kraft als Lichtvector interpretirt. Denn beide sind untrennbar mit einander verbunden und pflanzen sich mit derselben Geschwindigkeit fort.

Wenden wir zunächst die Formel (4) für den freien Aether (leeren Raum) an, so folgt, dass dort die Lichtgeschwindigkeit gleich dem Verhältniss c des elektrostatischen zum elektromagnetischen Maassystem sein muss. Diese Folgerung wird nun in der That glänzend bestätigt, denn oben S. 112 gaben wir als Mittel der Lichtgeschwindigkeit [1]) aus den zuverlässigsten Messungen $V = 2{,}9989 \cdot 10^{10}$ cm/sec. an, welche Zahl durchaus innerhalb der Beobachtungsfehler mit der aus rein elektromagnetischen Experimenten gewonnenen Zahl $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. übereinstimmt.

---

1) Dass sich dieselbe auf das Vacuum bezieht, ist oben S. 113 hervorgehoben.

Dies ist der erste durchschlagende Erfolg der elektromagnetischen Lichttheorie.

In einem ponderabeln Körper muss nach (4) die Lichtgeschwindigkeit im Verhältniss $1:\sqrt{\varepsilon}$ kleiner sein, als im Vacuum, d. h. da der Brechungsindex n_0 des Körpers gegen das Vacuum das Verhältniss der Lichtgeschwindigkeiten im Vacuum und im Körper bedeutet, so muss sein:

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon}, \quad n_0^2 = \varepsilon, \tag{5}$$

d. h. das Quadrat des Brechungsindex ist gleich der Dielektricitätsconstante.

Diese Beziehung kann nun in aller Strenge nicht erfüllt sein, schon aus dem Grunde, weil der Brechungsindex n_0 bei allen Körpern von der Farbe, d. h. der Periode der Oscillationen, abhängt, während die Dielektricitätsconstante ε als eine, von der Oscillationsdauer unabhängige Constante definirt ist.

Zunächst ist aber bei Gasen, bei denen die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Farbe sehr gering ist, die Relation (5) recht gut erfüllt, wie folgende Tabelle ergiebt, in der die Dielektricitätsconstanten einer Bestimmung von Boltzmann[1]) entnommen sind, während die Brechungsindices für Licht mittlerer Farbe (gelb) gelten:

	n_0	$\sqrt{\varepsilon}$
Luft	1,000 294	1,000 295
Wasserstoff	1,000 138	1,000 132
Kohlensäure	1,000 449	1,000 473
Kohlenoxyd	1,000 346	1,000 345
Stickoxydul	1,000 503	1,000 497

Auch bei den flüssigen Kohlenwasserstoffen stimmt die Beziehung (5) recht gut, z. B. bei Benzol ist n_0 (gelb) $= 1{,}482$, $\sqrt{\varepsilon} = 1{,}49$.

Dagegen sind sowohl bei vielen festen Körpern, z. B. den Gläsern, als auch bei den Alkoholen und bei Wasser eklatante Abweichungen vom Gesetz (5) vorhanden: es ist ε immer viel grösser, als n_0^2, wie folgende Tabelle lehrt:

1) L. Boltzmann, Wien. Ber. 69, S. 795, 1874. — Pogg. Ann. 155, S. 407, 1873.

	n_0	$\sqrt{\varepsilon}$
Wasser	1,33	9,0
Methylalkohol . .	1,34	5,7
Aethylalkohol . . .	1,36	5,0

Um diese Abweichungen zu erklären, bedarf die elektrische Theorie einer Erweiterung ihrer Grundgleichungen. Dies soll im Kapitel V dieses Abschnittes geschehen. Nach dieser Erweiterung erscheint dann die hier als Constante auftretende Grösse ε von der Oscillationsdauer abhängig.

Bevor wir aber hierauf eingehen, wollen wir untersuchen, wie diejenigen optischen Eigenschaften der Körper nach der elektrischen Theorie dargestellt werden, auf welche das Dispersionsgesetz, d. h. die Abhängigkeit des n_0 von der Farbe, keinen Einfluss hat. Wir wollen also im Folgenden denken, dass mit Licht von bestimmter Farbe operirt wird, und dass die im Kapitel V zu behandelnde Erweiterung schon gemacht wäre, so dass die in den Hauptgleichungen auftretende Constante ε übereinstimmt mit dem Quadrat des Brechungsindex n_0 für die bestimmte Farbe.

2. Transversalität ebener Wellen. Eine ebene elektrische Welle wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$
\begin{aligned}
X &= A_x \cdot \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right),\\
Y &= A_y \cdot \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right),\\
Z &= A_z \cdot \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Denn die Phase ist dieselbe in den Ebenen:

$$mx + ny + pz = \text{const.}, \tag{7}$$

welches dann die Gleichung der Wellenebenen ist. m, n, p sind die Richtungscosinus der Normale zu den Wellenebenen, wenn man noch die Bedingung vorschreibt:

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1. \tag{8}$$

A_x, A_y, A_z sind die Componenten der Amplitude A der resul-

tirenden elektrischen Kraft. Sie sind also proportional den Richtungscosinus dieser Amplitude A. In Folge der Differentialgleichung (2) auf S. 254 muss sein:

$$A_x \cdot m + A_y \cdot n + A_z \cdot p = 0, \tag{9}$$

welche Gleichung ausdrückt, dass die resultirende Amplitude A senkrecht auf der Wellenebenen-Normale, d. h. der Fortpflanzungsrichtung, steht, mit anderen Worten, dass die Welle eine Transversalwelle ist. Dieselbe Folgerung gilt für die magnetische Kraft. — Die Transversalität ebener Wellen folgt also aus der Gleichung (2) bezw. (2'), d. h. aus der Form der Hauptgleichungen der Theorie.

3. Reflexion und Brechung an der Grenze durchsichtiger isotroper Körper. Die Körper 1 und 2 mit den Constanten ε_1 und ε_2 mögen in einer Ebene, der xy-Ebene, an einander grenzen. Die positive z-Achse gehe vom Körper 1 zum Körper 2 (vergl. Fig. 83). Es mögen von ersterem auf letzteren ebene Wellen unter dem Einfallswinkel φ einfallen, und zwar sei die xz-Ebene die Einfallsebene. Die Richtungscosinus der Fortpflanzungsrichtung in der einfallenden Welle sind dann:

$$m = \sin\varphi, \; n = o, \; p = \cos\varphi. \tag{10}$$

Wir wollen die einfallende elektrische Kraft in zwei Componenten zerlegen: eine senkrecht zur Einfallsebene liegende Componente, deren Amplitude E_s sei, und eine in der Einfallsebene liegende Componente, deren Amplitude E_p sei. Erstere Componente liegt zu der y-Achse parallel, so dass vermöge (6) und (10) für die y-Componente der einfallenden elektrischen Kraft zu schreiben ist:

$$Y_e = E_s \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right); \tag{11}$$

wobei V_1 die Lichtgeschwindigkeit im Körper (1) bedeutet. Nach (4) ist

$$V_1 = c : \sqrt{\varepsilon_1}. \tag{12}$$

Die in der Einfallsebene liegende Componente E_p der elektrischen Kraft liegt wegen der Transversalität der Welle senkrecht zum Lichtstrahl, d. h. die nach der x- bezw. z-Achse genommenen

Componenten A_x bezw. A_z der Amplitude E_p müssen die Werte haben:

$$A_x = E_p \cdot \cos\varphi, \quad A_z = -E_p \cdot \sin\varphi,$$

wenn, wie in Fig. (83) gezeichnet ist, der positive Sinn von E_p von der Grenze fort zeigt.

Die x- und z-Componente der elektrischen Kraft der einfallenden Welle wird daher

$$\begin{aligned} X_e &= E_p \cdot \cos\varphi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right), \\ Z_e &= -E_p \cdot \sin\varphi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Mit der elektrischen Kraft der einfallenden Welle ist nun nothwendig verbunden eine magnetische Kraft, deren Componenten sich aus den früheren Hauptgleichungen (18) der S. 249 und unter Rücksicht auf (12) der Seite 258 berechnen zu:

$$\begin{aligned} \alpha_e &= -E_s \cdot \cos\varphi \sqrt{\varepsilon_1} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right), \\ \beta_e &= +E_p \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right), \\ \gamma_e &= +E_s \cdot \sin\varphi \sqrt{\varepsilon_1} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Ist also $E_s = 0$, $E_p > 0$, so ist $\alpha_e = \gamma_e = 0$, β_e von Null verschieden, d. h. die in der Einfallsebene liegende Amplitude E_p der elektrischen Kraft ruft eine senkrecht zur Einfallsebene liegende Componente β_e der magnetischen Kraft hervor. Umgekehrt ruft die senkrecht zur Einfallsebene liegende Componente E_s der elektrischen Kraft eine in der Einfallsebene liegende magnetische Kraft hervor. Dieses Resultat, dass die nothwendig mit einander verbundenen elektrischen und magnetischen Kräfte stets senkrecht auf einander stehen, folgte schon aus der oben S. 254 angestellten Ueberlegung.

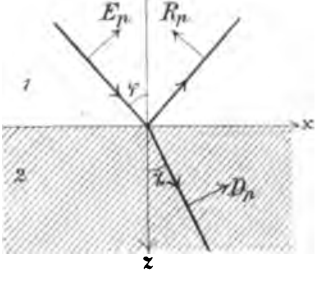


Fig. 83.

Wenn die einfallende elektromagnetische Welle auf die Grenze trifft, so zerlegt sie sich in eine reflectirte und eine gebrochene

Welle. Wir können die elektrischen Kräfte in der reflectirten Welle analog wie in (11) und (13) darstellen durch:

$$(15)\qquad \begin{aligned} X_r &= R_p \cdot \cos\varphi' \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1}\right),\\ Y_r &= R_s \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1}\right),\\ Z_r &= -R_p \cdot \sin\varphi' \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1}\right), \end{aligned}$$

in der gebrochenen Welle durch:

$$(16)\qquad \begin{aligned} X_2 &= D_p \cdot \cos\chi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right),\\ Y_2 &= D_s \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right),\\ Z_2 &= -D_p \cdot \sin\chi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right). \end{aligned}$$

Hierin bezeichnen R_p, R_s, D_p, D_s Amplituden, φ' den Reflexionswinkel (d. h. Winkel zwischen $+z$-Achse und Fortschreitungsrichtung der reflectirten Welle), χ den Brechungswinkel.

Die zugehörigen magnetischen Kräfte sind entsprechend (14):

$$(17)\qquad \begin{aligned} \alpha_r &= -R_s \cdot \cos\varphi' \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1}\right),\\ \beta_r &= +R_p \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t \ldots\right),\\ \gamma_r &= +R_s \cdot \sin\varphi' \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t \ldots\right). \end{aligned}$$

$$(18)\qquad \begin{aligned} \alpha_2 &= -D_s \cdot \cos\chi \cdot \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right),\\ \beta_2 &= +D_p \cdot \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t \ldots\right),\\ \gamma_2 &= +D_s \cdot \sin\chi \cdot \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t \ldots\right). \end{aligned}$$

Wegen der Grenzbedingungen (21) im vorigen Kapitel (S. 251) sollen nun für $z = 0$ gewisse Beziehungen zwischen den elektrischen, bezw. magnetischen Kräften für alle Werthe der Zeit und der Koordinaten x, y bestehen. Solche Bedingungen kann man nur

erfüllen, wenn für $z = 0$ alle Kräfte proportional zu derselben Function von t, x, y werden, d. h. es muss sein:

$$\frac{\sin \varphi}{V_1} = \frac{\sin \varphi'}{V_1} = \frac{\sin \chi}{V_2}. \tag{19}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\sin \varphi = \sin \varphi'$, d. h. da die Richtung des reflectirten Strahles nicht völlig übereinstimmen kann mit dem einfallenden Strahl:

$$\cos \varphi = -\cos \varphi', \text{ d. h. } \varphi' = \pi - \varphi. \tag{20}$$

Dies ist das Reflexionsgesetz, dem zu Folge der einfallende und reflectirte Strahl symmetrisch zum Einfallslot liegen.

Die zweite Gleichung (19) enthält das Brechungsgesetz, da man aus (19) folgert:

$$\sin \varphi : \sin \chi = V_1 : V_2 = n, \tag{21}$$

wobei n der Brechungsindex des Körpers 2 gegen den Körper 1 ist.

Das Reflexions- und Brechungsgesetz folgt also aus dem Bestehen von Grenzbedingungen überhaupt, ganz unabhängig von der besonderen Form der Grenzbedingungen.

Was nun die letztere anbelangt, so ist zu berücksichtigen, dass hier $X_1 = X_e + X_r$ und analog für die übrigen Kräfte zu setzen ist, da die elektrische Kraft im Körper 1 die Superposition der einfallenden und reflektirten Kraft ist. Daher ergeben die Grenzgleichungen (21) der S. 251 unter Rücksicht auf (20):

$$\begin{aligned}
(E_p - R_p) \cos \varphi &= D_p \cos \chi, \\
E_s + R_s &= D_s, \\
(E_s - R_s) \sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi &= D_s \sqrt{\varepsilon_2} \cos \chi, \\
(E_p + R_p) \sqrt{\varepsilon_1} &= D_p \sqrt{\varepsilon_2}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Hieraus kann man die reflektirten und gebrochenen Amplituden in ihrer Abhängigkeit von den einfallenden Amplituden berechnen. Es folgt nämlich:

$$\begin{aligned}
2 E_s &= D_s \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \chi}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi}\right), \\
E_s \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \chi} - 1\right) &= R_s \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \chi} + 1\right),
\end{aligned} \tag{23}$$

$$2\,E_p = D_p\left(\frac{\cos\chi}{\cos\varphi} + \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right),$$
(23)
$$E_p\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\chi} - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) = R_p\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\chi} + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right).$$

Ersetzt man hierin das Verhältniss $\sqrt{\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1}$, welches nach (4) gleich dem Brechungsindex n vom Körper 2 gegen den Körper 1 ist, durch das Verhältniss $\sin\varphi : \sin\chi$, entsprechend (21), so lassen sich die Formeln (23) in der Gestalt schreiben:

(24)
$$R_s = -E_s\frac{\sin(\varphi-\chi)}{\sin(\varphi+\chi)},\quad R_p = E_p\frac{tg(\varphi-\chi)}{tg(\varphi+\chi)},$$
$$D_s = E_s\frac{2\sin\chi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\chi)},\quad D_p = E_p\frac{2\sin\chi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\chi)\cos(\varphi-\chi)}.$$

Dies sind die sogenannten Fresnel'schen Reflexionsformeln, aus denen man Phase und Intensität des reflektirten und gebrochenen Lichtes vollständig berechnen kann aus der Beschaffenheit des einfallenden Lichtes.

Nach (24) verschwindet R_s nie, aber R_p wird Null, falls ist

(25)
$$tg(\varphi+\chi) = \infty,\quad \varphi+\chi = \pi/_2,$$

d. h. wenn der reflektirte Strahl senkrecht auf dem gebrochenen Strahl steht.

Aus (25) folgt, dass in diesem Falle $\sin\chi = \sin(\pi/_2 - \varphi) = \cos\varphi$ ist, d. h. nach (21) muss sein:

(25')
$$tg\,\varphi = n.$$

Wenn also der Einfallswinkel φ diesem Werthe entspricht, so enthält die reflektirte Welle gar keine elektrische Amplitude, die in der Einfallsebene liegt, ganz unabhängig davon, wie das einfallende Licht beschaffen ist, d. h. welches Verhältniss $E_s : E_p$ besteht. Also auch wenn natürliches Licht unter dem Einfallswinkel φ, der (25') entspricht, einfällt, enthält die reflektirte Welle nur eine elektrische Amplitude, die senkrecht zur Einfallsebene liegt, d. h. sie ist linear polarisirt. Dieser Einfallswinkel φ entspricht nun thatsächlich dem oben S. 227 genannten Brewster'schen Gesetz. Zugleich ergiebt sich jetzt, da wir die Einfallsebene die Polarisationsebene genannt haben (cf. oben S. 227), dass in einer linear polarisirten Welle der Lichtvector senk-

recht zur Polarisationsebene liegt, wenn wir ihn mit der elektrischen Kraft identificiren.

Dagegen würde der Lichtvector in der Polarisationsebene liegen, wenn wir ihn mit der magnetischen Kraft identificiren würden, da nach den Formeln (17) und der S. 259 R_p die Rolle der senkrecht zur Einfallsebene liegenden magnetischen Amplitude spielt. Aus dieser Annahme, dass die magnetische Kraft der Lichtvector ist, folgen die F. Neumann'schen Reflexionsformeln.

Die Intensitäten der reflektirten elektrischen und magnetischen Welle sind völlig gleich; denn haben wir z. B. einfallendes Licht, welches in der Einfallsebene polarisirt ist, so haben wir, um die reflektirte Intensität zu berechnen, nur die erste der Gleichungen (24) anzuwenden, sowohl wenn wir als Lichtvector die elektrische Kraft auffassen, als auch wenn wir ihn als magnetische Kraft interpretiren. Denn nach (14) der S. 259 ist in jedem Falle E_s die Amplitude des einfallenden Lichtes.

Dagegen sind die Vorzeichen der reflektirten elektrischen und magnetischen Amplitude von einander verschieden. Dies macht keinen Unterschied für die Intensitäten, da es bei ihnen nur auf das Quadrat der Amplitude ankommt, aber wohl für die Phasen der Wellen. Wir wollen dies an einem speciellen Fall näher erörtern.

4. Senkrechte Indicenz. Stehende Wellen. Die Formeln (24) werden zunächst für $\varphi = 0$ unbrauchbar, da sowohl φ als χ zu Null würden. Dagegen erhalten wir aus (23) direkt, da $\sqrt{\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1} = n$, $\cos\varphi = \cos\chi = 1$ ist:

$$R_s = -E_s \frac{n-1}{n+1}, \quad R_p = E_p \frac{n-1}{n+1}. \tag{26}$$

Die erste dieser Formeln besagt, dass, falls $n > 1$, die reflektirte elektrische Amplitude entgegengesetzt gerichtet ist, wie die einfallende elektrische Amplitude. Dasselbe besagt aber auch die zweite Formel, denn für $\varphi = 0$ bedeutet ein gleiches Vorzeichen von R_p und E_p thatsächlich entgegengesetzte Lage dieser Amplituden, wie aus dem in Figur 83 der S. 259 gezeichneten positiven Sinne von R_p und E_p hervorgeht. Die durch Interferenz der einfallenden und reflektirten Wellen erzeugten stehenden Wellen (cf. oben S. 145) müssen daher an der reflektirenden Fläche selbst einen Schwingungsknoten besitzen, der

allerdings nur dann eine vollständige Nullstelle sein würde, falls R_s ebenso gross, wie E_s ist, d. h. falls $n = \infty$ wäre. Für endliches n ist also nur ein Minimum am Spiegel vorhanden, da die reflektirte Amplitude wenigstens theilweise die Wirkung der einfallenden aufhebt.

Für die magnetische Kraft bedeuten aber E_p, R_p die senkrecht zur Einfallsebene, d. h. parallel zur y-Axe, liegenden Amplituden. Gleiches Vorzeichen dieser Amplituden bedeutet thatsächlich gleiche Richtung, sodass aus der zweiten der Formeln (26) (und ebenso aus der ersten bei richtiger Interpretation der räumlichen Amplitudenrichtung) hervorgeht, dass die reflektirte magnetische Amplitude gleich gerichtet mit der einfallenden magnetischen Amplitude ist. Stehende magnetische Wellen haben also einen Schwingungsbauch am Spiegel selbst, falls $n > 1$.

Die photographische Methode Wiener's (cf. oben S. 145) ergab an Glas- und Metallspiegeln[1]) einen Schwingungsknoten am Spiegel selbst. Dies spricht dafür, dass die elektrische Kraft der massgebende Vector für die photographische Wirkung ist, was ja schon noch bequemer durch die oben S. 232 besprochene Methode der stehenden Wellen bei schief einfallendem, polarisirtem Licht erwiesen war.

5. Polarisation natürlichen Lichtes beim Durchgang durch einen Plattensatz. Nach den Formeln (24) nimmt $R_s : E_s$ beständig zu, falls φ von 0 bis $\pi/2$ wächst; dagegen nimmt $R_p : E_p$ zunächst ab, erreicht beim Polarisationswinkel den Werth Null und wächst dann wieder bis zum Maximum 1, falls φ den Werth $\pi/2$ erreicht (streifende Incidenz). Für alle Einfallswinkel ist aber, falls $E_s = E_p$ ist, $R_s > R_p$. Denn aus (24) folgt:

$$(27) \qquad \frac{R_p}{R_s} = -\frac{E_p}{E_s} \cdot \frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)}.$$

Daher wird bei jedem Einfallswinkel natürliches Licht durch Reflexion partiell (bezw. total) nach der Einfallsebene polarisirt. Das gebrochene Licht muss daher, weil kein Licht verschwinden kann, stets partiell senkrecht zur Einfallsebene polarisirt sein. So erklärt sich die polarisirende Wirkung eines Plattensatzes.

1) Für Metallspiegel gelten zwar nicht die bisherigen Formeln; die Schlüsse sind aber ganz ähnlich; die Metalle sollen im IV. Kapitel behandelt werden.

In der That ergiebt auch direct eine Anwendung der beiden letzten Formeln (24) an den beiden Grenzen einer Glasplatte für den Durchgang des Lichtes durch dieselbe:

$$\frac{D'_s}{D'_p} = \frac{E_s}{E_p} \cos^2 (\varphi - \chi), \tag{28}$$

falls D'_s, D'_p die aus der Platte austretenden Amplituden bedeuten. Für $E_s = E_p$ ist daher nach (28) beständig $D'_s < D'_p$, d. h. einfallendes natürliches Licht ist nach dem Austritt aus der Platte partiell senkrecht zur Einfallsebene polarisirt. Total, wie bei der Reflexion, wird allerdings diese Polarisation unter keinem Einfallswinkel φ, sie wird um so vollständiger, je grösser φ ist. Falls φ gleich dem Polarisationswinkel ist[1] ($tg\varphi = n$, $\varphi + \chi = \pi/2$) wird nach (28) bei $E_s = E_p$:

$$\frac{D'_s}{D'_p} = \sin^2 2\varphi = \frac{4n^2}{(1+n^2)^2}.$$

Bei $n = 1{,}5$ ist daher $D'_s : D'_p = 0{,}85$, das Verhältniss der Intensitäten ist $D'^2_s : D'^2_p = 0{,}73$. Beim Durchgang durch 5 Platten würde dies Verhältniss auf $0{,}72^5 = 0{,}20$ gesunken sein, also sich von vollständiger Polarisation noch erheblich unterscheiden.

6. Experimentelle Prüfung der Theorie. Die Formeln (24) können einerseits durch Intensitätsvergleichung des reflectirten und einfallenden Lichtes geprüft werden, andererseits bequemer durch die Drehung, welche die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes durch Reflexion oder Brechung erfährt. Diese Drehung ist ja durch die Formeln (27) oder (28) zu berechnen.

Haben wir linear polarisirtes einfallendes Licht, so nennt man in dem Verhältniss der Componenten, $E_p : E_s = tg\,\alpha$, α das Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes. Das reflectirte und gebrochene Licht ist ebenfalls linear polarisirt, das Azimuth ψ seiner Polarisationsebene bestimmt sich aus (27) und (28). Es ist $tg\,\psi = R_p : R_s$. — Zur Beobachtung kann man zweckmässig den oben S. 238 abgebildeten Apparat (ohne Babinet'schen Compensator) benutzen. Das einfallende Licht wird durch

1) Für diesen erreicht die Polarisation des durchgehenden Lichtes keineswegs ein Maximum.

[illegible]

[illegible] Bestätigung [illegible] Abweichung [illegible] Licht [illegible] polarisirt war. Es [illegible] be[illegible] werden.

7. Elliptische Polarisation des reflectirten Lichtes erklärt durch Oberflächen- oder Uebergangsschichten. Die bisherigen [illegible] welche auf der Anwendung der Grenzbedingungen [illegible] der S. [illegible] beruhen, legen die Annahme zu Grunde, dass der Uebergang vom Körper 1 zum Körper 2 ein sprunghafter sei. Streng genommen giebt es in der Natur keine Unstetigkeiten, zwischen beiden Körpern 1 und 2 [illegible] stets eine Uebergangsschicht [illegible] sein, in der die Dielektricitätsconstante stetig von ε_1 zu ε_2 variirt. Zwar wird diese Uebergangsschicht sehr dünn sein, ob wir aber ihren Einfluss vernachlässigen können, wie wir [illegible] gethan haben, ist zweifelhaft bei so kurzen elektromagnetischen Wellen, wie sie die Lichtwellen sind. Ausserdem wird diese natürliche Uebergangsschicht zwischen zwei Körpern meist noch durch das Poliermittel zu einer künstlichen, dickeren Oberflächenschicht gesteigert.

Wir werden die thatsächlichen Verhältnisse jedenfalls besser treffen, wenn wir Rücksicht auf eine Uebergangsschicht nehmen.

Doch können wir, um die Rechnung nicht unnöthig zu compliciren, annehmen, dass diese Uebergangsschicht von so geringer Dicke l sei, dass für alle Grössen, welche mit l multiplicirt auftreten, nur diejenigen Näherungswerthe einzuführen sind, welche sich für $l = 0$ ergeben würden.

Zunächst wollen wir jetzt die Grenzbedingungen ableiten, d. h. diejenigen Beziehungen, welche für die elektrischen und magnetischen Kräfte an den beiden Grenzen 1 und 2 der Uebergangsschicht bestehen. Als Grenzen derselben definiren wir diejenigen Stellen, an welchen die Dielektricitätsconstante die constanten Werthe ε_1 bezw. ε_2 erreicht hat.

Nach der Bemerkung auf S. 247 bestehen die Hauptgleichungen (18) der S. 249 auch in der Uebergangsschicht.

Multipliciren wir die vierte und fünfte dieser Hauptgleichungen (18) mit einem Dickenelemente dx der Uebergangsschicht und integriren zwischen den beiden Grenzen 1 und 2, so entsteht, da die auftretenden Grössen nicht von y abhängen, falls y senkrecht zur Einfallsebene gelegt wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \alpha \cdot dx &= Y_2 - Y_1, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \beta dx &= \int_1^2 \frac{\partial Z}{\partial x} dx - (X_2 - X_1). \end{aligned} \tag{29}$$

Nun ist nach (21) der S. 251 α und β, ferner nach (21′) der S. 251 auch εZ näherungsweise constant innerhalb der Uebergangsschicht, d. h. man kann α, β, εZ vor das Integralzeichen in obigen Formeln setzen und dafür α_2, β_2, $\varepsilon_2 Z_2$ (oder α_1, β_1, $\varepsilon_1 Z_1$) schreiben. Man erhält so z. B.:

$$\int \alpha \cdot dx = \alpha \int dx, \quad \int_1^2 \frac{\partial Z}{\partial x} dx = \varepsilon_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x} \int_1^2 \frac{dx}{\varepsilon}.$$

Führt man die Abkürzungen ein:

$$\int_1^2 dx = l, \quad \int_1^2 \varepsilon\, dx = p, \quad \int_1^2 \frac{dx}{\varepsilon} = q, \tag{30}$$

wobei l die ganze Dicke der Uebergangsschicht bedeutet und ε ihre Dielektricitätsconstante an der Stelle, deren Dickenelement mit dx bezeichnet ist, so werden die Gleichungen (29):

$$X_1 = X_2 + \frac{l}{c}\frac{\partial \beta_2}{\partial t} - \varepsilon_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x} q, \quad Y_1 = Y_2 - \frac{l}{c}\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}. \tag{31}$$

Ebenso ergeben die beiden ersten Gleichungen des Systemes (18) auf S. 249, wenn man sie mit dx multiplicirt, integrirt, und obiges Näherungsverfahren benutzt:

$$\alpha_1 = \alpha_2 - l\frac{\partial \gamma_2}{\partial x} - \frac{p}{c}\frac{\partial Y_2}{\partial t}, \quad \beta_1 = \beta_2 + \frac{p}{c}\frac{\partial X_2}{\partial t}. \tag{32}$$

Diese Gleichungen (31), (32) treten als Grenzbedingungen an Stelle der früheren (21) der S. 251.

Für die elektrischen und magnetischen Kräfte in den Körpern 1 und 2 können wir die früheren Ansätze (11), (13), (14), (15), (16), (17), (18) dieses Kapitels auch hier verwenden, aber mit einer Erweiterung, die darin besteht, dass die Kräfte in der reflectirten und gebrochenen Welle eine erst aus den Grenzbedingungen (31), (32) abzuleitende Phasendifferenz gegen die Kräfte in der einfallenden Welle besitzen. Ohne eine solche Phasendifferenz kann man die Grenzbedingungen (31), (32) nicht befriedigen.

Am einfachsten lassen sich nun diese Phasendifferenzen in folgender Weise berücksichtigen. Schreiben wir (vgl. Formeln (15) der S. 260) z. B.:

$$Y_r = R_s \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x \sin\varphi' + z \cos\varphi'}{V_1}\right) + \delta\right],$$

so ist Y_r der reelle Theil der complexen Grösse

$$R_s \cdot e^{i\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x \sin\varphi' + z \cos\varphi'}{V_1}\right) + \delta\right]}.$$

Setzen wir nun

$$R_s \cdot e^{i\delta} = \mathrm{R}_s, \tag{33}$$

so können wir schreiben:

$$Y_r = \Re\left\{\mathrm{R}_s \cdot e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x \sin\varphi' + z \cos\varphi'}{V_1}\right)}\right\}, \tag{34}$$

wobei das vorgesetzte $\Re$ bedeutet, dass der reelle Theil der nachfolgenden complexen Grösse zu nehmen ist. Diese in der Klammer stehende complexe Grösse enthält die complexe Amplitude R_s, sodass wir also einen in Y_r auftretenden Phasenzuwachs δ dadurch darstellen können, dass Y_r gleich dem reellen Theil einer Exponentialfunction mit complexem Factor (complexer Amplitude) ist. Analog werden wir auch die übrigen auftretenden elektrischen und magnetischen Kräfte schreiben.

Anstatt dass man nur mit den reellen Theilen der complexen Grössen rechnet, kann man auch, wenn es sich um Behandlung

linearer Gleichungen (auch linearer Differentialgleichungen) handelt, die elektrischen und magnetischen Kräfte zunächst den complexen Grössen selbst gleich setzen, und am Schlusse der Rechnung wieder allein zu den reellen Theilen übergehen, um die physikalische Bedeutung zu gewinnen.

Wir wollen daher jetzt für die elektrischen und magnetischen Kräfte die früheren Ansätze (11), (13), (14), (15), (16), (17), (18) verwenden, ersetzen aber die in ihnen auftretenden reellen Amplituden E_s, E_p, R_s, R_p etc. durch complexe Amplituden $\mathrm{E_s}$, $\mathrm{E_p}$, $\mathrm{R_s}$, $\mathrm{R_p}$ etc. und die *cos* durch die Exponentialgrössen [vgl. (34)]. Dann ergeben die Grenzbedingungen (31) und (32), da sie für $z = 0$ gelten sollen und $X_1 = X_e + X_r$, $\alpha_1 = \alpha_e + \alpha_r$, etc. ist:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{E_p} - \mathrm{R_p}) \cos\varphi &= \mathrm{D_p} \left[\cos\chi + i \frac{2\pi}{T} \left(\sqrt{\varepsilon_2}\, \frac{l}{c} - \frac{\sin^2\chi}{V_2} \varepsilon_2 q\right)\right], \\
\mathrm{E_s} + \mathrm{R_s} &= \mathrm{D_s} \left[1 + i \frac{2\pi}{T} \cos\chi \sqrt{\varepsilon_2}\, \frac{l}{c}\right], \\
(\mathrm{E_s} - \mathrm{R_s}) \sqrt{\varepsilon_1} \cos\varphi &= \mathrm{D_s} \left[\sqrt{\varepsilon_2} \cos\chi - \frac{i\, 2\pi}{T} \left(\frac{\sin^2\chi}{V_2} \sqrt{\varepsilon_2}\, l - \frac{p}{c}\right)\right], \\
(\mathrm{E_p} + \mathrm{R_p}) \sqrt{\varepsilon_1} &= \mathrm{D_p} \left[\sqrt{\varepsilon_2} + \frac{i\, 2\pi}{T} \cos\chi \frac{p}{c}\right].
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Aus diesen Gleichungen sind $\mathrm{R_s}$, $\mathrm{R_p}$, $\mathrm{D_s}$, $\mathrm{D_p}$ in ihrer Abhängigkeit von $\mathrm{E_s}$, $\mathrm{E_p}$ zu berechnen. Uns interessirt hier wesentlich nur das reflectirte Licht. Ersetzt man das Produkt Tc durch λ, der Wellenlänge der betreffenden Lichtsorte im Vacuum, ferner V_2 durch $c : \sqrt{\varepsilon_2}$, so folgt aus (35):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{R_p}}{\mathrm{E_p}} = \\
&\frac{\cos\varphi \sqrt{\varepsilon_2} - \cos\chi \sqrt{\varepsilon_1} + i \frac{2\pi}{\lambda}\left[p \cos\varphi \cos\chi - (l - q\,\varepsilon_2 \sin^2\chi) \sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\right]}{\cos\varphi \sqrt{\varepsilon_2} + \cos\chi \sqrt{\varepsilon_1} + i \frac{2\pi}{\lambda}\left[p \cos\varphi \cos\chi + (l - q\,\varepsilon_2 \sin^2\chi) \sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\right]}, \\
&\frac{\mathrm{R_s}}{\mathrm{E_s}} = \\
&\frac{\cos\varphi \sqrt{\varepsilon_1} - \cos\chi \sqrt{\varepsilon_2} + i \frac{2\pi}{\lambda}\left[l \cos\varphi \cos\chi \sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} - p + l\,\varepsilon_2 \sin^2\chi\right]}{\cos\varphi \sqrt{\varepsilon_1} + \cos\chi \sqrt{\varepsilon_2} + i \frac{2\pi}{\lambda}\left[l \cos\varphi \cos\chi \sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} + p - l\,\varepsilon_2 \sin^2\chi\right]}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Nun ist zu berücksichtigen, dass die den Factor $i\,\frac{2\pi}{\lambda}$ enthaltenden Terme sehr kleine Corrections-Grössen sind, da sie proportional zu der Dicke l der Oberflächenschicht sind. Entwickelt man daher die Ausdrücke (36) nur bis auf die erste Potenz des Verhältnisses $l:\lambda$, so entsteht:

$$\frac{R_p}{E_p} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_2} - \cos\chi\sqrt{\varepsilon_1}}{\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_2} + \cos\chi\sqrt{\varepsilon_1}} \left\{1 + i\,\frac{4\pi}{\lambda}\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{p\cos^2\chi - l\varepsilon_2 + q\varepsilon_2^{\,2}\sin^2\chi}{\varepsilon_2\cos^2\varphi - \varepsilon_1\cos^2\chi}\right\},$$

(37)

$$\frac{R_s}{E_s} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_1} - \cos\chi\sqrt{\varepsilon_2}}{\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_1} + \cos\chi\sqrt{\varepsilon_2}} \left\{1 + i\,\frac{4\pi}{\lambda}\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{l\varepsilon_2 - p}{\varepsilon_1\cos^2\varphi - \varepsilon_2\cos^2\chi}\right\}.$$

Der in der zweiten dieser Gleichungen auftretende Nenner des Correctionsgliedes kann nie verschwinden, d. h. es kann nie sein $\varepsilon_1\cos^2\varphi = \varepsilon_2\cos^2\chi$, denn wenn $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, so ist beständig $\varphi > \chi$, daher $\cos\varphi < \cos\chi$. Dagegen kann der Nenner des Correctionsgliedes in der ersten der Gleichungen (37) verschwinden, falls nämlich ist:

$$\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_2} = \cos\chi\sqrt{\varepsilon_1}\,. \tag{38}$$

Diese Beziehung ist, wie eine einfache Umformung von (38) ergiebt, da $\sqrt{\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1} = n$ ist, für den sogenannten Polarisationswinkel φ erfüllt, der sich nach dem Brewster'schen Gesetz $tg\,\varphi = n$ bestimmt. Für diesen Einfallswinkel folgt daher aus (37) (oder auch direct aus (36)):

$$\frac{R_p}{E_p} = i\,\frac{4\pi}{\lambda}\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{p\cos^2\chi - l\,\varepsilon_2 + g\,\varepsilon_2^{\,2}\sin^2\chi}{(\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_2} + \cos\chi\sqrt{\varepsilon_1})^2}\,. \tag{39}$$

Die Ausdrücke (37) können wir noch weiter vereinfachen unter Rücksicht auf das Brechungsgesetz

$$\sin\varphi : \sin\chi = n = \sqrt{\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1}\,. \tag{40}$$

Denn hieraus folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\cos^2\varphi - \varepsilon_2\cos^2\chi &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2\,, \\ \varepsilon_2\cos^2\varphi - \varepsilon_1\cos^2\chi &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}(\varepsilon_1\sin^2\varphi - \varepsilon_2\cos^2\varphi)\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Die Natur des reflectirten Lichtes bestimmt sich nun vollständig aus dem Verhältniss $R_p : R_s$. Wir wollen annehmen, dass das einfallende Licht linear unter dem Azimuth 45^0 gegen die Einfallsebene (vgl. oben S. 265) polarisirt sei. Dann ist $E_p = E_s$, und aus (37) folgt unter Rücksicht auf (40) und (41):

$$\frac{R_p}{R_s} = -\frac{\cos(\varphi+\chi)}{\cos(\varphi-\chi)}\left\{1 + i\,\frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}\cdot\frac{\cos\varphi\,\sin^2\varphi}{\varepsilon_1\sin^2\varphi-\varepsilon_2\cos^2\varphi}\,\eta\right\}, \quad (42)$$

wobei η eine Abkürzung ist für

$$\eta = p - l(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + q\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2. \quad (43)$$

Für den Polarisationswinkel $tg\,\bar{\varphi} = n$ nimmt (42) den Werth an:

$$\frac{R_p}{R_s} = i\,\frac{\pi}{\lambda}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}\,\eta, \quad (44)$$

wie am einfachsten aus (39) hervorgeht, wenn man (39) durch die zweite der Gleichungen (37) dividirt, und nur bis auf erste Ordnung in $\eta : \lambda$ geht.

Um nun die physikalische Bedeutung der Formeln (42) und (44) zu erkennen, müssen wir berücksichtigen, dass nach der Bezeichnung (33) bedeutet:

$$R_p = R_p\cdot e^{i\delta_p}, \quad R_s = R_s\cdot e^{i\delta_s}, \quad (45)$$

wobei R_p und R_s die Amplituden der parallel und senkrecht zur Einfallsebene liegenden reflectirten elektrischen Kräfte sind, δ_p und δ_s ihre Phasenbeschleunigungen gegen die einfallenden Wellen. Es ist daher

$$\frac{R_p}{R_s} = \frac{R_p}{R_s}\,e^{i(\delta_p-\delta_s)} = \varrho\cdot e^{i\Delta}, \quad (46)$$

wobei ϱ das relative Amplitudenverhältniss, Δ die relative Phasendifferenz beider Componenten bedeutet. Nach (44) folgt daher für den Polarisationswinkel $\bar{\varphi}$, welcher der Gleichung $tg\,\bar{\varphi} = n$ genügt:

$$\bar{\varrho} = \frac{\pi}{\lambda}\,\eta\,\frac{\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, \quad \bar{\Delta} = \pi/2, \quad (47)$$

d. h. das reflectirte Licht ist nicht linear in der Einfallsebene polarisirt, wie wir es früher bei Fehlen einer Uebergangsschicht

abgeleitet hatten, sondern es ist elliptisch polarisirt. Die Bahnellipse liegt mit ihren Hauptaxen parallel und senkrecht zur Einfallsebene (vgl. S. 230) und hat das Axenverhältniss $\bar{\varrho}$. Wir wollen dasselbe den Ellipticitätscoefficienten nennen. Nach (43), (47) und (30) lässt sich derselbe schreiben:

$$(48) \qquad \bar{\varrho} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \cdot \int \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)}{\varepsilon} dx,$$

wobei das Integral über die Uebergangsschicht (Oberflächenschicht) zwischen beiden Körpern zu erstrecken ist.

Nach (48) hat $\bar{\varrho}$ ein positives Vorzeichen, wenn die Dielektricitätsconstante ε der Uebergangsschicht beständig zwischen den Grenzwerthen ε_1 und ε_2 liegt, und falls $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ist. Wenn dagegen ε an gewissen Stellen der Uebergangsschicht grösser als ε_1 und ε_2 ist, so ist $\bar{\varrho}$ negativ, falls $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ist. Die Verhältnisse kehren sich um, falls $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ist, d. h. falls der die Reflexion herbeiführende Körper der schwächer brechende ist. Ein positiver Ellipticitätscoefficient $\bar{\varrho}$ hat nach dem positiven Sinne der Amplitude R_p (vgl. Fig. 83 auf S. 259) zur Folge, dass die elliptische Erregungsbahn im reflectirten Licht entgegen dem Uhrzeiger durchlaufen wird, wenn man, in der Einfallsebene stehend, dem reflectirten Licht entgegenblickt, und die einfallende elektrische Kraft unter 45° gegen die Einfallsebene von links oben nach rechts unten geht. Dagegen beschreibt bei dieser Lage der einfallenden elektrischen Kraft die reflectirte elektrische Kraft die Erregungsbahn im Sinne des Uhrzeigers, falls $\bar{\varrho}$ negativ ist.

Auch für beliebige andere Einfallswinkel ist das reflectirte Licht beständig elliptisch polarisirt, obwohl das einfallende Licht linear polarisirt ist, denn es ergiebt sich stets eine relative Phasendifferenz $\varDelta$ zwischen der p- und s-Componente, welche nach (42) und (46) den Werth hat:

$$(49) \qquad tg\,\varDelta = 4\,\frac{\pi}{\lambda}\,\eta\,\frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\,\frac{\cos\varphi \sin^2\varphi}{\varepsilon_1 \sin^2\varphi - \varepsilon_2 \cos^2\varphi},$$

während das Amplitudenverhältniss ϱ nicht merklich von dem normalen Werth

$$(50) \qquad \varrho = -\frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)},$$

(der sich bei Fehlen einer Oberflächenschicht ergiebt) abweicht,

falls man nur bis auf erste Ordnung in $\eta : \lambda$ geht. Man kann für (49) auch schreiben unter Rücksicht auf (47):

$$tg\,\Delta = 4\bar{\varrho}\,\frac{n^2}{\sqrt{1+n^2}}\,\frac{\sin\varphi\, tg\,\varphi}{tg^2\varphi - n^2}. \tag{51}$$

Wegen des kleinen Betrages von $\bar{\varrho}$ wird die relative Phasendifferenz nur bedeutend in der Nähe des Polarisationswinkels, für den $tg\,\varphi = n$ ist.

Diese theoretischen Erörterungen haben eine vollständige experimentelle Bestätigung gefunden. Zunächst bemerkt man, dass, falls der Einfallswinkel nach dem Brewster'schen Gesetz $tg\,\varphi = n$ gewählt wird, das reflectirte Licht trotzdem nicht vollständig linear polarisirt ist, da es sich, mit einem analysirenden Nicol betrachtet, nicht vollständig auslöschen lässt, allerdings aber stets sehr annähernd. Die Untersuchung des elliptisch polarisirten, reflectirten Lichtes mit einem Analysator und Compensator (vgl. oben S. 235) steht mit den Formeln (50) und (51) in gutem Einklang.

Ferner ergiebt sich, dass der Ellipticitätscoefficient $\bar{\varrho}$ um so geringer ist, je weniger die reflectirende Fläche durch Berührung mit fremden Stoffen verunreinigt ist. So ist z. B. $\bar{\varrho}$ sehr gering an frischen Spaltflächen von Krystallen und an Flüssigkeitsoberflächen, die man durch Ueberfliessen der Flüssigkeit fortwährend frisch erhält. — Bei polirten Spiegeln ist $\bar{\varrho}$ beträchtlicher. Auch die Vorzeichendifferenzen von $\bar{\varrho}$ bei Vertauschung der Rolle der beiden Körper 1 und 2 entsprechen der Theorie. Die Theorie wird auch insofern bestätigt, als bei Reflexion an polirten Körpern $\bar{\varrho}$ im Allgemeinen positiv sich ergiebt. Nur bei den verhältnissmässig schwach brechenden Körpern Flussspath ($n = 1,44$) und Hyalith ($n = 1,42$) ist bisher negative elliptische Polarisation beobachtet worden. In der That kann man je nach der Theorie am ehesten bei schwach brechenden Körpern diese erwarten, falls nämlich der Brechungsindex der Polirschicht über dem des Körpers liegt.

Bei gut gereinigten, polirten Glasoberflächen liegt $\bar{\varrho}$ bei Reflexion in Luft etwa zwischen den Werthen $\bar{\varrho} = 0,03$ (schweres Flintglas vom Brechungsindex $n = 1,75$) und $\bar{\varrho} = 0,007$.

Für Flüssigkeiten steigt (bei Reflexion in Luft) $\bar{\varrho}$ nicht über den Werth 0,01. Wasser zeigt einen negativen Ellipticitätscoefficienten, der bei guter Reinigung der Oberfläche bis zum Werthe 0,00035 herabgedrückt werden kann. Es giebt auch sogenannte neutrale Flüssigkeiten, wie z. B. Glycerin, welche keine elliptische Reflexions-

polarisation besitzen. Nach der hier gegebenen theoretischen Formel für den Ellipticitätscoefficienten ist nicht nothwendig, dass diese Flüssigkeiten überhaupt keine Oberflächenschicht besitzen, d. h. dass eine thatsächliche Discontinuität der Dielektricitätsconstanten beim Uebergang von Luft zur Flüssigkeit stattfinde. Vielmehr können Schichten existiren, welche Zwischenwerthe der Dielektricitätsconstanten besitzen, falls nur zugleich auch noch Schichten von grösserer Dielektricitätsconstante, als dem Werthe in der Flüssigkeit, vorhanden sind.

Bei positiven Ellipticitätscoefficienten (für Reflexion in Luft) kann man eine untere Grenze für die Dicke der Oberflächenschicht angeben. Man erhält nämlich offenbar bei einem bestimmten positiven $\bar{\varrho}$ den kleinsten Werth, welchen die Dicke der Oberflächenschicht mindestens besitzen muss, falls man die Dielektricitätsconstante derselben als constant annimmt und zwar derartig, dass der in (48) auftretende Factor $\frac{(\varepsilon-\varepsilon_1)(\varepsilon-\varepsilon_2)}{\varepsilon}$ ein Maximum wird. Dies tritt für den Fall ein, dass $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, d. h. falls die Dielektricitätsconstante der Oberflächenschicht das geometrische Mittel der Dielektricitätsconstanten der beiden an einander grenzenden Körper ist. Nach (48) wird dann dieser untere Grenzwerth $\bar{l}$ der Oberflächenschicht

$$\frac{\bar{l}}{\lambda} = \frac{\bar{\varrho}}{\pi \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\bar{\varrho}}{\pi \sqrt{1 + n^2}} \frac{n+1}{n-1}, \tag{52}$$

falls n den Brechungsindex vom Körper 2 gegen den Körper 1 (Luft) bedeutet. So ergiebt sich für Flintglas bei $n = 1,75$, $\bar{\varrho} = 0,03$ (cf. oben S. 273), $\bar{l} : \lambda = 0,0175$. Es genügt also schon die Annahme einer sehr geringen Dicke der Oberflächenschicht, um selbst eine starke elliptische Reflexionspolarisation zu erklären.

8. Total-Reflexion. Betrachten wir wiederum den Fall, dass das Licht in einem Körper 1 einfällt und an der Grenzfläche eines Körpers 2 reflectirt wird. Ist der Brechungsindex n von 2 gegen 1 kleiner als 1, so ist der zum Einfallswinkel φ zugehörige Brechungswinkel χ nicht mehr reell, falls ist

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi}{n} > 1. \tag{53}$$

Bei diesen Einfallswinkeln φ giebt es dann überhaupt kein

gebrochenes Licht, sondern das ganze einfallende Licht wird reflectirt (Totalreflexion).

Um in diesen Fällen die Natur des reflectirten Lichtes in seiner Abhängigkeit von der Natur des einfallenden Lichtes zu bestimmen, müssen wir ebenso wie in § 3 dieses Kapitels verfahren. Die ganzen dortigen Entwickelungen und Schlussformeln, z. B. die Formeln (23) und (24), lassen sich schreiben unter Vermeidung des Brechungswinkels χ, indem man $\sin\chi$ nur als eine Abkürzung für $\sin\varphi : n$ auffasst, so dass in den dortigen Formeln (22) und (23) $\cos\chi$ ersetzt wird durch

$$\cos\chi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{n^2}}.$$

Diese Grösse ist, falls $\sin\varphi > n$, imaginär; um dies besser hervortreten zu lassen, wollen wir unter Benutzung der imaginären Einheit $\sqrt{-1} = i$ schreiben:

$$\cos\chi = -i\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - 1}.\text{[1]} \tag{54}$$

Die Formeln (23) müssen unter allen Umständen richtig bleiben[2], denn sie ergeben sich aus den allgemeinen Grenzbedingungen beim Uebergang des Lichtes über die Grenze zweier isotroper Körper, welche ganz unabhängig davon sind, ob Totalreflexion eintritt oder nicht. Aus den Formeln (23) erhalten wir aber unter Benutzung der Formel (54) complexe Amplituden des reflectirten Lichtes, auch wenn die des einfallenden reell sind. Aus der auf S. 268 entwickelten physikalischen Bedeutung complexer Amplituden ergiebt sich also, dass durch Totalreflexion das reflectirte Licht besondere Phasenänderungen gegenüber dem einfallenden Lichte erleidet.

Um dieselben berechnen zu können, schreiben wir gemäss (45)

---

1) $\cos\chi$ muss negativ-imaginär sein. Nach den zu erfüllenden Gleichungen wäre ein positiv- und ein negativ-imaginärer Werth von $\cos\chi$ möglich. Dieser Fall würde aber physikalisch nur dadurch zu realisiren sein, dass der Körper 2 eine Platte bildete, auf deren beiden Seiten Licht einfällt unter gleichem Einfallswinkel φ, der grösser als der Grenzwinkel der Totalreflexion ist. Dies geht aus den im nächsten § 9 angestellten Betrachtungen hervor.

2) Von Oberflächenschichten wollen wir hier absehen. Sie haben nur einen sehr geringen Einfluss bei Totalreflexion, vgl. darüber des Autors Arbeit in Wied. Ann. 43, S. 146, 1891.

für die in (23) auftretenden reflectirten Amplituden die complexen Grössen $R_p \cdot e^{i\delta_p}$, $R_s \cdot e^{i\delta_s}$, sodass nach (23) und (54) wird, da $\sqrt{\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1} = n$ ist,

$$
(55) \quad
\begin{aligned}
E_s \left(\frac{i \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} - 1 \right) &= R_s \cdot e^{i\delta_s} \left(\frac{i \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} + 1 \right), \\
E_p \left(\frac{i \cos \varphi . n}{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} - \frac{1}{n} \right) &= R_p \cdot e^{i\delta_p} \left(\frac{i \cos \varphi . n}{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} + \frac{1}{n} \right).
\end{aligned}
$$

Um die Intensitäten des reflectirten Lichtes zu erhalten, d. h. die Grössen R_s^2 und R_p^2, braucht man nur die Gleichungen (55) mit ihren complex conjugirten Gleichungen zu multipliciren, d. h. mit denjenigen Gleichungen, welche man aus (55) erhält, wenn man nur $-i$ an Stelle von i schreibt.[1]) Es ergiebt sich dadurch sofort

$$
(56) \qquad E_s^2 = R_s^2, \quad E_p^2 = R_p^2,
$$

d. h. die Intensität des reflectirten Lichtes ist völlig gleich der des einfallenden Lichtes (Totalreflexion), und zwar gilt dies für beide Componenten (s- und p-) einzeln.

Die absoluten Phasendifferenzen δ_s und δ_p wollen wir nicht discutiren, dagegen hat die relative Phasendifferenz $\Delta = \delta_p - \delta_s$ Interesse, da nach S. 271 sich daraus die Gestalt der Erregungsbahn im reflectirten Lichte ergiebt. Durch Division der beiden Gleichungen (55) ergiebt sich, falls wir $E_s = E_p$ setzen (d. h. das einfallende Licht linear im Azimuth 45° gegen die Einfallsebene polarisirt ist), da dann nach (56) auch $R_s = R_p$ ist:

$$
(57) \quad \frac{i \cos \varphi - \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{i \cos \varphi . n - \frac{1}{n} \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} = e^{i(\delta_s - \delta_p)} \frac{i \cos \varphi + \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{i \cos \varphi . n + \frac{1}{n} \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}.
$$

Hieraus folgt:

$$
e^{i\Delta} = e^{i(\delta_p - \delta_s)} = \frac{\sin^2 \varphi + i \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi - i \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}},
$$

daher

$$
\frac{1 - e^{i\Delta}}{1 + e^{i\Delta}} = \frac{- i \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi}.
$$

---

1) Jede Gleichung zwischen complexen Grössen kann man ersetzen durch ihre conjugirt complexe Gleichung, da die reellen und imaginären Bestandtheile beider Seiten der Gleichung einzeln einander gleich sein müssen.

Multiplicirt man diese Gleichung mit ihrer conjugirt complexen Gleichung, so entsteht, da $e^{i\Delta} + e^{-i\Delta} = 2 \cos \Delta$ ist:

$$\frac{1 - \cos \Delta}{1 + \cos \Delta} = \left\{ \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi} \right\}^2, \text{ d. h.}$$

$$tg \tfrac{1}{2} \Delta = \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi}. \tag{58}$$

Hieraus ergiebt sich, dass die relative Phasendifferenz Δ für streifende Incidenz $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, sowie für den Grenzwinkel der Totalreflexion $\sin \varphi = n$ verschwindet, dagegen für Zwischenwerthe des Einfallswinkels von Null verschieden ist, d. h. dass das reflectirte Licht elliptisch polarisirt ist, falls das einfallende Licht linear polarisirt ist. Da aus (58) durch Differentiation nach φ folgt:

$$\frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} = \frac{2n^2 - \sin^2 \varphi (1 + n^2)}{\sin^3 \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}},$$

so ist die relative Phasendifferenz Δ ein Maximum für denjenigen Einfallswinkel φ', welcher der Gleichung genügt:

$$\sin^2 \varphi' = \frac{2n^2}{1 + n^2}. \tag{59}$$

Der Maximalwerth Δ' der Phasendifferenz ist dann nach (58) gegeben durch

$$tg \tfrac{1}{2} \Delta' = \frac{1 - n^2}{2n}. \tag{60}$$

Für Glas vom Brechungsindex 1,51, d. h. für $n = 1 : 1,51$ (da die Reflexion im Glase, nicht in Luft erfolgen soll), wird nach (59) $\varphi' = 51^0 20'$, ferner nach (60) wird $\Delta' = 45^0 36'$. Δ nimmt genau den Werth 45^0 sowohl für den Einfallswinkel $\varphi = 48^0 37'$ als für $\varphi = 54^0 37'$ an. Durch zweimalige Totalreflexion unter einem dieser Einfallswinkel erhält man also circular polarisirtes Licht, falls das einfallende Licht linear unter dem Azimuth 45^0 gegen die Einfallsebene polarisirt ist, sodass $E_s = E_p$ ist, da dann Δ 90^0 beträgt und $R_s = R_p$ ist. Eine solche zweimalige Totalreflexion kann man durch Anwendung eines sogenannten Fresnel'schen Parallelepipeds erreichen, d. h. eines Glaskörpers von der in Fig. 81 gezeichneten Form. Falls das Licht senkrecht gegen die Schmalseite des Glaskörpers

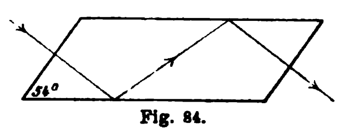


Fig. 84.

einfällt und linear unter 45° gegen die Einfallsebene polarisirt ist. so ist das austretende Licht circular polarisirt.

Ebenso kann man durch dreimalige, viermalige etc. Totalreflexion unter anderen Einfallswinkeln Circularpolarisation erhalten. Die hierfür anzuwendenden Glas-Parallelepipeda haben andere Kantenwinkel, z. B. 69° 12', 74° 42' etc. bei Glas vom Brechungsindex 1,51.

9. Ueber das bei der Totalreflexion in das zweite Medium eindringende Licht. Die bisherigen Erörterungen beziehen sich nur auf das reflectirte Licht. Jedoch auch im zweiten Medium ist der Lichtvector von Null verschieden, da die Gleichungen (23) auf S. 261, 262 von Null verschiedene Werthe für D_s und D_p liefern. — Zwar nimmt die Amplitude mit wachsenden Werthen von z, d. h. in grösserer Tiefe unter der Grenzfläche, schnell ab, denn nach (16) bezw. (18) auf S. 260 sind die elektrischen, bezw. magnetischen Kräfte im zweiten Medium proportional den reellen Theilen der complexen Grösse:

$$e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x \sin\chi + z \cos\chi}{V_2}\right)}, \tag{61}$$

welche, falls man χ durch die früheren Gleichungen (53) und (54) ersetzt, in die Form übergeht:

$$e^{-\frac{2\pi}{TV_2}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - 1}\cdot z} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x \sin\varphi}{nV_2}\right)}. \tag{62}$$

Indess ist für Werthe z, welche nicht unendlich gross gegen die Wellenlänge $TV_2 = \lambda_2$ im zweiten Medium sind, die Amplitude nicht streng Null.

Hier tritt nun zunächst ein scheinbarer Widerspruch mit dem Resultate auf, dass die Intensität, d. h. Energie des reflectirten Lichtes, völlig gleich sein soll der Energie des einfallenden Lichtes, denn woher stammt die Energie des gebrochenen Lichtes?

Dieser Widerspruch löst sich, wenn wir nach der Energieströmung durch die Grenzfläche hindurch fragen. Nach der früheren Formel (24) auf S. 252 ist dieselbe, da hier $\cos(nx) = \cos(ny) = 0$, $\cos(nz) = 1$ ist:

$$\frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\, dt = dt \int (\beta_2 X_2 - \alpha_2 Y_2)\, dS. \tag{63}$$

Bildet man nun die elektrischen und magnetischen Kräfte als

die reellen Theile derjenigen complexen Grössen, welche man aus den rechten Seiten der Formeln (16) und (18) auf S. 260 gewinnt, wenn man den Factor $\cos \frac{2\pi}{T}(t \cdots)$ ersetzt durch $e^{i \frac{2\pi}{T}(t \cdots)}$, so erkennt man, dass wegen des Factors $\cos \chi$, welcher nach (54) rein imaginär ist, α_2 die Phasendifferenz $\pi/_2$ gegenüber Y_2 besitzt, ebenso β_2 die Phasendifferenz $\pi/_2$ gegen X_2, sodass man, falls man schreibt

$$Y_2 = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right),$$

wobei a und δ nicht mehr die Zeit enthalten, die magnetische Kraft α_2 in der Form zu schreiben ist:

$$\alpha_2 = a' \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right).$$

Bildet man nun nach (63) den Energiefluss im Laufe einer Periode von $t = 0$ bis $t = T$, so tritt das Integral auf

$$\int_0^T \alpha_2 Y_2 \, dt = a a' \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) \cdot dt$$

$$= \frac{a a' . T}{4\pi} \left[\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right)\right]_0^T = 0.$$

Ebenso verschwindet das Integral über $\beta_2 X_2 \, dt$. In Summa tritt also im Laufe jeder einzelnen Schwingungsperiode keine Energie vom Medium 1 auf das Medium 2 über. Daher enthält das reflectirte Licht die ganze Energie des einfallenden Lichtes.

Dass keine Energie durch die xz-Ebene strömt, ist nach der Formel (62) direct plausibel. Denn diese stellt Wellen dar, die sich nach der x-Axe fortpflanzen. In der That erhält man eine Energieströmung im Körper 2 nach der früheren Formel (24) auf S. 252, sobald man die Strömungsrichtung (d. h. n) parallel zur x-Axe wählt. Am einen Ende der einfallenden Welle (bei negativen x) muss also etwas Energie auf das Medium 2 übergehen, welche durch die Wellen in ihm beständig nach dem anderen Ende der Wellen im Medium 1 (bei positiven x) transportirt wird.

Diese Wellen inconstanter Amplitude besitzen noch eine andere Eigenthümlichkeit: sie sind nämlich keine Transversalwellen. Denn aus (62) folgt, dass sie sich nach der x-Axe fortpflanzen, wenn es also Transversalwellen wären, so müsste $X_2 = 0$ sein.

Dies ist aber nicht der Fall. — Es ist dies kein Widerspruch mit den früher S. 231 als Beweis für die Transversalität der Lichtwellen benutzten Fresnel-Arago'schen Versuchen, denn sie beziehen sich nur auf die Wellen constanter Amplitude. Als Beweis dafür, dass auch im zweiten Medium bei der Totalreflexion der Lichtvector von Null verschieden ist, wird der von Quincke herrührende Versuch angesehen, dass man diese Wellen inconstanter Amplitude wieder in gewöhnliche Wellen constanter Amplitude zurückverwandeln kann, wenn man die Dicke des Mediums 2 nur sehr gering, d. h. von der Grössenordnung der Lichtwellenlänge, wählt. In der That kann ja an einer sehr dünnen Lamelle eines Körpers 2, der zwischen zwei gleichen Körpern 1 liegt, keine Totalreflexion mehr stattfinden, denn wenn wir schliesslich als Grenzfall die Dicke dieser Lamelle gleich Null setzen, so muss das einfallende Licht ungestört, d. h. ohne Reflexion, weiter gehen, da überhaupt die Homogenität des Mediums nicht gestört ist. — Sobald eine sehr dünne Lamelle des Mediums 2 durchsichtig bleibt auch bei Ueberschreitung des Grenzwinkels der Totalreflexion, muss natürlich das reflectirte Licht an Intensität einbüssen. Theoretisch ergeben sich alle Einzelheiten dieses Falles, sowie man nur an beiden Seiten der Lamelle 2 die früher S. 251 als allgemeingültig aufgestellten Grenzbedingungen (21) benutzt.[1]

10. Benutzung der Totalreflexion zur Bestimmung von Brechungsexponenten. Wenn man das Licht in dem stärker brechenden Medium einfallen lässt und nun allmählich den Einfallswinkel vergrössert, so kennzeichnet sich das Eintreten der Totalreflexion durch eine fast plötzliche Verstärkung des reflectirten und völliges Verschwinden des gebrochenen Lichtes. Es ist aber zu bemerken, dass die Intensitätscurve für das reflectirte und gebrochene Licht in ihrer Abhängigkeit vom Einfallswinkel φ nicht etwa eine Discontinuität erleidet, falls φ den Grenzwinkel der Totalreflexion erreicht, sondern diese Curven ändern sich nur in diesem Gebiete so schnell mit φ, dass man practisch eine Discontinuität wahrzunehmen glaubt, sodass man darauf scharfe Bestimmungen des Brechungsexponenten gründen kann.[2] So besteht z. B. für Glas vom Brechungsindex $n = 1{,}51$ folgende Abhängigkeit der

1) Vgl. darüber das Nähere in Winkelmann's Hdb. Optik, S. 780.

2) Ueber die zu dem Zweck construirten Totalreflectometer und Refractometer vgl. Winkelmann's Hdb. Optik, S. 312.

reflectirten Intensität R_p^2 vom Einfallswinkel φ (es ist $E_p^2 = 1$ gesetzt, ζ ist der Betrag in Bogenminuten, um welchen φ kleiner als der Grenzwinkel der Totalreflexion ist):

ζ	0′	2′	4′	8′	15′	30′
R_p^2	1	0,74	0,64	0,53	0,43	0,25.

11. Intensität der Newton'schen Ringe. Wir wollen die Intensitäten des reflectirten und durchgehenden Lichtes berechnen, falls eine Platte der Dielektricitätsconstante ε_2 und der Dicke d in einem Medium der Dielektricitätsconstante ε_1 eingelagert ist. Die erste Grenzfläche der Platte, auf welche das einfallende Licht trifft, sei die xy-Ebene, die zweite Grenzfläche sei die Ebene $z = d$.

Der Einfachheit halber wollen wir senkrechte Incidenz voraussetzen, schreiben also für das einfallende Licht:

$$X_e = 0, \quad Y_e = E \cdot e^{i\, 2\pi/T\, (t - z/V_1)}, \quad Z_e = 0. \tag{64}$$

Dass wir $X_e = 0$ setzen, ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da bei senkrechter Incidenz alle Resultate, welche für die y-Componenten des Lichtvectors gelten, auch für die x-Componenten unverändert gelten.

Nach den Formeln (14) der S. 259 muss für die einfallende magnetische Kraft, falls die elektrische Kraft durch (64) dargestellt wird, gelten:

$$\alpha_e = -E\sqrt{\varepsilon_1}\, e^{i\, 2\pi/T\, (t - z/V_1)}, \quad \beta_e = 0, \; \gamma_e = 0. \tag{65}$$

Die reflectirte elektrische und magnetische Kraft im Medium 1 wird dargestellt durch (vgl. die Formeln (15) und (17) der S. 260):

$$\begin{gathered} X_r = 0, \quad Y_r = \mathrm{R}\, e^{i\, 2\pi/T\, (t + z/V_1)}, \; Z_r = 0, \\ \alpha_r = \mathrm{R}\sqrt{\varepsilon_1}\, e^{i\, 2\pi/T\, (t + z/V_1)}, \; \beta_r = 0, \; \gamma_r = 0. \end{gathered} \tag{66}$$

An den beiden Plattengrenzen finden nun wiederholte Lichtreflexionen und -Brechungen statt (cf. oben S. 129). Wir brauchen dieselben aber nicht einzeln zu verfolgen, sondern können gleich ihren Gesammteffect in die Rechnung einführen.[1]) Derselbe be-

1) Auch der Ansatz (66) soll der Gesammteffect aller einzelnen Wellenzüge sein, die sich im Medium 1 nach der negativen z-Axe fortpflanzen.

steht darin, dass sich in der Platte Wellen nach der positiven und nach der negativen z-Axe fortpflanzen. Für erstere gilt der Ansatz:

$$
(67)\qquad
\begin{aligned}
&X' = 0, \quad Y' = D' e^{i\,2\pi/T\,(t - z/v_2)}, \quad Z' = 0;\\
&\alpha' = -D' \sqrt{\varepsilon_2}\, e^{i\,2\pi/T\,(t - z/v_2)}, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0,
\end{aligned}
$$

während für letztere Wellen gilt:

$$
(68)\qquad
\begin{aligned}
&X'' = 0, \quad Y'' = D'' e^{i\,2\pi/T\,(t + z/v_2)}, \quad Z'' = 0;\\
&\alpha'' = D'' \sqrt{\varepsilon_2}\, e^{i\,2\pi/T\,(t + z/v_2)}, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = 0.
\end{aligned}
$$

Der Gesammteffect aller durch die Platte hindurch gegangener Wellen möge sein:

$$
(69)\qquad
\begin{aligned}
&X_d = 0, \quad Y_d = D e^{i\,2\pi/T\,(t - z/v_1)}, \quad Z_d = 0,\\
&\alpha_d = -D \sqrt{\varepsilon_1}\, e^{i\,2\pi/T\,(t - z/v_1)}, \quad \beta_d = 0, \quad \gamma_d = 0.
\end{aligned}
$$

An beiden Plattengrenzen ($z = 0$ und $z = d$) haben wir nun die Grenzbedingungen (21) der S. 251 anzuwenden, welche hier die Form annehmen:

$$
(70)\qquad Y_e + Y_r = Y' + Y'', \quad \alpha_e + \alpha_r = \alpha' + \alpha'' \quad \text{für } z = 0,
$$

$$
(71)\qquad Y' + Y'' = Y_d, \quad \alpha' + \alpha'' = \alpha_d \quad \text{für } z = d.
$$

Die Grenzbedingungen (70) liefern:

$$
(70')\qquad E + R = D' + D'', \quad (E - R)\sqrt{\varepsilon_1} = (D' - D'')\sqrt{\varepsilon_2},
$$

während die Grenzbedingungen (71) ergeben:

$$
(71')\qquad D'e^{-ip} + D''e^{+ip} = De^{-iq}, \quad (D'e^{-ip} - D''e^{+ip})\sqrt{\varepsilon_2} = De^{-iq}\sqrt{\varepsilon_1},
$$

falls p und q Abkürzungen sind für:

$$
(72)\qquad p = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{d}{v_2} = 2\pi\frac{d}{\lambda_2}, \quad q = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{d}{v_1} = 2\pi\frac{d}{\lambda_1}.
$$

Aus (71') folgt sofort:

$$
(D'e^{-ip} + D''e^{+ip})\sqrt{\varepsilon_1} = (D'e^{-ip} - D''e^{+ip})\sqrt{\varepsilon_2},
$$

woraus man ableitet:

$$
(73)\qquad D'e^{-ip}(\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}) = D''e^{+ip}(\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}).
$$

Aus (70′) ergiebt sich:

$$\frac{E+\mathrm{R}}{E-\mathrm{R}} = \frac{D'+D''}{D'-D''} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}, \text{ d. h. } \frac{\mathrm{R}}{E} = \frac{D'(\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2})+D''(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})}{D'(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})+D''(\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2})}.$$

Vermöge (73) kann man die letzte Relation schreiben:

$$\frac{\mathrm{R}}{E} = \frac{(e^{+ip}-e^{-ip})(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{e^{+ip}(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^2 - e^{-ip}(\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2})^2}$$

$$= \frac{i \sin p \,.\, (\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{i \sin p \,.\, (\varepsilon_1+\varepsilon_2) + 2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \,.\, \cos p}.$$

Um die Intensität J_r des reflectirten Lichtes zu erhalten, ist die letzte Gleichung mit ihrer conjugirt complexen Gleichung zu multipliciren (cf. S. 276). Man erhält so, falls J_e die Intensität des einfallenden Lichtes bezeichnet:

$$J_r = J_e \frac{\sin^2 p\,(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{\sin^2 p\,(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2} = J_e \frac{\sin^2 p\,(1-n^2)^2}{\sin^2 p\,(1-n^2)^2 + 4n^2}, \tag{74}$$

falls $\varepsilon_2 : \varepsilon_1 = n^2$ gesetzt wird, sodass n den Brechungsindex der Platte 2 gegen das Medium 1 bedeutet.

Aus (70′) und (71′) leitet man ferner leicht ab

$$\frac{De^{-iq}}{E} = \frac{4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{e^{ip}(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^2 - e^{-ip}(\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{i \sin p\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \,.\, \cos p},$$

sodass die Intensität J_d des durchgehenden Lichtes wird:

$$J_d = J_e \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{\sin^2 p\,(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2}. \tag{75}$$

Es besteht also die Beziehung

$$J_d + J_r = J_e, \tag{76}$$

was von vornherein zu erwarten war, da die Platte kein Licht vernichtet.

Nach (74) verschwindet das reflectirte Licht vollkommen für die Werthe: $p = 0, \pi, 2\pi$ etc., d. h. für die Plattendicken $d = 0$, $\frac{1}{2}\lambda_2$, λ_2, $\frac{3}{2}\lambda_2$ etc. Dies steht im Einklang mit dem oben auf S. 130 Formel (17) abgeleiteten Resultate. — Maximale Intensität findet statt für $\sin p = 1$. Dann ist $J_r = J_e \left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2$. [Bei nor-

maler Reflexion an nur einer Grenze ist nach Formel (26) auf S. 263 $J_r = J_e \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2$].

Wenn die Medien 1 und 2 Luft und Glas sind, so ist n etwa $= 1{,}5$. Bei den Newton'schen Ringen sind die Medien 1 und 2 Glas und Luft, d. h. $n = 1 : 1{,}5$. In beiden Fällen wird Formel (74):

$$J_r = J_e \frac{\sin^2 p \, . \, 1{,}56}{\sin^2 p \, . \, 1{,}56 + 9}.$$

Näherungsweise ist daher im Nenner von (74) der Term $\sin^2 p \, (1 - n^2)^2$ gegen $4n^2$ zu vernachlässigen, sodass man an einer Stelle des Newton'schen Farbenglases, an welcher die Dicke der Luftschicht d beträgt, erhält:

$$J_r = J_e \left(\frac{1-n^2}{2n}\right)^2 \sin^2 2\pi \, d/\lambda. \tag{77}$$

λ bezeichnet die Wellenlänge in Luft. Fällt weisses Licht ein und ist J_λ die Intensität des einfallenden Lichtes der Wellenlänge λ, so wird die reflectirte Intensität, falls man von der Dispersion, d. h. der Abhängigkeit des n von λ absieht:

$$J_r = \left(\frac{1-n^2}{2n}\right)^2 \Sigma J_\lambda \sin^2 2\pi \, d/\lambda. \tag{78}$$

Die Farben dünner Blättchen sind also Mischfarben, welche in der aus (78) ersichtlichen Weise aus den reinen Farben zusammengesetzt sind.

12. Inhomogene Körper; krumme Lichtstrahlen. Wir wollen noch kurz die optischen Eigenschaften eines inhomogenen Körpers betrachten, in welchem die Dielektricitätsconstante ε eine Function des Ortes x, y, z ist. Der consequenteste Weg ist, die Differentialgleichungen (18) der S. 249, welche auch für inhomogene Körper gelten, zu integriren, wobei ε als Function von x, y, z gegeben sein muss. Auf diesem Wege würden sich sowohl die Bahnen der Lichtstrahlen, als auch die Intensität der im Innern eines inhomogenen Körpers nothwendig auftretenden Reflexion berechnen. Aber selbst bei den einfachsten Annahmen für ε ist dieser Weg complicirt und ist bisher nicht betreten worden. Man hat sich vielmehr darauf beschränkt, die Gestalt der Lichtstrahlen nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz oder dem Huygens'schen Princip zu berechnen, was ohne Weiteres gelingt, wenn man sich das Medium aus dünnen homogenen Schalen von verschiedenem Brechungsindex

zusammengesetzt denkt. Bei stetiger Aenderung desselben muss sich natürlich der Lichtstrahl krümmen. Von Heath[1]) ist nun für seinen Krümmungsradius ϱ an einem Orte P das Gesetz abgeleitet worden:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\, lg\, n}{d\nu}, \tag{79}$$

wobei ν die Richtung der stärksten Aenderung (des Gefälles) des Brechungsindex n bezeichnet.

Diese Gleichung erklärt die Erscheinungen der Luftspiegelung, wie sie bei anomaler Vertheilung der Luftdichte über der Erdoberfläche, z. B. bei stark erhitztem Sandboden, beobachtet werden. In einer gewissen Höhe über der Erde ist dann nämlich der Brechungsindex n der Luft ein Maximum. Nach (79) muss dann aber $\varrho = \infty$ sein, d. h. der Lichtstrahl hat in dieser Höhe einen Inflexionspunkt. Daher können von einem Gegenstande zwei verschieden gerichtete Strahlen in das Auge eines Beobachters gelangen, derselbe sieht also den Gegenstand doppelt, und zwar einmal in aufrechter, einmal in verkehrter Lage.[2])

Eine interessante Anwendung der Theorie der gekrümmten Lichtstrahlen ist von A. Schmidt[3]) für die Vorstellung von der Constitution der Sonne gemacht worden, indem er zeigt, dass ein leuchtender Gasball von den Dimensionen der Sonne, dessen Dichte ohne Unstetigkeitsgrenze von aussen nach innen zunimmt, einen Anblick gleich dem der Sonne gewähren muss, d. h. scheinbar eine scharfe Begrenzungslinie zeigt. Ein Lichtstrahl nämlich, welcher nach einem solchen Gasball innerhalb eines gewissen Distanzwinkels φ vom Centrum hinzielt, wird nach dem Innern des Gasballs abgelenkt und um sein Centrum vielfach herumgewunden. Er wird daher zu Tiefen geführt, welche ein continuirliches Spectrum aussenden. Denn ein glühendes Gas kann bei genügendem Druck dies thun. Ein Sehstrahl aber, welcher einen grösseren Distanzwinkel als φ vom Centrum des Gasballs besitzt, muss sich wieder vom Gasball entfernen, ohne stark leuchtende Schichten durchsetzt zu haben. Daher erscheint die Sonne als

1) Heath, Geom. Optik, deutsch von Kanthack. Berlin 1894, S. 363.

2) Nähere Ausführung dieser interessanten Erscheinungen und Zusammenstellung der Literatur findet sich in Winkelmann, Hdb. d. Physik, Optik, S. 344—384 (Autor Straubel).

3) A. Schmidt, Die Strahlenbrechung auf der Sonne. Stuttgart, 1891.

scharf begrenzte Scheibe vom Sehwinkel 2φ, obwohl eine Unstetigkeitsgrenze der Dichte fehlt.

Ueber die experimentelle Darstellung gekrümmter Lichtstrahlen vgl. J. Macé de Lépinay und A. Perot (Ann. de chim. et de phys. (6) 27, p. 94, 1892) und O. Wiener (Wied. Ann. 49, S. 105, 1893). Letzterer hat gekrümmte Lichtstrahlen verwendet zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung.

Kapitel III.

Optische Eigenschaften durchsichtiger Krystalle.

1. Differentialgleichungen und Grenzbedingungen. Ein Krystall unterscheidet sich dadurch von einem isotropen Körper, dass seine Eigenschaften in verschiedenen Richtungen verschieden sind. Die specifischen Eigenschaften eines Körpers sind nun in der elektromagnetischen Theorie lediglich durch seine Dielektricitätsconstante definirt, wenn wir an dem schon oben S. 249 eingenommenen Standpunkte festhalten, dass die Magnetisirungsconstante aller Körper stets gleich 1 zu setzen ist.

Revidiren wir nun die früher auf S. 249 und ff. gegebene Ableitung der Differentialgleichungen für einen isotropen Körper, so ergiebt sich, dass die dortigen Gleichungen (17) allein die specifischen Eigenschaften des Körpers, d. h. seine Dielektricitätsconstante, enthalten. Dagegen sind die Gleichungen (7) und (11) auch in einem Krystall gültig, wie schon oben bemerkt wurde. Die Gleichungen (17) sind also allein zu erweitern, da in einem Krystall die Dielektricitätsconstante von der Richtung der elektrischen Kraftlinien abhängt. Der allgemeinste Ansatz für die Erweiterung der Gleichungen (17) auf S. 249 bestände nun in

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
4\pi \dot{j}_x &= \varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t},\\
4\pi \dot{j}_y &= \varepsilon_{21}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{22}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{23}\frac{\partial Z}{\partial t},\\
4\pi \dot{j}_z &= \varepsilon_{31}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{32}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{33}\frac{\partial Z}{\partial t},
\end{aligned}
$$

da die Stromcomponenten jedenfalls lineare Functionen der $\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Z}{\partial t}$ bleiben müssen. Dieser Ansatz (1) würde besagen, dass im Allgemeinen bei einem Krystall die Richtung der Stromlinien nicht zusammenfällt mit der Richtung der Kraftlinien, da z. B. falls X allein von Null verschieden ist, trotzdem auch j_y und j_z von Nnll verschieden sind.

Die frühere Formel (23) der S. 252 für die Energieströmung ist dadurch abzuleiten, dass die allgemein gültigen Gleichungen (9) und (11), nämlich:

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \ldots \frac{4\pi}{c} s_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \ldots$$

bezw. mit $X d\tau, \cdots \alpha d\tau$ multiplicirt werden und nach $d\tau$ (Volumelement) integrirt wird. Es ergiebt sich dadurch

$$\frac{4\pi}{c}\int (j_x X + j_y Y + j_z Z)\, d\tau$$
$$+ \frac{4\pi}{c}\int (s_x \alpha + s_y \beta + s_z \gamma)\, d\tau = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{E}\, d\tau,$$

wobei $\mathfrak{E}$ die Energie des Volumelementes $d\tau$ bedeutet. An dieser Formel halten wir auch in einem Krystall fest, da specifische Eigenschaften des Mediums in der Formel nicht vorkommen. Für die Aenderung der elektromagnetischen Energie $\mathfrak{E}$ der Volumeneinheit im Laufe der Zeit besteht also die Beziehung:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = j_x X + j_y Y + j_z Z + s_x \alpha + s_y \beta + s_z \gamma.$$

Die drei letzten Terme dieser Gleichung bilden nun, da das zweite Tripel der Gleichungen (17) der S. 249 auch hier gelten soll (mit dem Werthe $\mu = 1$), einen Differentialquotienten nach der Zeit. Es ist nämlich:

$$s_x \alpha + s_y \beta + s_z \gamma = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Folglich muss auch $j_x X + j_y Y + j_z Z$ ein Differentialquotient nach der Zeit sein. Damit dies aber nach dem Ansatz (1) möglich ist, müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}, \ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}, \ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}, \tag{2}$$

und es wird dann der Theil $\mathfrak{E}$ der Energie, der von den elektrischen Kräften abhängt:

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_{11} X^2 + \varepsilon_{22} Y^2 + \varepsilon_{33} Z^2 + 2\varepsilon_{23} YZ + 2\varepsilon_{31} ZX + 2\varepsilon_{12} XY). \tag{3}$$

Durch Transformation des Coordinatensystems lässt sich nun $\mathfrak{E}_1$ stets auf die kanonische Form bringen:

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 Z^2). \tag{4}$$

Für diese Wahl der Coordinatenaxen verschwinden also die ε_{hk}, und die Gleichungen (1) nehmen die vereinfachte Gestalt an:

$$j_x = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}, \quad j_y = \frac{\varepsilon_2}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad j_z = \frac{\varepsilon_3}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t}. \tag{5}$$

Diese Coordinatenaxen zeichnen sich also dadurch aus, dass in ihren Richtungen die elektrische Strömung in die Richtung der elektrischen Kraft fällt. Wir wollen diese Axen die elektrischen Symmetrieaxen nennen, da der Krystall in elektrischer Hinsicht sich symmetrisch verhält in Bezug auf diese drei zu einander senkrechten Richtungen, oder auch in Bezug auf die drei zu einander senkrechten Ebenen, welche durch diese 3 Axen gelegt werden können. — Die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ haben die Bedeutung der Dielektricitätsconstanten, falls die elektrischen Kraftlinien in die Richtung einer der drei elektrischen Symmetrieaxen fallen; wir wollen sie die Hauptdielektricitätsconstanten nennen.

Wir wollen, wie schon oben bemerkt ist, nicht die Annahme einführen, dass der Krystall in verschiedenen Richtungen merkbare Verschiedenheiten seiner Magnetisirungsconstante besässe. Wenngleich dies streng genommen nicht der Fall ist, wie man aus den Einstellungstendenzen von Krystallkugeln in starken magnetischen Feldern wahrnehmen kann, so kann man diese Annahme für Lichtschwingungen doch machen, ohne in Widerspruch mit der Erfahrung zu gelangen, gerade wie schon bei der Behandlung isotroper Körper ihre Magnetisirungsconstante einfach gleich 1 gesetzt wurde.[1])

In den Differentialgleichungen (18) auf S. 249, welche für

1) Ueber den theoretischen Grund, weshalb für Lichtschwingungen beständig $\mu = 1$ zu setzen ist, vgl. die späteren Entwickelungen im Kapitel VII.

isotrope Körper gelten, sind daher nur diejenigen Modificationen anzubringen, welche durch die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante nach der Richtung bedingt werden. Die Dielektricitätsconstante tritt nur in den ersten drei Gleichungen (18) auf. Ihr Inhalt besagte, dass die elektrischen Stromcomponenten proportional zu den Grössen $\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}$ etc. seien. Da die Stromcomponenten im Krystall durch die Gleichungen (1) bezw. (5) gegeben sind, so werden daher bei Zugrundelegung der elektrischen Symmetrieaxen als Coordinatenaxen die allgemein giltigen Differentialgleichungen (7) und (11) der S. 245 und 247 des elektromagnetischen Feldes in einem Krystall:

$$\frac{\varepsilon_1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{\varepsilon_2}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon_3}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{7}$$

Für ein beliebig liegendes Coordinatensystem würden die Gleichungen (6) zu ersetzen sein durch:

$$\frac{1}{c}\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \text{ etc.} \tag{6'}$$

Die Bedingungen, welche an der Grenze zweier sich berührender Krystalle, oder eines Krystalls und eines isotropen Mediums (z. B. Luft) zu erfüllen sind, erhält man nach denselben Ueberlegungen, wie sie in § 8 des Kapitels I (S. 250) angestellt worden sind; sie fordern: Stetigkeit der der Grenze parallelen elektrischen und magnetischen Kraft beim Uebergang über die Grenze.

2. Lichtvector und Lichtstrahl. Schon bei Betrachtung isotroper Medien (S. 263 ff.) hatten wir gesehen, dass man formal verschiedene Gesetze für die optischen Erscheinungen erhält, je nachdem der Lichtvector mit der elektrischen oder der magnetischen Kraft identificirt wird. Beide Verfügungen führen allerdings zu denselben beobachtbaren Resultaten, wenn man von den bei stehenden Wellen wahrnehmbaren Erscheinungen absieht. Aehnlich verhält es sich hier in der Krystalloptik, nur tritt hier noch eine neue Möglichkeit hinzu, nämlich die elektrische Strömung als Lichtvector zu wählen. Seine Componenten sind dann proportional zu $\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t}$, $\varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t}$, $\varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t}$. Dadurch erhalten wir drei Theorien der Krystalloptik, welche formal von einander verschieden sind, sowohl

in Bezug auf die Lage des Lichtvectors zur Polarisationsebene, als auch in Bezug auf die Lage des Lichtvectors zur Wellennormale bei ebenen Wellen. Was zunächst die letztere anbelangt, so ergiebt sich nach S. 257, dass der Lichtvector senkrecht zu der Wellennormale bei ebenen Wellen liegt, d. h. dass ebene Wellen **transversale** sind, wenn seine Componenten, die mit u, v, w bezeichnet werden mögen, der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Durch Differentiation der Gleichungen (7) bezw. nach x, y, z und Addition erhält man nun hier, gerade analog wie früher auf S. 254:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = 0, \tag{9}$$

d. h. es bestehen transversale Wellen, falls die magnetische Kraft als Lichtvector interpretirt wird.

Wendet man eine gleiche Operation auf die drei Gleichungen (6) an, so entsteht:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t}\right) = 0, \tag{10}$$

d. h. man erhält ebenfalls Transversalwellen, falls die elektrische Strömung als Lichtvector interpretirt wird.

Dagegen erhält man keine Transversalwellen, falls die elektrische Kraft als Lichtvector interpretirt wird, da in Folge der letzten Gleichung durch die Verschiedenheit der ε_1, ε_2, ε_3 die Ungleichung besteht:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \gtrless 0. \tag{11}$$

Die Polarisationsebene geht durch die Richtung der Wellennormale und der magnetischen Kraft, wie wir es schon oben S. 263 bei isotropen Medien constatirten.

Die formalen Verschiedenheiten der drei möglichen krystalloptischen Theorien sind also folgende:

1) **Die magnetische Kraft ist der Lichtvector.** Ebene Wellen sind transversal, der Lichtvector liegt in der Polarisationsebene. (Mechanische Theorie von F. Neumann, G. Kirchhoff, W. Voigt u. A.)

2) Die elektrische Kraft ist der Lichtvector. Ebene Wellen sind nicht streng transversal, der Lichtvector liegt nahezu senkrecht zur Polarisationsebene. (Mechanische Theorien von Ketteler, Boussinesq, Lord Rayleigh u. A.)

3) Die elektrische Strömung ist der Lichtvector. Ebene Wellen sind transversal, der Lichtvector liegt senkrecht zur Polarisationsebene. (Mechanische Theorie von Fresnel.)

Diese formalen Verschiedenheiten der Theorien können zu beobachtbaren Unterschieden nicht führen, falls man, wie es bei den krystalloptischen Erscheinungen, z. B. beim Durchgang des Lichtes durch eine Krystallplatte, stets der Fall ist, schliesslich die Lichteffecte doch nur in einem isotropen Medium bei fortschreitenden (nicht stehenden) Wellen beobachtet. Man muss nur jedes Problem in voller Strenge, d. h. mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen, lösen.

Dann ist das zu behandelnde System der Differentialgleichungen und Grenzbedingungen ein bestimmt gegebenes; für die elektrische Kraft im isotropen Aussenmedium erhält man eine ganz bestimmte Lösung, unabhängig davon, was als Lichtvector im Krystall interpretirt ist; falls die magnetische Kraft im isotropen Aussenmedium als Lichtvector interpretirt wird, an Stelle der elektrischen Kraft, so erhält man gleiche beobachtbare Resultate, da nach den Grundgleichungen die Intensität der fortschreitenden magnetischen Welle stets gleich der Intensität der fortschreitenden elektrischen Welle ist.

Die elektromagnetische Lichttheorie bietet also den Vortheil, dass sie eine Reihe formal verschiedener Theorien gleichzeitig umfasst und zeigt, weshalb sie zu demselben Endziel führen müssen.

Den Lichtstrahl definiren wir nach S. 252 als Bahn der Energieübertragung. Nach der auf S. 288 aufgestellten Formel für die elektromagnetische Energie im Krystall bleibt auch hier die frühere Formel (23) der S. 252 für den Energiefluss bestehen. Die Richtungscosinus des Lichtstrahls sind also auch im Krystall den früher (S. 253) Formeln (25), definirten Grössen f_x, f_y, f_z proportional.

Der Lichtstrahl steht also senkrecht auf der elektrischen und magnetischen Kraft. Er fällt daher im Allgemeinen nicht mit der Wellennormale ebener Wellen zusammen, da diese nicht senkrecht zur elektrischen Kraft steht, wegen der Ungleichung (11).

3. Das Fresnel'sche Gesetz für die Lichtgeschwindigkeit. Um die Lichtgeschwindigkeit im Krystall zu finden, stellen wir uns

aus den Hauptgleichungen (6) und (7) solche Differentialgleichungen her, welche entweder nur die elektrische Kraft, oder nur die magnetische Kraft enthalten. Ersteres erreicht man, wenn man die drei Gleichungen (6) nach t differencirt und für die auf der rechten Seite auftretenden Grössen $\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\beta}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (7) einsetzt. Man erhält so aus der ersten der Gleichungen (6):

$$\frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann man in der mehr symmetrischen Form schreiben:

$$\frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \tag{12}$$

Analog erhält man aus den beiden anderen Gleichungen (6):

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_2}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \Delta Y - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \\ \frac{\varepsilon_3}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= \Delta Z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Was wir als Lichtvector interpretiren, bedingt nach den Auseinandersetzungen des vorangegangenen Paragraphen nur formale Verschiedenheiten. Um Anschluss an die Fresnel'sche Theorie zu gewinnen, setzen wir den Lichtvector proportional zur elektrischen Strömung, indem wir als Componenten u, v, w des Lichtvectors bei ebenen Wellen schreiben:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon_1 X = A\mathfrak{M}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right), \\ v &= \varepsilon_2 Y = A\mathfrak{N}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right), \\ w &= \varepsilon_3 Z = A\mathfrak{P}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Dabei soll sein

$$\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 = m^2 + n^2 + p^2 = 1. \tag{14}$$

Es bedeutet dann A die Amplitude des Lichtvectors, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ seine Richtungscosinus gegen die Coordinatenaxen (elektrischen Symmetrieaxen), m, n, p die Richtungscosinus der Wellennormale, V die Licht-

geschwindigkeit, gemessen in Richtung der Wellennormale (sogenannte Normalengeschwindigkeit). Wegen der Gleichung (10) besteht die Beziehung:

$$\mathfrak{M}m + \mathfrak{N}n + \mathfrak{P}p = 0, \tag{15}$$

welche die Transversalität der Wellen ausdrückt.

Das Einsetzen der Werthe (13) in (12) liefert (es ist C für das obige c geschrieben):

$$\frac{\mathfrak{M}}{C^2} = \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon_1 V^2} - \frac{m}{V^2}\left(\frac{\mathfrak{M}m}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{N}n}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{P}p}{\varepsilon_3}\right),$$

$$\frac{\mathfrak{N}}{C^2} = \frac{\mathfrak{N}}{\varepsilon_2 V^2} - \frac{n}{V^2}\left(\frac{\mathfrak{M}m}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{N}n}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{P}p}{\varepsilon_3}\right),$$

$$\frac{\mathfrak{P}}{C^2} = \frac{\mathfrak{P}}{\varepsilon_3 V^2} - \frac{p}{V^2}\left(\frac{\mathfrak{M}m}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{N}n}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{P}p}{\varepsilon_3}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $C^2 V^2$ und setzt zur Abkürzung:

$$C^2 : \varepsilon_1 = a^2, \quad C^2 : \varepsilon_2 = b^2, \quad C^2 : \varepsilon_3 = c^2,\text{[1]} \tag{16}$$

$$a^2 \mathfrak{M} m + b^2 \mathfrak{N} n + c^2 \mathfrak{P} p = G^2, \tag{16'}$$

so entsteht

$$\mathfrak{M}(a^2 - V^2) = m\,G^2, \quad \mathfrak{N}(b^2 - V^2) = n\,G^2, \quad \mathfrak{P}(c^2 - V^2) = p\,G^2, \tag{17}$$

d. h.

$$\mathfrak{M} = G^2 \frac{m}{a^2 - V^2}, \quad \mathfrak{N} = G^2 \frac{n}{b^2 - V^2}, \quad \mathfrak{P} = G^2 \frac{p}{c^2 - V^2}. \tag{17'}$$

Durch Multiplication dieser letzten drei Gleichungen mit bezw. m, n, p und Addition entsteht auf der linken Seite der Werth Null wegen der Beziehung (15), sodass man mit Fortlassung des Factors G^2 erhält:

$$\frac{m^2}{a^2 - V^2} + \frac{n^2}{b^2 - V^2} + \frac{p^2}{c^2 - V^2} = 0. \tag{18}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für V^2 als Function von m, n, p; es ergeben sich also zu jeder bestimmten Richtung der Wellennormale zwei verschiedene Lichtgeschwindigkeiten. Die Formel (18) heisst das Fresnel'sche Gesetz.

Für $m = 1$, $n = p = 0$ sind die beiden Lichtgeschwindig-

---

1) Der Buchstabe c kommt also im Buche in zwei verschiedenen Bedeutungen vor. Im Allgemeinen bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum. Nur in der Krystalloptik soll hierfür C geschrieben werden und c hat hier die Bedeutung $C : \sqrt{\varepsilon_3}$.

keiten $V_1^2 = b^2$, $V_2^2 = c^2$. Für den Fall, dass die Wellennormale in einer der elektrischen Symmetrieaxen des Krystalls liegt, sind also zwei von den Grössen a, b, c die Lichtgeschwindigkeiten. Diese Grössen a, b, c werden daher die Hauptlichtgeschwindigkeiten genannt.

Dasselbe Geschwindigkeitsgesetz (18) ergiebt sich, falls man die magnetische Kraft oder die elektrische Kraft als Lichtvector wählt.

4. Die Lage der Lichtschwingungen. Zu jeder Wellennormale giebt es zwei sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzende Wellen. Die Lage der charakteristischen Grössen, z. B. der elektrischen Strömung, ist in ihnen eine ganz bestimmte, und zwar in beiden Wellen eine verschiedene. Bezeichnet man nämlich die Zugehörigkeit zu den beiden verschiedenen Wellen durch Indices 1 und 2, so ergiebt sich aus (18′) die Lage des Lichtvectors aus:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}_1 : \mathfrak{N}_1 : \mathfrak{P}_1 &= \frac{m}{a^2 - V_1^2} : \frac{n}{b^2 - V_1^2} : \frac{p}{c^2 - V_1^2}, \\ \mathfrak{M}_2 : \mathfrak{N}_2 : \mathfrak{P}_2 &= \frac{m}{a^2 - V_2^2} : \frac{n}{b^2 - V_2^2} : \frac{p}{c^2 - V_2^2}. \end{aligned}$$

In Richtung einer bestimmten Wellennormale können sich also nur zwei linear polarisirte Wellen fortpflanzen, und zwar sind diese Wellen senkrecht zu einander polarisirt. Denn aus (19) erhält man:

$$(20)\qquad \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \sim \frac{m^2}{(a^2 - V_1^2)(a^2 - V_2^2)} + \text{etc.}$$

Nun ist aber

$$\frac{m^2}{(a^2 - V_1^2)(a^2 - V_2^2)} = \frac{m^2}{V_1^2 - V_2^2}\left(\frac{1}{a^2 - V_1^2} - \frac{1}{a^2 - V_2^2}\right),$$

sodass die linke Seite von (20) proportional ist zu

$$\frac{1}{V_1^2 - V_2^2}\left\{\frac{m^2}{a^2 - V_1^2} + \frac{n^2}{b^2 - V_1^2} + \frac{p^2}{c^2 - V_1^2} - \frac{m^2}{a^2 - V_2^2} - \frac{n^2}{b^2 - V_2^2} - \frac{p^2}{c^2 - V_2^2}\right\}.$$

Da nun aber sowohl V_1 als V_2 der Gleichung (18) genügt, so ist dieser ganze Ausdruck Null. Folglich liegt der Lichtvector $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{P}_1$ senkrecht zum Vector $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{P}_2$.

Die Lichtgeschwindigkeit ist eine eindeutige Funktion

der Schwingungsrichtung. Denn das Fresnel'sche Gesetz (18) kann man unter Rücksicht auf (19) schreiben

$$(a^2 - V^2)\,\mathfrak{M}^2 + (b^2 - V^2)\,\mathfrak{N}^2 + (c^2 - V^2)\,\mathfrak{P}^2 = 0\,,$$

d. h. da $\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 = 1$ ist:

$$V^2 = a^2\mathfrak{M}^2 + b^2\mathfrak{N}^2 + c^2\mathfrak{P}^2. \tag{18'}$$

5. Die Normalenfläche. Um eine Anschauung davon zu haben, in welcher Weise die Lichtgeschwindigkeit mit der Richtung der

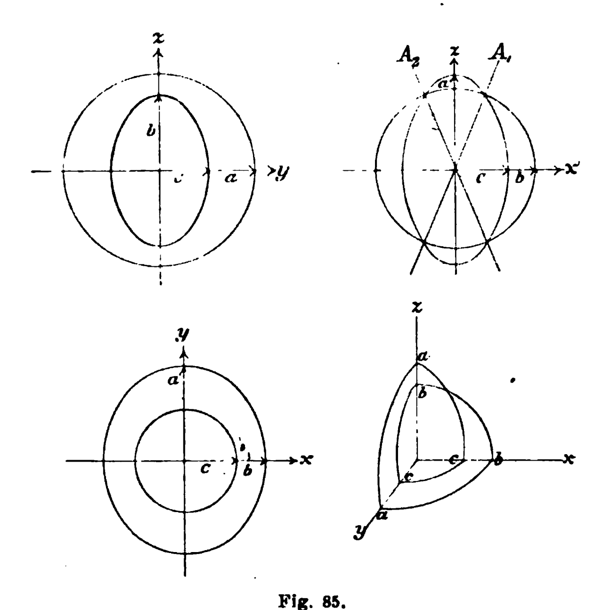


Fig. 85.

Wellennormale variirt, empfiehlt es sich, von einem gewissen Anfangspunkt 0 aus auf allen beliebigen Normalenrichtungen die beiden Lichtgeschwindigkeiten als Radienvectoren abzutragen. Man erhält dadurch eine zweischalige Fläche, die sogenannte Normalenfläche. In einer elektrischen Symmetrieebene, z. B. der yz-Ebene ($m = 0$), sind nach (18) die beiden Wurzeln für die Geschwindigkeit:

$$V_1{}^2 = a^2, \quad V_2{}^2 = b^2p^2 + c^2n^2, \tag{21}$$

d. h. der Schnitt der Normalenfläche mit einer elektrischen Symmetrieebene besteht in einem Kreise und einem Ovale. Falls $a > b > c$ ist, erhält man daher die in Figur 85 gezeichneten Schnitte der Wellenfläche mit den Symmetrieebenen. In der xz-Ebene

fallen danach für zwei Richtungen der Wellennormale, die durch A_1 und A_2 bezeichnet sind, die beiden Wurzeln V_1 und V_2 nothwendig zusammen, da beide Schalen der Wellenfläche zum Schnitt kommen. Es lässt sich zeigen, dass dies für keine anderen Richtungen der Wellennormale eintreten kann. Die quadratische Gleichung für V^2 ist nämlich nach (18):

$$(22)\qquad \begin{aligned} V^4 - V^2 \left\{m^2 (b^2 + c^2) + n^2 (c^2 + a^2) + p^2 (a^2 + b^2)\right\} \\ + m^2 b^2 c^2 + n^2 c^2 a^2 + p^2 a^2 b^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichung liefert, falls man setzt:

$$(23)\qquad M = m^2 (b^2 - c^2), \quad N = n^2 (c^2 - a^2), \quad P = p^2 (a^2 - b^2),$$

$$(24)\qquad \begin{aligned} 2V^2 = m^2 (b^2 + c^2) + n^2 (c^2 + a^2) + p^2 (a^2 + b^2) \\ \pm \sqrt{M^2 + N^2 + P^2 - 2MN - 2NP - 2MP}. \end{aligned}$$

Da nun $a > b > c$, so ist M und P positiv, N negativ. Da man den Radicanden schreiben kann in der Form:

$$(M + N - P)^2 - 4MN,$$

so besteht er aus zwei positiven Gliedern. Ein Zusammenfallen beider Wurzeln für V^2 erfordert daher die beiden Bedingungen:

$$M + N - P = 0, \quad MN = 0.$$

Es kann nun M nicht gleich Null sein, weil dann $N = P$ sein müsste, was nicht möglich ist, da N negativ und P positiv ist. Folglich verschwindet der Radicand nur für

$$N = 0, \quad M = P,$$

d. h.

$$(25)\qquad n = 0, \quad m^2 (b^2 - c^2) = p^2 (a^2 - b^2),$$

oder da $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ ist, so ergiebt sich

$$(26)\qquad m = + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad n = 0, \quad p = + \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Hierdurch sind also die beiden Richtungen der Wellennormale bestimmt, für welche die beiden Lichtgeschwindigkeiten zusammenfallen. Man nennt diese Richtungen die optischen Axen. Die elektrischen Symmetrieaxen x und z, welche die Winkel zwischen

den optischen Axen halbiren, werden auch die optischen Mittellinien des Krystalls genannt.

Der Werth der beiden Wellen gemeinsamen Lichtgeschwindigkeit, falls die Wellennormale in die optische Axe fällt, ist $V_1 = V_2 = b$. Dies geht direct aus der Zeichnung in Figur 85 hervor, ebenso aus der Gleichung (24) in Verbindung mit (26). Die Schwingungsrichtung in diesen Wellen ist daher nach (19) unbestimmt, da in jenen Gleichungen der unbestimmte Ausdruck $n : b^2 - V^2 = 0 : 0$ auftritt. In Richtung der optischen Axe kann sich daher jede Lichtart fortpflanzen, d. h. sowohl beliebig polarisirtes, als auch natürliches Licht.

Die Lichtgeschwindigkeit V lässt sich bequemer als nach (24) berechnen, wenn man die Winkel g_1 und g_2 einführt, welche die Wellennormale mit den optischen Axen bildet. Als positive Richtung der einen optischen Axe A_1 sei diejenige gerechnet, welche spitze Winkel mit der x- und z-Axe bildet. Ihre Richtungscosinus sind also nach (26):

$$m_1 = + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad n_1 = 0, \quad p_1 = + \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \tag{26'}$$

Als positive Richtung der anderen optischen Axe A_2 sei diejenige gerechnet, welche einen spitzen Winkel mit der z-Axe, aber einen stumpfen Winkel mit der x-Axe bildet. Ihre Richtungscosinus sind daher:

$$m_2 = - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad n_2 = 0, \quad p_2 = + \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \tag{26''}$$

Die Cosinus der Winkel g_1, g_2 zwischen Wellennormale und den positiven Richtungen der Axen A_1, A_2 sind daher:

$$cos\, g_1 = mm_1 + nn_1 + pp_1\,, \text{ d. h.}$$

$$\left.\begin{aligned} cos\, g_1 &= m \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} + p \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \\ cos\, g_2 &= \quad m \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} + p \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

In Folge der Relation $n^2 = 1 - m^2 - p^2$ kann man nun leicht die Beziehung ableiten:

$$\begin{aligned} m^2 (b^2 + c^2) + n^2 (c^2 + a^2) + p^2 (a^2 + b^2) \\ = a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\, cos\, g_1\, cos\, g_2\,, \end{aligned} \tag{28}$$

$$M^2 + N^2 + P^2 - 2MN - 2NP - 2MP = (a^2 - c^2)^2 \sin^2 g_1 \sin^2 g_2\,.$$

Folglich wird nach (24):

$$(29)\qquad \begin{aligned} 2V_1^2 &= a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\cos(g_1 - g_2), \\ 2V_2^2 &= a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\cos(g_1 + g_2). \end{aligned}$$

6. Geometrische Construction der Wellenfläche und der Schwingungsrichtung. Nach Fresnel kann man die Lichtgeschwindigkeit und die Schwingungsrichtung mit Hülfe einer Fläche, des Ovaloids, in folgender Weise geometrisch construiren: Der Radiusvector ϱ des Ovaloids bilde mit den Coordinatenaxen die Richtungscosinus $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Die Gleichung des Ovaloids lautet dann:

$$(30)\qquad \varrho^2 = a^2\vartheta_1^2 + b^2\vartheta_2^2 + c^2\vartheta_3^2,$$

a, b, c sind die Hauptaxen des Ovaloids. Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenebene zu finden, legen wir parallel derselben eine Ebene durch das Centrum des Ovaloids und suchen den grössten und kleinsten Radiusvector ϱ_1 und ϱ_2 des erhaltenen Ovalschnittes. Diese sind gleich den beiden Lichtgeschwindigkeiten der betreffenden Wellenebene, die Richtungen von ϱ_1 und ϱ_2 geben die Schwingungsrichtungen an, und zwar die Richtung von ϱ_1 für die mit der Geschwindigkeit ϱ_1 fortschreitende Welle.

Um diese Construction als richtig zu erweisen, müssen wir berücksichtigen, dass $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ noch die beiden Bedingungen befriedigen:

$$(31)\qquad 1 = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2,$$

$$(32)\qquad 0 = m\vartheta_1 + n\vartheta_2 + p\vartheta_3 .$$

Letztere Gleichung drückt aus, dass der Ovalschnitt senkrecht zur Wellennormale steht. Um nun diejenigen Richtungen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ zu finden, für welche ϱ ein Maximum oder Minimum annimmt, kann man nach Regeln der Differentialrechnung $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ als von einander unabhängige Variabele betrachten, wenn man zu der Gleichung (30) noch die mit den unbestimmten (Lagrange'schen) Factoren σ_1, σ_2 multiplicirten Gleichungen (31) und (32) addirt. Durch Nullsetzen der einzelnen Differentialquotienten von ϱ^2 nach $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ erhält man dann:

$$(33)\qquad \begin{aligned} 0 &= 2(a^2 + \sigma_1)\vartheta_1 + m\sigma_2, \\ 0 &= 2(b^2 + \sigma_1)\vartheta_2 + n\sigma_2, \\ 0 &= 2(c^2 + \sigma_1)\vartheta_3 + p\sigma_2. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ und addirt, so ergiebt sich wegen (31) und (32):

$$a^2 \vartheta_1{}^2 + b^2 \vartheta_2{}^2 + c^2 \vartheta_3{}^2 = -\sigma_1 .$$

Es ist also nach (30) $\sigma_1 = -\varrho^2$. Setzt man diesen Werth in (33) ein, so kann man jene drei Gleichungen in der Form schreiben:

$$\vartheta_1 = -\tfrac{1}{2}\sigma_2 \frac{m}{a^2-\varrho^2}, \quad \vartheta_2 = -\tfrac{1}{2}\sigma_2 \frac{n}{b^2-\varrho^2}, \quad \vartheta_3 = -\tfrac{1}{2}\sigma_2 \frac{p}{c^2-\varrho^2}. \quad (34)$$

Durch Multiplication mit bezw. m, n, p und Addition folgt wegen (32):

$$\frac{m^2}{a^2-\varrho^2} + \frac{n^2}{b^2-\varrho^2} + \frac{p^2}{c^2-\varrho^2} = 0,$$

d. h. ϱ befriedigt thatsächlich dieselbe Gleichung, wie die Lichtgeschwindigkeit V (cf. Formel (18) der S. 293).

Aus (34) folgt nun, dass ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 dieselben Verhältnisse unter einander besitzen, wie nach (19) $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, d. h. der Lichtvector hat die Richtung des maximalen, bezw. minimalen Radiusvectors des Ovalschnittes.

Da die Schwingungsrichtung nach § 5 unbestimmt wird für den Fall, dass die Wellennormale mit einer optischen Axe zusammenfällt, so kann in diesem Falle der Ovalschnitt kein Maximum oder Minimum des Radiusvectors besitzen, d. h. das Ovaloid muss in einem Kreise geschnitten werden von Ebenen, welche normal zur optischen Axe sind. Die Radien dieser beiden Kreise sind einander gleich, und zwar gleich b. Ein beliebig liegender Ovalschnitt einer Wellenebene, deren Normale N sei, schneidet die beiden Kreisschnitte des Ovaloids in zwei Radienvectoren r_1 und r_2, welche die gleiche Länge b haben. Diese Vectoren r_1 und r_2 sind senkrecht zu den Ebenen, welche man durch die Wellennormale N und je eine optische Axe A_1, bezw. A_2 legen kann, da z. B. r_1 sowohl senkrecht zu N, wie zu A_1 steht. Diese Ebenen (NA_1) bezw. (NA_2) schneiden daher den Ovalschnitt, den die Wellenebene mit dem Ovaloid macht, ebenfalls in zwei gleichen Radienvectoren r'_1 und r'_2, da $r'_1 \perp$ zu r_1, $r'_2 \perp$ zu r_2 ist; da auch $r_1 = r_2$, so folgt aus der Symmetrie des Ovalschnittes, dass auch $r'_1 = r'_2$ ist und dass die Hauptaxen ϱ_1 und ϱ_2 desselben den Winkel zwischen r_1 und r_2, r_1' und r_2' halbiren. Die Schwingungsrichtungen des Lichtvectors (die mit ϱ_1 und ϱ_2 coincidiren) liegen daher in den beiden Ebenen, welche die von den Ebenen (NA_1) bezw. (NA_2) gebildeten Winkel halbiren. Dadurch sind die Schwingungsrichtungen bestimmt, da sie

auch senkrecht zur Wellennormale N liegen. Die zu V_2 (nach (29) definirt) zugehörige Schwingungsrichtung liegt in der Halbirungsebene des Winkels (A_1, N, A_2), wobei A_1 und A_2 die nach (26'), (26") definirten positiven Richtungen der optischen Axen bedeuten, die zu V_1 zugehörige Schwingung liegt senkrecht gegen diese Ebene, d. h. in der Halbirungsebene des Winkels $(A_1, N, -A_2)$.

7. Einaxige Krystalle. Wenn zwei der Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c einander gleich sind, z. B. falls $a = b$ ist, so treten besondere Vereinfachungen ein. Aus (26) auf S. 296 folgt, dass beide optischen Axen zusammenfallen, nämlich in die z-Axe; daher heissen diese Krystalle einaxig. Aus (29) auf S. 298 folgt, da dann stets $g_1 = g_2$ ist:

$$V_1^2 = a^2, \quad V_2^2 = a^2 \cos^2 g + c^2 \sin^2 g, \tag{35}$$

wobei g den Winkel bedeutet, welchen die Wellennormale mit der optischen Axe bildet. Die eine Welle hat also constante Geschwindigkeit, sie wird die ordinäre Welle genannt. Die Schwingungsrichtung der extraordinären Welle liegt nach der Construction der vorigen Seite im Hauptschnitt des Krystalls, d. h. in der Ebene, welche durch optische Axe und Wellennormale geht, die ordinäre Welle schwingt daher senkrecht zum Hauptschnitt. Da der Hauptschnitt (cf. oben S. 225) als Polarisationsebene der ordinären Welle definirt ist, so liegen also die Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene, wie es der Fresnel'sche Standpunkt auch für isotrope Medien ergab. — Wenn der Winkel g der Wellennormale N mit der optischen Axe variirt, aber N in einem bestimmten Hauptschnitt verbleibt, so bleibt daher die Schwingungsrichtung der ordinären Welle unverändert, aber die der extraordinären Welle variirt. Daher ergiebt sich das schon oben S. 233 § 7 behauptete Resultat, dass der Fresnel'sche Standpunkt den Vorzug der Einfachheit insofern geniesst, als für das Verhalten einer Welle lediglich die Schwingungsrichtung massgebend ist. Bleibt diese unverändert, so bleibt auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle unverändert, auch wenn sich die Richtung der Wellennormale ändert.

Einaxige Krystalle liefern diejenigen Krystallsysteme, welche eine ausgezeichnete Krystallaxe besitzen, zu welcher zwei (oder drei) gleichwerthige Axen senkrecht stehen, d. h. das tetragonale und hexagonale System. Die optische Axe fällt in die ausgezeichnete krystallographische Axe. Die Krystalle des regulären Systems

unterscheiden sich optisch nicht von isotropen Körpern, da nach ihrer krystallographischen Symmetrie $a = b = c$ sein muss.

Rhombische, monokline, trikline Krystalle können zweiaxig (in optischer Hinsicht) sein. Bei ersteren fallen die krystallographischen Symmetrieaxen nothwendig mit den elektrischen Symmetrieaxen zusammen, da ein Krystall in jeder physikalischen Hinsicht mindestens die Symmetrie besitzt, welche auch der Krystallform eigen ist. Bei monoklinen Krystallen kann man aus der Krystallform nur auf die Lage der einen elektrischen Symmetrieaxe schliessen, da diese senkrecht zu der (einzigen) krystallographischen Symmetrieebene steht, bei triklinen Krystallen haben die elektrischen Symmetrieaxen überhaupt keine von vornherein bestimmte Lage zur Krystallform.

Bei einaxigen Krystallen ($a = b$) wird nach (30) das Ovaloid zur Rotationsfläche:

$$\varrho^2 = a^2 + (c^2 - a^2)\,\vartheta_3^2. \tag{36}$$

Je nachdem diese Fläche in Richtung der Axe abgeplattet oder verlängert ist, nennt man den Krystall positiv-, oder negativ-einaxig. Für ersteren Fall ist daher $a > c$, für letzteren $a < c$. Nach (35) ist bei positiven Krystallen die ordinäre Welle die schnellere, d. h. weniger stark brechbare, bei negativen Krystallen wird dagegen die ordinäre Welle stärker gebrochen, als die extraordinäre. Quarz ist positiv, Kalkspath negativ einaxig.

8. Bestimmung der Richtung des Lichtstrahls aus der Wellennormale. Die Richtungscosinus des Lichtstrahls seien $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ genannt. Nach den auf S. 291 angestellten Ueberlegungen und der Formel (25) auf S. 253 ist:

$$\mathfrak{m} : \mathfrak{n} : \mathfrak{p} = \gamma Y - \beta Z : \alpha Z - \gamma X : \beta X - \alpha Y. \tag{37}$$

Nun ist aber nach den Formeln (13) auf S. 292 und der dortigen Bezeichnung (16)

$$X : Y : Z = a^2\mathfrak{M} : b^2\mathfrak{N} : c^2\mathfrak{P}, \tag{38}$$

ferner leitet man aus den Formeln (7) der S. 289 und den Formeln (13) sofort ab:

$$\alpha : \beta : \gamma = b^2 p\,\mathfrak{N} - c^2 n\,\mathfrak{P} : c^2 m\,\mathfrak{P} - a^2 p\,\mathfrak{M} : a^2 n\,\mathfrak{M} - b^2 m\,\mathfrak{N}. \tag{39}$$

Setzt man die Werthe (38) und (39) in (37) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} : \mathfrak{n} : \mathfrak{p} = & - m\,(a^4\mathfrak{M}^2 + b^4\mathfrak{N}^2 + c^4\mathfrak{P}^2) \\ & + \mathfrak{M} a^2\,(a^2 m\,\mathfrak{M} + b^2 n\,\mathfrak{N} + c^2 p\,\mathfrak{P}) : \ldots : \ldots \end{aligned} \tag{40}$$

Die durch ... angedeuteten Terme ergeben sich aus dem hingeschriebenen Terme durch cyklische Vertauschung der Buchstaben.

Benutzt man nun die Abkürzung (16′) der S. 293, d. h. setzt man:

$$(41) \qquad a^2 m\,\mathfrak{M} + b^2 n\,\mathfrak{N} + c^2 p\,\mathfrak{P} = G^2,$$

so folgt aus den dortigen Gleichungen (17′)

$$a^2\mathfrak{M} = \mathfrak{M}V^2 + mG^2,\quad b^2\mathfrak{N} = \mathfrak{N}V^2 + nG^2,\quad c^2\mathfrak{P} = \mathfrak{P}V^2 + pG^2.$$

Durch Quadriren und Addiren dieser drei Gleichungen erhält man daher, da

$$\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 = m^2 + n^2 + p^2 = 1,$$

$$\mathfrak{M}m + \mathfrak{N}n + \mathfrak{P}p = 0 \quad \text{(cf. S. 293) ist:}$$

$$(42) \qquad a^4\mathfrak{M}^2 + b^4\mathfrak{N}^2 + c^4\mathfrak{P}^2 = V^4 + G^4.$$

Durch Quadriren und Addiren der drei Gleichungen (17′) ergiebt sich

$$(43) \qquad 1 = G^4\left\{\left(\frac{m}{a^2 - V^2}\right)^2 + \left(\frac{n}{b^2 - V^2}\right)^2 + \left(\frac{p}{c^2 - V^2}\right)^2\right\}.$$

Setzt man nun für $\mathfrak{M}a^2$ den aus (17′) folgenden Werth ein

$$\mathfrak{M}a^2 = G^2\frac{ma^2}{a^2 - V^2},$$

so folgt unter Benutzung von (41) und (42) für (40):

$$\mathfrak{m} : \mathfrak{n} : \mathfrak{p} = -m\,(V^4 + G^4) + mG^4\frac{a^2}{a^2 - V^2} : \dots : \dots,$$

oder

$$(44) \qquad \mathfrak{m} : \mathfrak{n} : \mathfrak{p} = m\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - a^2}\right) : n\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - b^2}\right) : p\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - c^2}\right).$$

Durch diese Gleichung ist die Richtung des Lichtstrahls ausgedrückt in ihrer Abhängigkeit von der Richtung der Wellennormale, da sich V^2 aus m, n, p nach dem Fresnel'schen Gesetz (18) bestimmt, und G^2 nach (43) auch durch m, n, p und V^2 ausgedrückt ist.

Um die Richtungscosinus $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ absolut zu bestimmen (nicht nur ihre Verhältnisse), können wir setzen:

$$\mathfrak{m} = m\sigma\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - a^2}\right), \quad \mathfrak{n} = n\sigma\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - b^2}\right),$$
$$\mathfrak{p} = p\sigma\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - c^2}\right), \tag{45}$$

wobei σ ein Proportionalitätsfactor ist, den wir bestimmen können, falls diese drei Gleichungen quadrirt und addirt werden. Es folgt dann mit Rücksicht auf (18) und (43):

$$1 = \sigma^2 (V^4 + G^4). \tag{46}$$

9. Die Strahlenfläche. Wenn eine Wellenebene in der Zeiteinheit sich um die Strecke V parallel mit sich fortgepflanzt hat, so wird V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellennormale genannt. Der Lichtstrahl liegt schief zur Wellennormale, und macht mit ihr einen Winkel ζ, der gegeben ist durch

$$\cos\zeta = \mathfrak{m}m + \mathfrak{n}n + \mathfrak{p}p. \tag{47}$$

Der Lichtstrahl hat dann in der Zeiteinheit den Weg $\mathfrak{B}$ zurückgelegt, wobei ist:

$$\mathfrak{B}\cos\zeta = V. \tag{48}$$

$\mathfrak{B}$ wird die Strahlengeschwindigkeit genannt, sie ist also grösser, als die Normalengeschwindigkeit.

Durch Multiplication der drei Gleichungen (45) mit m, n, p und Addition folgt $\cos\zeta = \sigma V^2$, d. h. unter Rücksicht auf (48):

$$\sigma = 1 : V\mathfrak{B}. \tag{49}$$

Nach (46) folgt daher:

$$G^4 = V^2\mathfrak{B}^2 - V^4, \tag{50}$$

oder unter Rücksicht auf (48):

$$G^2 = V^2\, tg\,\zeta. \tag{51}$$

Setzt man den Werth G^4 nach (50) in die Gleichungen (45) ein, und berücksichtigt man (49), so erhält man durch einfache Umformung:

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^2 - a^2} = \frac{mV}{V^2 - a^2}, \quad \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^2 - b^2} = \frac{nV}{V^2 - b^2}, \quad \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = \frac{pV}{V^2 - c^2}. \tag{52}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit bezw. $\mathfrak{m}a^2$, $\mathfrak{n}b^2$, $\mathfrak{p}c^2$ und addirt sie, so entsteht unter Rücksicht auf (17'):

$$\mathfrak{B}\left(\frac{\mathfrak{m}^2 a^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{\mathfrak{n}^2 b^2}{\mathfrak{B}^2 - b^2} + \frac{\mathfrak{p}^2 c^2}{\mathfrak{B}^2 - c^2}\right) = -\frac{V}{G^2}(a^2\mathfrak{M}\mathfrak{m} + b^2\mathfrak{N}\mathfrak{n} + c^2\mathfrak{P}\mathfrak{p}).$$

Nun steht aber der Lichtstrahl senkrecht zur elektrischen Kraft. Daher verschwindet die rechte Seite der letzten Gleichung, da die Componenten der elektrischen Kraft der Relation (38) genügen. Es entsteht also die Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{m}^2 a^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{\mathfrak{n}^2 b^2}{\mathfrak{B}^2 - b^2} + \frac{\mathfrak{p}^2 c^2}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = 0, \tag{53}$$

welche man auch schreiben kann in der Form:

$$\frac{\mathfrak{m}^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2}} + \frac{\mathfrak{n}^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2}} + \frac{\mathfrak{p}^2}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2}} = 0. \tag{53'}$$

Addirt man zu (53) die Beziehung $\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2 + \mathfrak{p}^2 = 1$, so ergiebt sich

$$\frac{\mathfrak{m}^2 \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{\mathfrak{n}^2 \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}^2 - b^2} + \frac{\mathfrak{p}^2 \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = 1. \tag{53''}$$

Durch diese Beziehungen ist die Strahlengeschwindigkeit $\mathfrak{B}$ als Function der Strahlrichtung dargestellt. Trägt man $\mathfrak{B}$ als Radiusvector in der Richtung $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ von einem festen Punkte aus ab, so erhält man die sogenannte Strahlenfläche. Dieselbe ist ebenfalls eine zweischalige Fläche, gerade wie die Normalenfläche, hat überhaupt mit letzterer grosse Aehnlichkeit, da aus der Gleichung (18) der Normalenfläche durch Ersetzung aller dort auftretenden Längen durch ihre reciproken Werthe die Gleichung (53') der Strahlenfläche erhalten wird. Die Symmetrieebenen schneiden die Strahlenfläche je in einem Kreise und einer Ellipse.

Die in § 6 angegebene geometrische Construction ergiebt also hier, dass man auszugehen hat von der Fläche [vgl. die dortige Formel (30)]:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\vartheta_1^2}{a^2} + \frac{\vartheta_2^2}{b^2} + \frac{\vartheta_3^2}{c^2},$$

d. h. einem Ellipsoid mit den Hauptaxen a, b, c. Die Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{B}$ in einer bestimmten Richtung $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ wird erhalten als die Hauptaxen ϱ_1 und ϱ_2 derjenigen Ellipse, in welcher das Ellipsoid geschnitten wird von einer zum Strahl senkrechten Ebene.

Auch hier müssen zwei Richtungen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ existiren, für welche die beiden Wurzeln $\mathfrak{B}^2$ der quadratischen Gleichung (53') zusammenfallen. Man erhält diese Richtungen aus den früheren Formeln

(26'), (26'') für die optischen Axen, wenn man alle Längen durch ihre reciproken Werthe ersetzt. Dies giebt:

$$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}}, \quad \mathfrak{n} = 0, \quad \mathfrak{p} = \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}},$$

oder

$$\mathfrak{m} = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad \mathfrak{n} = 0, \quad \mathfrak{p} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \tag{54}$$

Diese beiden Richtungen heissen die Strahlenaxen.

Die Strahlenfläche kann man ansehen als diejenige Fläche, bis auf welche sich eine von einem Punkte P ausgehende Lichterschütterung in der Zeiteinheit fortgepflanzt hat. (Sie wird aus diesem Grunde in der Literatur zum Theil auch „Wellenfläche" genannt.)

Wenn man die einzelnen Punkte P einer Wellenebene nach dem Huygens'schen Princip als Erregungscentren auffasst und um diese die Strahlenfläche construirt, so würde die Enveloppe derselben die Lage der Wellenebene nach der Zeiteinheit darstellen (cf. oben S. 150). Nach dieser Construction ist also die zu einem Strahl PS zugehörige Wellenebene die Tangentialebene, welche im Punkte S an die Strahlenfläche gelegt werden kann.

Dies ist nun in der That auch aus unsern Formeln ableitbar. Wenn man die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes S der Strahlenfläche mit x, y, z bezeichnet, so ist $\mathfrak{m}\mathfrak{B} = x$, etc., $\mathfrak{B}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und nach (53''):

$$\frac{x^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{B}^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{B}^2 - c^2} - 1 = 0. \tag{55}$$

Bezeichnet man diese Gleichung symbolisch als $F(x, y, z) = 0$, so sind die Richtungscosinus der Normale der Tangentialebene im Punkte x, y, z proportional zu $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$. Wir müssen also beweisen, dass ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} = m : n : p. \tag{56}$$

Es ist nun nach (55):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \left(\frac{1}{\mathfrak{B}^2 - a^2} - \frac{x^2}{(\mathfrak{B}^2 - a^2)^2} - \frac{y^2}{(\mathfrak{B}^2 - b^2)^2} - \frac{z^2}{(\mathfrak{B}^2 - c^2)^2} \right).$$

Nach (52) ist nun $x : \mathfrak{V}^2 - a^2 = mV : V^2 - a^2$, etc., unter Rücksicht auf die Beziehung (43) und (50) ergiebt sich also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\left(\frac{1}{\mathfrak{V}^2 - a^2} - \frac{V^2}{G^4}\right) = \frac{2xV^2}{G^4} \cdot \frac{a^2 - V^2}{\mathfrak{V}^2 - a^2},$$

d. h. mit Rücksicht auf (52):

$$(57) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -2m\frac{V^3}{G^4}.$$

Aus dieser Gleichung kann man durch cyclische Vertauschung der Buchstaben $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ ableiten. Es ergiebt sich daher sofort die Relation (56), d. h. jene aus dem **Huygens**'schen Princip gefundene Construction wird bestätigt.

Nach diesen Ueberlegungen kann man die Strahlrichtung $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ aus der Wellennormalen m, n, p in folgender Weise ableiten: Die Strahlenfläche berührt sämmtliche von einem Punkte P nach allen Richtungen in der Zeiteinheit fortgepflanzten Wellenebenen, ist also die Enveloppe dieser Wellenebenen. Wenn wir daher drei Wellenebenen ins Auge fassen, welche der Richtung PN unendlich nahe benachbart sind, so muss ihr Schnittpunkt unendlich nahe benachbart sein dem Endpunkt S des zur Normalenrichtung PN zugehörigen Lichtstrahls PS, da S gemeinsam allen drei Wellenebenen angehört. Die Richtigkeit dieser Construction möge nun auch analytisch bewiesen werden: Die Gleichung einer Wellenebene ist

$$(58) \qquad mx + ny + pz = V.$$

Wenn x, y, z auch einer unendlich nahe benachbarten Wellenebene angehören soll, so gilt auch die Gleichung (58), wenn man sie nach m, n, p differencirt. Diese Grössen sind aber nicht von einander unabhängig, da $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ ist. Nach dem Verfahren von **Lagrange** (cf. oben S. 298) kann man aber zu (58) die Identität

$$f(m^2 + n^2 + p^2) = f$$

hinzu addiren, sodass man erhält:

$$(59) \qquad mx + ny + pz + f(m^2 + n^2 + p^2) = V + f.$$

f ist eine unbekannte Constante. Da diese noch mit in die Rechnung eingeführt ist, so kann man jetzt in (59) m, n, p als von

einander unabhängige Variabele ansehen und die Differentialquotienten von (59) einzeln nach m, n, p bilden, sodass man erhält:

$$x + 2fm = \frac{\partial V}{\partial m}, \quad y + 2fn = \frac{\partial V}{\partial n}, \quad z + 2fp = \frac{\partial V}{\partial p}. \tag{60}$$

Nun ist aber nach (18) und (43):

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \frac{m}{V^2 - a^2} \cdot \frac{G^4}{V}, \tag{61}$$

analoge Ausdrücke gelten für $\frac{\partial V}{\partial n}$, $\frac{\partial V}{\partial p}$. Durch Multiplication der drei Gleichungen (60) mit bezw. m, n, p und Addition entsteht auf der rechten Seite wegen (18) und (61) der Werth Null. Auf der linken Seite aber steht wegen (58): $V + 2f$, sodass sich die Constante $2f$ bestimmt zu $2f = -V$. Daher wird die erste Gleichung (60) in Rücksicht auf (61):

$$x = m\left(V + \frac{1}{V^2 - a^2} \cdot \frac{G^4}{V}\right), \text{ und analog:}$$

$$y = n\left(V + \frac{1}{V^2 - b^2} \cdot \frac{G^4}{V}\right),$$

$$z = p\left(V + \frac{1}{V^2 - c^2} \cdot \frac{G^4}{V}\right).$$

Der Radiusvector vom Coordinatenanfang nach dem Schnittpunkt x, y, z der drei benachbarten Wellenebenen fällt daher in der That mit der auf S. 303 berechneten Strahlrichtung zusammen, da $x : y : z = \mathfrak{m} : \mathfrak{n} : \mathfrak{p}$. Ausserdem ergiebt sich die Strahlgeschwindigkeit $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ zu demselben Werth, wie er oben gefunden wurde [vgl. die Formeln (45) und (49)].

Ueber weitere geometrische Beziehungen zwischen Strahl, Wellennormale, optischen Axen und Strahlenaxen vgl. Winkelmann, Hdb. d. Phys. Optik, S. 699.

10. Conische Refraction. Zu jeder bestimmten Richtung einer Wellennormale ergeben sich im Allgemeinen zwei verschiedene zugehörige Strahlenrichtungen nach den Gleichungen (44), da jedem bestimmten m, n, p zwei verschiedene Werthe V^2 zugehören. Es kann nun aber eintreten, dass diese Gleichungen die unbestimmte Form $0 : 0$ annehmen, nämlich wenn eine der Grössen m, n, p gleich Null ist. Nehmen wir z. B. $m = 0$ an, so ergiebt sich nach (21) auf S. 295 $V_1{}^2 = a^2$. Für diesen Fall würde nach (43) und

(44) sein:

$$G^4 = (V_1^2 - a^2)^2 : m^2,$$

(62)
$$\mathfrak{m} \sim m \frac{G^4}{V_1^2 - a^2} = m \cdot \frac{V_1^2 - a^2}{m^2}.$$

Den Werth dieses in der Form $0 : 0$ erscheinenden Ausdruckes können wir leicht bestimmen, da nach der Fresnel'schen Gleichung (18) (S. 293) der Ausdruck $m^2 : V_1^2 - a^2$ einen endlichen, angebbaren Werth hat, nämlich es ist:

(63)
$$\frac{m^2}{V_1^2 - a^2} = \frac{n^2}{b^2 - V_1^2} + \frac{p^2}{c^2 - V_1^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist stets von Null verschieden, da für $a > b > c$ und $V_1^2 = a^2$ beide Terme der rechten Seite beständig negativ sind. Nach (58) ist daher $\mathfrak{m} = 0$ für $m = 0$, d. h. der Strahl liegt in der yz-Ebene, falls die Wellennormale in der yz-Ebene liegt. — Ganz ähnlich ist der Schluss für den Fall $p = 0$. Dagegen erfordert der Fall $n = 0$ eine besondere Betrachtung. Es ergiebt sich dann nämlich analog wie in (58) und (59) für $V = b$:

(64)
$$\mathfrak{n} \sim n \frac{V^2 - b^2}{n^2}, \quad \frac{n^2}{V^2 - b^2} = \frac{m^2}{a^2 - V^2} + \frac{p^2}{c^2 - V^2}.$$

Hier kann nun die rechte Seite der letzten Gleichung für $V = b$ zu Null werden, nämlich falls ist:

$$m^2 (c^2 - b^2) + p^2 (a^2 - b^2) = 0.$$

Diese Beziehung ist nun in der That erfüllt, falls die Wellennormale in eine optische Axe fällt (vgl. Formel (25) auf S. 296). In diesem Falle behält nach (64) $\mathfrak{n}$ die unbestimmte Form $0 : 0$, d. h. dieser Wellennormale gehören nicht zwei einzelne bestimmte Strahlen zu, sondern eine unendliche Mannigfaltigkeit von Strahlen, da $\mathfrak{n}$ thatsächlich unbestimmt bleibt. Die zugehörigen Strahlen findet man für diesen Fall am einfachsten aus der Gleichung:

(65)
$$\frac{\mathfrak{m} m}{\mathfrak{V}^2 - a^2} + \frac{\mathfrak{n} n}{\mathfrak{V}^2 - b^2} + \frac{\mathfrak{p} p}{\mathfrak{V}^2 - c^2} = 0,$$

welche man aus (52) durch bezw. Multiplication mit m, n, p und Addition unter Rücksicht auf (18) ableitet. Fällt die Wellennormale in eine optische Axe, so ist $n = 0$, dagegen braucht $\mathfrak{n}$ nicht Null zu sein und $\mathfrak{V}$ ist daher dann von b verschieden. Daher ergiebt sich:

$$\frac{\mathfrak{m}m}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{\mathfrak{p}p}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = 0. \tag{66}$$

Ferner ist nach (47) und (48), da $V = b$ ist:

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{m}m + \mathfrak{p}p) = b. \tag{67}$$

Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen $\mathfrak{B}^2$, so ergiebt sich:

$$(\mathfrak{m}mc^2 + \mathfrak{p}pa^2)(\mathfrak{m}m + \mathfrak{p}p) = b^2. \tag{68}$$

Nennt man die Coordinaten der Endpunkte des Strahles x, y, z, wobei also ist $\mathfrak{m} = x : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ etc., so folgt:

$$(x\,mc^2 + z\,pa^2)(xm + zp) = b^2(x^2 + y^2 + z^2). \tag{69}$$

Dieses ist die Gleichung eines durch den Coordinatenanfang gehenden Kegels zweiten Grades. Es gehören also zur optischen Axe als Wellennormale unendlich viel Strahlen, welche auf dem durch die Gleichung (69) definirten Kegel liegen. Derselbe schneidet auf der Wellenebene

$$xm + zp = const. \tag{70}$$

einen Kreis aus, da durch Einsetzen der Gleichung (70) in die Gleichung (69) letztere übergeht in:

$$(x\,mc^2 + z\,pa^2) \cdot const. = b^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

d. h. in die Gleichung einer Kugel.

Nach dem auf S. 305 Erörterten folgt daher, dass die Strahlenfläche zwei zu den optischen Axen senkrechte Tangentialebenen besitzt, welche dieselbe in einem Kreise berühren. Eine Erzeugende des Strahlenkegels fällt in die optische Axe selber und steht daher auf der Ebene des Kreises senkrecht. Der Oeffnungswinkel χ des Strahlenkegels ergiebt sich aus (69) zu:

$$tg\chi = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{b^2}. \tag{71}$$

Diese hier besprochene Erscheinung wird innere konische Refraction genannt aus folgendem Grunde: Wenn ein Lichtstrahl auf eine Krystallplatte in einer solchen Richtung einfällt, dass die gebrochene Wellennormale die Richtung einer optischen Axe des Krystalls besitzt, so liegen die im Inneren desselben verlaufenden Lichtstrahlen auf einem Kegelmantel; die aus der Krystallplatte

austretenden Lichtstrahlen liegen daher auf einem elliptischen Cylinder, dessen Axe dem einfallenden Licht parallel ist, falls die Krystallplatte planparallel ist.[1]) Zur Beobachtung eignet sich gut Aragonit, weil bei ihm der Oeffnungswinkel χ des Strahlenkegels relativ gross ist ($\chi = 1^0 52'$).[2]) In Figur 86 ist eine experimentelle Anordnung dargestellt. Man bedeckt die eine Fläche der parallel zur krystallographischen Basis geschnittenen Aragonitplatte mit einem engen Diaphragma o und lässt ein Parallelstrahlbündel so einfallen. Bei geeigneter Drehung der Platte um eine zur Ebene der optischen Axen senkrechte Axe zeichnet sich auf dem Schirme SS ein elliptischer Ring ab.

An Stelle des Schirmes kann man auch zur subjectiven Beobachtung eine Lupe oder ein Mikroskop anwenden, welches auf o eingestellt wird.

Aus den Formeln (52) in Verbindung mit (47) und (48) leiten sich leicht die Formeln ab, welche die Richtung der Wellennormale in ihrer Abhängigkeit von der Richtung des Strahles darstellen. Es ergeben sich im Allgemeinen zu jedem bestimmten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ zwei bestimmte Systeme m, n, p. Nur wenn $\mathfrak{n} = o$ und $\mathfrak{B}^2 = b^2$ wird, d. h. wenn der Strahl in eine Strahlenaxe fällt, wird n unbestimmt, wie man durch ein ganz analoges Verfahren, wie es vorhin angewendet wurde, ableitet. Die Strahlenfläche besitzt daher an den Austrittsstellen der Strahlenaxen nicht zwei bestimmte Tangentenebenen, sondern einen Tangentenebenenkegel. Die zugehörigen Wellennormalen liegen auf einem Kegel vom Oeffnungswinkel ψ, wobei ist

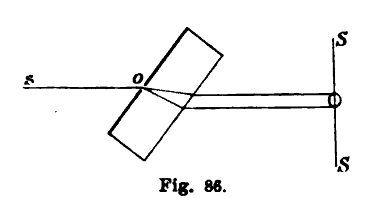


Fig. 86.

$$tg\,\psi = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{a^2 c^2}}. \tag{72}$$

Diese Formel ergiebt sich aus (71) durch Ersetzung aller dort auftretenden Längen durch ihre reciproken Werthe.

1) Denn die Richtung der Strahlen im Aussenraum hängt nur von der Lage der inneren Wellenebene ab, nicht von der Lage der inneren Strahlen. Auf das Brechungsgesetz wird im nächsten Paragraphen noch näher eingegangen.

2) Schwefel eignet sich noch besser, weil es den Oeffnungswinkel $\chi = 7^0$ etwa besitzt. Nur macht die Bearbeitung mehr Schwierigkeiten. Die Verwendung einer Schwefelkugel zur Demonstration der conischen Refraction hat A. Schrauf in Wied. Ann. 37, S. 127, 1889 beschrieben.

Diese Erscheinung wird äussere conische Refraction genannt aus dem Grunde, weil ein Lichtstrahl, welcher im Inneren eines Krystalls in die Richtung einer seiner Strahlenaxen fällt, beim Austritt aus demselben einen Kegel von äusseren Lichtstrahlen entstehen lässt. Denn bei verschiedenen Lagen von Wellenebenen im Inneren eines Krystalls entstehen durch Brechung stets verschieden gerichtete äussere Strahlen (cf. Anm. 1 auf vor. S.).

Figur 87 stellt eine experimentelle Anordnung zum Nachweis der äusseren conischen Refraction dar. Man concentrirt durch eine Linse L einen Strahlenkegel auf dem engen Diaphragma o einer Aragonitplatte. Auch auf der Hinterseite derselben liegt ein Diaphragma o'. Hat die Verbindungslinie oo' die Richtung einer Strahlenaxe, so zeichnet sich auf einem Schirme SS ein Ring ab, der sich erweitert, wenn SS mehr entfernt wird. Von den einfallenden Lichtstrahlen kommen dabei nur diejenigen zur Wirkung, welche Strahlen der Richtung oo' hervorrufen. Die anderen werden durch das Diaphragma o' abgeblendet. Die wirksamen einfallenden Lichtstrahlen sind parallel dem austretenden Strahlenkegel.

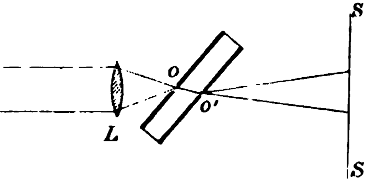


Fig. 87.

Die Erscheinungen der conischen Refraction wurden erst beobachtet, nachdem Hamilton dieselben als theoretisch nothwendig nachgewiesen hatte.

11. Durchgang des Lichtes durch Krystallplatten und Krystallprismen. Für die Brechung des Lichtes beim Uebergang von Luft in einen Krystall gilt die gleiche analytische Bedingung, wie sie oben S. 260 für die Brechung des Lichtes durch einen isotropen Körper ausgesprochen wurde. Ist die einfallende Welle proportional zu

$$\cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right),$$

dagegen die gebrochene Welle proportional zu

$$\cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{m'x + n'y + p'z}{V'}\right),$$

und ist die Grenzfläche die Ebene $z = 0$, so erfordert allein das Bestehen von Grenzbedingungen, unabhängig von der besonderen Form derselben, die Beziehung:

$$\frac{m}{V} = \frac{m'}{V'}, \quad \frac{n}{V} = \frac{n'}{V'}.$$

Dies ist das Brechungsgesetz der gewöhnlichen Form, nämlich die gebrochene Wellennormale bleibt in der Einfallsebene, ihr Brechungswinkel φ' steht mit dem Einfallswinkel φ in der Beziehung:

$$(73) \qquad \sin\varphi : \sin\varphi' = V : V',$$

wobei V, V' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Luft, bezw. dem Krystall sind. Diese Beziehung liefert hier nur im Allgemeinen noch keine directe Construction der gebrochenen Wellennormale, da V' im Allgemeinen von der Richtung derselben abhängt.

Dagegen liefert die Anwendung des Huygens'schen Princips nach denselben Grundsätzen, wie sie oben S. 151 für isotrope Körper ausgesprochen sind, direct sowohl die Beziehung (73), als auch eine Construction der gebrochenen Wellennormale und des gebrochenen Strahles. Wenn nämlich A_1B (vgl. Figur 88) der Schnitt einer einfallenden Wellenebene mit der Einfallsebene (Ebene der Zeichnung) ist und $\measuredangle A_1BA_2 = \pi/_2$, $BA_2 = V$ ist, so construire man um A_1 die Strahlenfläche Σ des Krystalls, bis zu der sich eine von A_1 ausgehende Lichterregung nach Ablauf der Zeiteinheit im Krystall fortgepflanzt hat (Figur 88). Durch eine durch A_2 gehende Grade, welche senkrecht zur Einfallsebene steht, lege man nun die beiden Tangentialebenen A_2T_1 und A_2T_2 an die zweischalige Strahlenfläche. Diese sind nach dem Huygens'schen Princip die beiden gebrochenen Wellenebenen; die Richtungen von A_1 nach den beiden Berührungspunkten C_1, C_2 der Tangentialebenen mit der Strahlenfläche Σ sind die Richtungen der beiden gebrochenen Strahlen. Dieselben liegen im Allgemeinen nicht in der Einfallsebene.

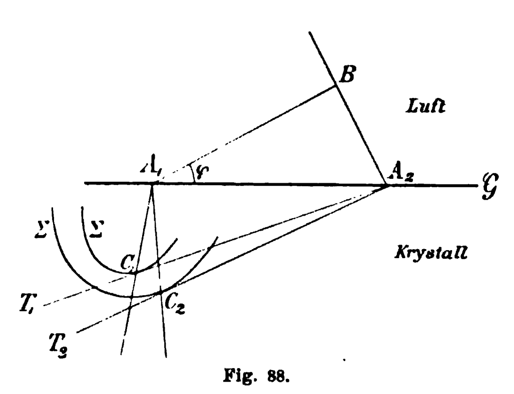


Fig. 88.

Für senkrechte Incidenz ergiebt sich daher überhaupt keine Doppelbrechung der Wellennormalen, aber wohl entstehen zwei verschiedene Strahlen, die erhalten werden durch Aussuchung der

Berührungspunkte C_1, C_2 der beiden der Grenzfläche G parallelen Tangentialebenen, welche an eine um einen Punkt A der Grenze construirte Strahlenfläche gelegt werden können. Die Strahlenrichtungen sind AC_1 und AC_2.

Beim Austritt des Lichtes aus dem Krystall in Luft treten analoge Verhältnisse ein. — Beim Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Krystallplatte tritt daher niemals eine Doppelbrechung der Wellennormalen ein, sondern nur der Lichtstrahlen. Um die Wirkung der Doppelbrechung an einer Krystallplatte wahrzunehmen, muss man daher einen Punkt der vorderen Grenzfläche anvisiren. Derselbe erscheint doppelt, da der scheinbare Ort vom Strahlengange abhängt.[1]) — Dagegen bewirkt die Einschaltung einer Krystallplatte zwischen Kollimator und Fernrohr keinerlei Bildverschiebung, da in diesem Falle nur die Wellennormalen massgebend sind. Um bei dieser Beobachtungsweise, wie sie für die Spectraluntersuchungen üblich ist, die Wirkung der Doppelbrechung zu erkennen, bedarf es der Einschaltung eines Krystallprismas.

Mit Hülfe eines solchen kann man die **Hauptbrechungsindices** finden, d. h. die Grössen

$$n_1 = V : a, \quad n_2 = V : b, \quad n_3 = V : c. \tag{74}$$

Haben wir z. B. ein Prisma aus einem einaxigen Krystall ($a = b$), und liegt die Prismenkante parallel zur optischen Axe, so hat für Wellen, deren Normalen senkrecht zur Prismenkante liegen, die Lichtgeschwindigkeit V' die beiden constanten Werthe a und c. n_1 und n_3 können daher genau wie bei einem Prisma aus isotroper Substanz durch Minimalablenkung bequem gefunden werden. Die verschiedene Polarisationsrichtung beider austretenden Strahlen lässt sofort erkennen, welcher Brechungsindex dem n_1, welcher dem n_3 zugehört.

Ebenso findet man mit Hülfe eines Prismas eines zweiaxigen Krystalles, dessen Kante parallel zu einer optischen Symmetrieaxe liegt, durch die Methode der Minimalablenkung sofort den einen Hauptbrechungsindex. Um noch die beiden anderen zu finden, bedarf es noch der Beobachtung der Ablenkung der parallel zur Prismenkante polarisirten Welle bei mindestens zwei verschiedenen Einfallswinkeln.

---

1) Der scheinbare Ort ist nicht nur seitlich, sondern auch in der Tiefe verschoben. Vgl. darüber Winkelmann, Hdb. d. Phys. Optik, S. 705.

Nach der Bedeutung, welche die elektromagnetische Theorie den Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c giebt (vgl. Formel (16) auf S. 293), ergiebt der Vergleich mit (74) die Beziehung:

$$\varepsilon_1 = n_1^2, \quad \varepsilon_2 = n_2^2, \quad \varepsilon_3 = n_3^2, \tag{75}$$

wenigstens wenn man C, die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum, mit V, der Lichtgeschwindigkeit in Luft, identificirt. (Den hierdurch gemachten Fehler kann man vernachlässigen in Anbetracht der Ungenauigkeit, mit welcher die Dielektricitätsconstanten bestimmt werden.)

Die Beziehung (75) kann nun schon aus dem Grunde nicht streng erfüllt sein, weil der Brechungsexponent von der Farbe, d. h. der Schwingungszahl der elektrischen Kraft, abhängt (Dispersion), dagegen die Dielektricitätsconstante in einem homogenen Isolator nicht. Es ist naheliegend, die Beziehung (75) zu prüfen für die Annahme, dass unter n^2 der auf unendlich lange Wellen extrapolirte Brechungsindex A der Cauchy'schen Dispersionsformel

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \tag{76}$$

zu verstehen sei. Annähernd wird dann die Beziehung (75) bei rhombischem Schwefel bestätigt, für welchen die Dielektricitätsconstanten von Boltzmann,[1]) die Brechungsindices von Schrauf[2]) bestimmt worden sind. Es ergab sich [n^2 bedeutet den Brechungsindex für gelbes Licht, A die Constante der Formel (76)]:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= 3{,}80; & A_1^2 &= 3{,}59; & \varepsilon_1 &= 3{,}81 \\ n_2^2 &= 4{,}16; & A_2^2 &= 3{,}89; & \varepsilon_2 &= 3{,}97 \\ n_3^2 &= 5{,}02; & A_3^2 &= 4{,}60; & \varepsilon_3 &= 4{,}77. \end{aligned}$$

Die Dielektricitätsconstanten stimmen also in ihrer Reihenfolge mit der der Hauptbrechungsindices überein, aber sie sind grösser als die Werthe A^2. Diese Differenz ist bei anderen Krystallen zum Theil noch grösser. Die Abweichung von den Forderungen der elektromagnetischen Theorie besteht in gleichem Sinne, wie bei isotropen Körpern (cf. oben S. 257). Ihre Erklärung soll erst bei der Behandlung der Dispersionserscheinungen gegeben werden.

1) L. Boltzmann, Wien. Ber. 70 (2), S. 342, 1874. — Pogg. Ann. 153, S. 531, 1874. —

2) A. Schrauf, Wien. Ber. 41, S. 805, 1860.

Es ergiebt sich so das Resultat, dass die elektromagnetische Lichttheorie formell in völligem Einklang mit den Erscheinungen steht, dass aber die exakten Werthe der optischen Constanten nicht aus elektrischen Messungen entnommen werden können. Diese Constanten hängen in einer, vorläufig nicht bestimmten Weise von der Schwingungsdauer, d. h. Farbe des Lichtes, ab, und zwar können nicht nur die Werthe der Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c, sondern (bei monoklinen und triklinen Krystallen) auch die Lagen der optischen Symmetrieaxen mit der Farbe variiren.

12. Totalreflexion an Krystallplatten. Die auf S. 312 angegebene Construction der gebrochenen Wellenebenen wird unmöglich, wenn die durch A_2 gehende Gerade $\mathfrak{G}$, welche senkrecht zur Einfallsebene steht, eine der beiden von der Strahlenfläche Σ mit der Grenzfläche G ausgeschnittenen Curven oder beide schneidet. In solchen Fällen giebt es keine gebrochenen Wellenebenen, sondern es tritt Totalreflexion ein. Der Grenzfall, in welchem partielle Reflexion in Totalreflexion einer der beiden gebrochenen Wellen übergeht, tritt also ein, wenn jene Gerade $\mathfrak{G}$ die zu der betreffenden Welle gehörige Schaale der Strahlenfläche Σ, d. h. den Ausschnitt der Strahlenfläche mit der Grenzebene G, berührt. In diesem Falle verläuft, da der Berührungspunkt T von $\mathfrak{G}$ mit Σ in der Grenzfläche G liegt, der gebrochene Strahl parallel zur Grenze (vgl. Fig. 89). Für diese Welle kann dann keine Energie in den Krystall übertreten, da der Lichtstrahl die Energiebahn bezeichnet (cf. oben S. 291), und daher keine Energie übertritt durch eine dem Lichtstrahl parallele Ebene. So ergiebt sich also auch aus dieser Ueberlegung, dass schon für diesen Grenzfall die reflectirte Welle die ganze Energie der einfallenden Welle enthalten muss, d. h. dass Totalreflexion eintritt.

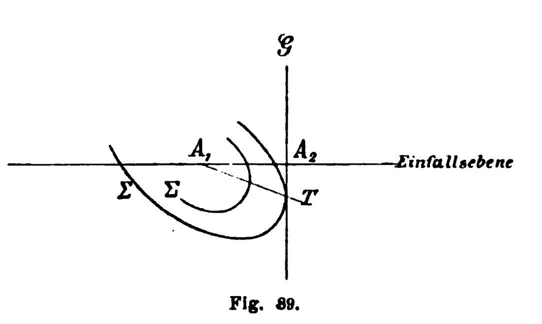


Fig. 89.

Beleuchtet man daher eine in ein stärker brechendes Medium eingetauchte Krystallplatte mit diffusem homogenen Lichte, so erscheinen im Felde des reflectirten Lichtes zwei Curven, welche die Gebiete geringerer Lichtintensität von denen grösserer trennen.

Lässt man das Licht streifend in die Krystallplatte eintreten, so werden diese Curven noch schärfer, da sie Helligkeit und völlige Dunkelheit abgrenzen, weil das in der Krystallplatte befindliche Licht nur nach der einen Seite der Curven, welche kleineren Einfallswinkeln entspricht, austreten kann. Diese Curven ergeben also die Grenzwinkel φ_1, φ_2 der Totalreflexion. Sie stehen im Allgemeinen nicht senkrecht zur Reflexionsebene. Zu ihrer Beobachtung sind besondere Instrumente construirt worden. Figur 90 stellt das von Abbe construirte Krystallrefractometer dar, bei welchem die zu untersuchende Krystallplatte auf die Flintglashalbkugel *K* vom Brechungsindex 1,89 aufgelegt wird, nur durch einen Tropfen einer stärker brechenden Flüssigkeit verbunden. *K* ist mit dem Azimuthalkreis *H* um eine Verticale drehbar, der drehbare Spiegel *S* erlaubt, die Krystallplatte entweder von unten, durch *K* hindurch, oder streifend zu beleuchten. Die Grenzcurven der Totalreflexion werden in dem, um den Verticalkreis *V* vermittelst der Handhabe *R* drehbaren Fernrohr *OGGO* beobachtet. Dasselbe ist dreimal gebrochen, die Strahlen in demselben werden durch dreimalige Totalreflexion in constante horizontale Richtung abgelenkt, was sehr zur Bequemlichkeit der Beobachtung dient. Das Objectiv des Fernrohrs ist so eingerichtet, dass es die an der



Fig. 90.

Kugelfläche K erfolgende Brechung der an der Krystallplatte reflectirten Strahlen compensirt, es bildet daher die Grenzcurven vollkommen scharf ab.

Die Methode der Totalreflexion ist die einfachste zur Bestimmung der Hauptbrechungsindices einer Krystallplatte. Dieselben ergeben sich einfach aus den Maximal- bezw. Minimalwerthen der Einfallswinkel der beiden Grenzcurven.

Nach den Figuren 88 und 89 ist nämlich, falls φ den Einfallswinkel für eine Grenzcurve bei einem beliebigen Azimuth ϑ der Einfallsebene bezeichnet, die Strecke $A_1 A_2 = V : \sin \varphi$, da $BA_2 = V$ (Lichtgeschwindigkeit im umgebenden Medium) sein soll, ferner ist $A_1 A_2$ gleich dem Abstand des Punktes A_1 von einer Tangente, welche an den Durchschnitt der um A_1 construirten Strahlenfläche mit der Grenzfläche G gelegt wird. Maximal- und Minimalwerthe des Grenzwinkels φ, d. h. der Strecke $A_1 A_2$, fallen nun nothwendig zusammen mit Maximal- bezw. Minimalwerthen der Strahllänge $A_1 T$ (cf. Figur 89), wie man durch Construction leicht beweisen kann, und zwar fällt dann $A_1 A_2$ mit dem Strahl $A_1 T$ zusammen, da die Tangente senkrecht auf dem Radiusvector $A_1 T$ stehen muss, falls derselbe ein Maximum oder Minimum besitzt. Die Strahllänge $A_1 T$ hat nun in jedem beliebigen, ebenen Schnitt der Strahlenfläche das absolute Maximum a, das absolute Minimum c. Es ergiebt sich nämlich aus der Gleichung der Strahlenfläche (cf. oben S. 304) ohne weiteres, dass $\mathfrak{V}$ beständig zwischen a und c liegen muss, da sonst die drei Glieder der Gleichung (53) einerlei Vorzeichen hätten, d. h. nicht die Summe Null ergeben könnten. Andrerseits ergiebt sich aber auch, dass in jedem ebenen Schnitt G der Strahlenfläche die extremen Werthe $\mathfrak{V} = a$, $\mathfrak{V} = c$ erreicht werden, denn nach Figur 85 wird in der Durchschnittslinie von G mit der yz-Ebene jedenfalls ein Werth $\mathfrak{V} = a$ erreicht, da in der yz-Ebene die eine Strahlgeschwindigkeit den constanten Werth $\mathfrak{V} = a$ besitzt, während in der Durchschnittslinie von G mit der xy-Ebene der Werth $\mathfrak{V} = c$ erreicht werden muss. Im Durchschnitt von G mit der xz-Ebene muss der Werth $\mathfrak{V} = b$ erreicht werden, es ist aber, wie man sich aus der letzten der Figuren 85 anschaulich machen kann, zweifelhaft, ob b zu dem Minimum der äusseren Grenzcurve, oder zu dem Maximum der inneren Grenzcurve gehört. Man kann dies entscheiden, falls man an zwei verschiedenen, aber sonst beliebig orientirten Platten die Maxima bezw. Minima der Einfallswinkel der Grenzcurven auf-

sucht.[1]) Jede Platte ergiebt vier solcher Werthe, drei davon müssen beiden Platten gemeinsam sein; diese entsprechen den Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c. Dieselben bestimmen sich also nach dem Schema:

$$A_1 A_2 = V : \sin\varphi = a, b, c, \tag{77}$$

falls φ ein Maximal- bezw. Minimalwerth des Einfallswinkels der Grenzcurve (die bestimmten Azimuthen ϑ der Einfallsebene zugehören) bedeutet. Bezeichnet man den Brechungsindex des Mediums (V) gegen Luft (V_0) mit n, d. h. setzt $V_0 : V = n$, so werden nach (77) die Hauptbrechungsindices des Krystalls gegen Luft erhalten durch die Formel (da $V_0 : a = n_1$ etc. ist):

$$n_1, n_2, n_3 = n \sin\varphi. \tag{78}$$

Bei einaxigen Krystallen $(a = b)$ ist für eine Grenzcurve $\varphi = \text{const.}$ Dieser Winkel ergiebt die Hauptlichtgeschwindigkeit a. Für die andere Grenzcurve variirt der Einfallswinkel. Es ist, falls γ den Winkel der optischen Axe gegen die Grenzfläche G des Krystalls bedeutet, die Strahlgeschwindigkeit, falls die Einfallsebene durch die optische Axe geht:

$$\mathfrak{V}^2 = \frac{a^2 c^2}{a^2 \sin^2\gamma + c^2 \cos^2\gamma}. \tag{79}$$

Wenn die Einfallsebene senkrecht zur optischen Axe steht, so ist $\mathfrak{V}^2 = c^2$. Für positiv einaxige Krystalle $(a > c)$ ist (79) der Maximalwerth des $\mathfrak{V}$, d. h. (79) ergiebt den Minimalwerth des φ der Grenzcurve, welche von der Totalreflexion der ausserordentlichen Welle herrührt. Der Maximalwerth des φ in dieser Grenzcurve ergiebt daher c, der Minimalwerth des φ erlaubt γ zu berechnen, d. h. die Neigung der Krystallgrenze gegen die optische Axe. — Bei negativ einaxigen Krystallen $(a < c)$ ergiebt der Minimalwerth des φ die Hauptlichtgeschwindigkeit c.

Ebenfalls kann man bei zweiaxigen Krystallen die Orientirung der Grenzfläche gegen die optischen Symmetrieaxen aus Beobachtung der Grenzcurven der Totalreflexion finden, indess verbindet man hiermit zur Erreichung grösserer Genauigkeit zweckmässig noch andere Methoden, z. B. die unten besprochenen Interferenzerscheinungen im convergent einfallenden, polarisirten Lichte.

---

1) Unter Berücksichtigung der Polarisationsverhältnisse genügt schon ein Krystallschnitt, vgl. dazu C. Viola, Rendic. R. Acc. dei Lincei (5) 8, 1. Sem., S. 276, 1899. — Wied. Beibl. 1899, S. 641.

Zu besonderen Erscheinungen in den Grenzcurven der Totalreflexion giebt die conische Refraction Anlass. Diese Erscheinungen können beobachtet werden, falls die Grenzfläche G die Ebene der optischen Axen ist. Das Nähere hierüber vgl. bei W. Kohlrausch, Wied. Ann. 6, S. 86, 1879. Liebisch, physik. Kryst., S. 423—425, Mascart, Traité d'Optique, T. 2, p. 102, 1891.

13. Partielle Reflexion an einer Krystallplatte. Um die Amplitudenänderungen zu berechnen, welche bei der partiellen Reflexion an Krystallplatten eintreten, bedarf es nur der Durchführung der Hauptgleichungen (6'), (7) auf S. 289 und der dort genannten Grenzbedingungen.

Da die Rechnungen aber complicirt sind (vgl. die Ausführung z. B. in Winkelmann's Hdb. Optik, S. 745), so soll nur das eine Resultat hier genannt werden, dass es bei der Reflexion an einer bestimmten Krystallplatte einen Polarisationswinkel giebt, d. h. einen Einfallswinkel, unter dem einfallendes natürliches Licht nach der Reflexion linear polarisirt ist. Die Polarisationsebene fällt aber im Allgemeinen nicht mit der Einfallsebene zusammen (im Gegensatz zum Verhalten isotroper Spiegel).

14. Interferenzerscheinungen von Krystallplatten im senkrecht einfallenden, polarisirten Lichte. Es soll linear polarisirtes, einfarbiges Licht senkrecht auf eine Krystallplatte fallen, und dann eine zweite polarisirende Vorrichtung durchsetzen; dieser Fall wird z. B. realisirt, wenn man die Krystallplatte auf das Tischchen des S. 227 beschriebenen Nörrenberg'schen Polarisationsapparates legt. Den oberen Spiegel des Apparates ersetzt man zweckmässig durch ein Nicol'sches Prisma. Dieses wird der Analysator genannt, die Schwingungsebene der elektrischen Kraft in demselben sei A (vgl. Figur 91). Die Schwingungsebene des Polarisators, welcher das zunächst benutzte natürliche Licht zu polarisirtem macht, sei P. Das einfallende polarisirte Licht, dessen Amplitude E sei, wird nun beim Eintritt in eine doppelbrechende Krystallplatte in zwei Wellen der Amplitude $E \cos \varphi$, $E \sin \varphi$ zerlegt, falls φ der Winkel ist, welchen P mit den Schwingungsrichtungen H_1 und H_2 der beiden im Krystall fortgepflanzten Wellen W_1 und W_2 bildet. (Es ist dabei abgesehen von der durch Reflexion

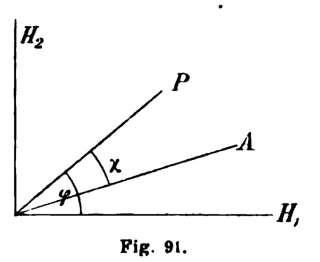


Fig. 91.

bewirkten Schwächung der Amplitude. Diese ist aber sehr annähernd für beide Wellen dieselbe.) Diese beiden Wellen werden nach dem Austritt aus dem Krystall auf die gemeinsame Polarisationsebene A zurückgeführt, besitzen daher nach dem Durchtritt durch den Analysator die Amplituden $E \cos\varphi \cos(\varphi - \chi)$, $E \sin\varphi \sin(\varphi - \chi)$. Beide Wellen W_1 und W_2 haben nun eine Phasendifferenz δ durch das Durchlaufen der Krystallplatte erlitten, und zwar ist

$$(80) \qquad \delta = d\,\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = 2\pi\,\frac{d}{\lambda}\left(\frac{V}{V_1} - \frac{V}{V_2}\right),$$

falls d die Dicke der Krystallplatte bedeutet, V_1, V_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten beider Wellen im Krystall, V die Lichtgeschwindigkeit in Luft, λ die Wellenlänge des benutzten Lichtes in Luft. Nach S. 123 ist daher die aus dem Analysator austretende Lichtintensität

$$J = E^2 \left\{\cos^2\varphi \cos^2(\varphi - \chi) + \sin^2\varphi \sin^2(\varphi - \chi) + 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin(\varphi - \chi) \cos(\varphi - \chi) \cos\delta\right\}.$$

Ersetzt man hierin $\cos\delta$ durch $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\delta$, so wird:

$$(81) \qquad J = E^2 \left\{\cos^2\chi - \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \chi) \sin^2\tfrac{1}{2}\delta\right\}.$$

Das erste Glied $E^2 \cos^2\chi$ giebt den Werth der Lichtintensität an, wie sie ohne Einschaltung der Krystallplatte aus dem Analysor austreten würde. Diese Intensität J_o soll die ursprüngliche genannt werden. Es ist also

$$(82) \qquad J_o = E^2 \cos^2\chi.$$

Wir wollen zwei Fälle genauer betrachten:

1) Parallele Nicols, $\chi = 0$. Dann ist

$$(83) \qquad J = J_o\,(1 - \sin^2 2\varphi \sin^2\tfrac{1}{2}\delta).$$

Bei Drehung der Krystallplatte wird in 4 Lagen, bei $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$, $\varphi = 3\pi/2$ die ursprüngliche Lichtintensität erreicht, d. h. allemal dann, wenn eine der Schwingungsebenen im Krystall mit denen des Nicols zusammenfällt. In den Zwischenlagen ($\varphi = \pi/4$ etc.) ist

$$(84) \qquad J = J_o\,(1 - \sin^2\tfrac{1}{2}\delta) = J_o \cos^2\tfrac{1}{2}\delta,$$

d. h. es kann bei geeigneten Werthen δ, d. h. Dicken der Krystallplatte, völlige Dunkelheit eintreten.

2) Gekreuzte Nicols, $\chi = \pi/2$. Es ist $J_o = 0$, und

$$J_x = E^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta. \tag{85}$$

Die Platte erscheint also für jede Dicke dunkel, falls die Schwingungsebenen des Krystalls mit denen der Nicols zusammenfallen, sonst nur dann dunkel, falls $\delta = 2h\pi$ ist. In den Zwischenlagen $\varphi = \pi/4$ etc. ist

$$J_x = E^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta. \tag{86}$$

Man kann daher, falls nicht zufällig $\delta = 2h\pi$ ist, durch Drehung der Krystallplatte die Polarisations- (oder Schwingungs-) Richtungen im Krystall finden als sogenannte Auslöschungsrichtungen.

Eine keilförmige Krystallplatte muss daher zwischen gekreuzten Nicols, falls man sie nicht gerade in die Auslöschungslage bringt, von schwarzen, der Keilkante parallelen Streifen durchzogen sein, welche an denjenigen Stellen liegen, deren Dicke d der Beziehung $\delta = \pm 2h\pi$ entspricht. Im einfallenden weissen Lichte müssen die Streifen farbig erscheinen, da δ mit der Farbe variirt.

Auch eine planparallele Platte muss, zwischen zwei Nicols gebracht, im Allgemeinen stets farbig erscheinen, wenn weisses Licht einfällt. Im Allgemeinen ist nun nicht nur die Amplitude E und die Phasendifferenz δ, sondern auch der Winkel φ, d. h. die Lage der Schwingungsebenen, von der Farbe (λ) abhängig. Letztere Abhängigkeit können wir aber meist vernachlässigen wegen des geringen Betrages der Dispersion der optischen Axen. Zwischen gekreuzten Nicols ist also für $\varphi = \pi/4$ nach (86) bei weissem Licht:

$$J_x = \Sigma E^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta,$$

wobei die Σ über die den einzelnen Farben entsprechenden Werthe zu erstrecken ist. Es bedeutet also:

$$\Sigma E^2 = \text{weisses Licht}. \tag{87}$$

Nach (80) hängt nun δ wesentlich durch den Nenner λ von der Farbe ab. Setzen wir, was annähernd meist gestattet ist, $\frac{V}{V_1} - \frac{V}{V_2}$ als unabhängig von der Farbe voraus, so wird also

$$J_x = \Sigma E^2 \sin^2 \pi \frac{d'}{\lambda}, \tag{87'}$$

wobei

$$d' = d\left(\frac{V}{V_1} - \frac{V}{V_2}\right)$$

von λ nahezu unabhängig ist. Bei Vergleich der Formel (87') mit der früheren Formel (78) auf S. 284 erkennt man, dass die Krystallplatte annähernd die (Newton'sche) Interferenzfarbe bei der Reflexion an einer dünnen Lichtplatte der Dicke $d'/_2$ zeigt. Die Farben weichen aber merklich von den Newton'schen Interferenzfarben dünner Blättchen ab, sobald die Dispersion im Krystall für beide Wellen stark verschieden ist. Denn dann ist d' nicht mehr von λ unabhängig. Dies ist z. B. beim unterschwefelsauren Strontian, Apophyllit (von den Faröer-Inseln), Brucit, Vesuvian der Fall.

Zwischen parallelen Nicols hat die Krystallplatte stets die complementäre Farbe zu der Farbe, welche sie bei gleichem φ zwischen gekreuzten Nicols zeigt. Denn nach (83) und (85) ergiebt die Summe der Lichtintensitäten in beiden Fällen beständig ΣE^2, was nach (87) weissem Licht entspricht.

In den Newton'schen Interferenzfarben treten bei gewissen Werthen δ sogenannte empfindliche Farben auf, welche stark variiren, falls δ nur wenig schwankt. Eine solche empfindliche Farbe ist z. B. ein Violett erster Ordnung, welches eintritt, falls δ für Licht mittlerer Wellenlänge etwa den Werth π besitzt. Die Farbe schlägt für eine geringe Vergrösserung von δ in blau, für eine geringe Verminderung in roth um. Man kann nun eine Krystallplatte $\mathfrak{P}$, welche diese empfindliche Farbe zeigt, z. B. eine parallel zur Axe geschnittene Quarzplatte von geeigneter Dicke, dazu benutzen, um Spuren schwacher Doppelbrechung in einer Platte $\mathfrak{P}'$ zu erkennen, da durch die letztere sofort die Farbe von $\mathfrak{P}$ verändert wird, falls man $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$, aufeinander gelegt, zwischen gekreuzten Nicols betrachtet. Noch empfindlicher wird die Vorrichtung, wenn man die Platte $\mathfrak{P}$ in der Richtung der Halbirungslinie ihrer Schwingungsebenen zerschneidet und dann die beiden Hälften in ihrer Schnittlinie wieder vereinigt, nachdem man zuvor eine derselben um die Normale der Schnittfläche um 180° umgeklappt hat. Eine geringe Doppelbrechung in der Platte $\mathfrak{P}'$ bewirkt dann eine Farbenänderung der beiden Hälften von $\mathfrak{P}$ im entgegengesetzten Sinne. Diese Vorrichtung wird nach ihrem Erfinder die Bravais'sche Doppelplatte genannt. Man kann mit ihrer Hülfe leicht z. B. nachweisen, dass der Druck der Finger genügt,

um in einem Glaswürfel Doppelbrechung zu erzeugen. — Auch die Auslöschungsrichtungen in 𝔓' kann man mit Hülfe einer aufgelegten Bravais'schen Doppelplatte 𝔓 scharf bestimmen.

Die Anwendung der krystalloptischen Eigenschaften zur Construction des Babinet'schen oder Sénarmont'schen Compensators ist schon oben S. 236 besprochen worden.

15. Interferenzerscheinungen von Krystallplatten in convergent einfallendem, polarisirtem Lichte. Betrachten wir zunächst den Fall, dass polarisirtes Licht unter dem Einfallswinkel i die Krystallplatte durchsetze. Die Brechungswinkel seien r_1 und r_2 (vgl. Figur 92). Die Phasendifferenz δ zwischen beiden im Krystall fortgepflanzten Wellen ergiebt sich aus der Figur zu

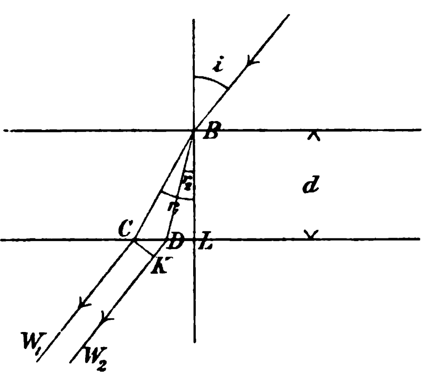


Fig. 92.

$$\delta = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{BD}{V_2} + \frac{DK}{V} - \frac{BC}{V_1}\right),$$

wobei DK die Projection von CD auf die Fortpflanzungsrichtung der Welle W_2 sein soll. Nun ist $BD = d/\cos r_2$, $BC = d/\cos r_1$, $DK = CD \sin i = (BC \sin r_1 - BD \sin r_2) \sin i$, daher

$$\delta = \frac{2\pi}{T} d \left\{\left(\frac{\sin i \sin r_1}{V} - \frac{1}{V_1}\right)\frac{1}{\cos r_1} - \left(\frac{\sin i \sin r_2}{V} - \frac{1}{V_2}\right)\frac{1}{\cos r_2}\right\}.$$

Da nun nach dem Brechungsgesetz ist

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin r_1}{V_1} = \frac{\sin r_2}{V_2},$$

so wird

$$\delta = \frac{2\pi}{T} d \left\{\frac{\cos r_2}{V_2} - \frac{\cos r_1}{V_1}\right\}. \tag{88}$$

Führt man nun die Winkel g_1 und g_2 ein, welche die Wellennormale im Krystall mit den optischen Axen desselben bildet, so kann man nach den Gleichungen (29) auf S. 298 V_1 und V_2 rational durch $a^2 + c^2$ und $a^2 - c^2$ ausdrücken. Beschränkt man sich auf erste Ordnung in $a^2 - c^2$, was bei der Kleinheit der Doppelbrechung bei den in der Natur vorkommenden Mineralien stets zulässig ist,

so wird

$$\delta = \frac{\pi}{T} \cdot \frac{d}{\cos r} \frac{a^2 - c^2}{\left(\frac{a^2 + c^2}{2}\right)^{3/2}} \sin g_1 \sin g_2 . \tag{89}$$

Hierin bezeichnen g_1 und g_2 die Winkel, welchen eine, gleichgültig welche, der beiden gebrochenen Wellennormalen mit den optischen Axen einschliesst; r bedeutet den Brechungswinkel für eine der gebrochenen Wellennormalen, es ist also $d : \cos r$ der im Krystall zurückgelegte Weg. (Wegen der Beschränkung auf erste Ordnung in $a^2 - c^2$ kann man $BD = BC$ setzen.)

Führt man die Hauptbrechungsindices n_1 und n_3 des Krystalls ein, und nennt n den Mittelwerth derselben, so ist

$$a^2 = V^2 : n_1{}^2, \; c^2 = V^2 : n_3{}^2,$$

$$\delta = \frac{\pi d}{\lambda \cos r} \frac{n_3{}^2 - n_1{}^2}{n} \sin g_1 \sin g_2 = \frac{2\pi d}{\lambda \cos r} (n_3 - n_1) \sin g_1 \sin g_2 . \tag{90}$$

Zwischen Polarisator und Analysator zeigt die Krystallplatte annähernd die durch (81) ausgedrückte Lichtintensität, wenn man wenigstens absieht von den an den Grenzflächen des Krystalls durch die Brechung herbeigeführten Amplitudenänderungen.

Von besonderem Interesse ist nun der Fall, wenn man im Gesichtsfelde gleichzeitig die Wirkung vergleichen kann, welche verschiedene Einfallswinkel i auf die Lichtintensität J hervorbringen. Man kann dies in dem in den Figg. 93 und 94 dargestellten Polarisationsapparate erreichen. Der Spiegel A reflectirt das Tageslicht in den Apparat; es wird durch die beiden Linsen B und D auf die Oeffnung eines Diaphragmas E concentrirt und beim Passiren des Nicols C polarisirt. E liegt in der Brennweite einer (oder mehrerer) Sammellinse F, welche jeden von E ausgehenden Strahlenkegel in ein Bündel paralleler Strahlen verwandelt, die nun die Krystallplatte G in allen möglichen Richtungen durchdringen; in der Figur sind drei solcher Bündel gezeichnet. Die Strahlen fallen auf eine Sammellinse H, die in ihrer Brennweite, im Diaphragma J, jedes parallele Bündel in einem Punkte M vereinigt. Durch die Lupe K wird das in M entstehende Bild vergrössert; die Strahlen müssen aber noch den Analysator L passiren. Wie aus der Figur ersichtlich ist, wird die Mitte des Bildes in J gebildet durch Strahlen, welche senkrecht in die Krystallplatte eingetreten sind, die seitlichen Theile durch Strahlen, welche die Krystallplatte in immer schrägerer Richtung passirt haben, je mehr der betrachtete Punkt

M am Rande von J liegt. Wir übersehen so mit einem Blick die Interferenzen von Strahlen, die in verschiedenen Richtungen die Krystallplatte durchlaufen haben.

An den verschiedenen Punkten M des Gesichtsfeldes variirt die Phasendifferenz δ und der Winkel φ, welchen die Schwingungs-

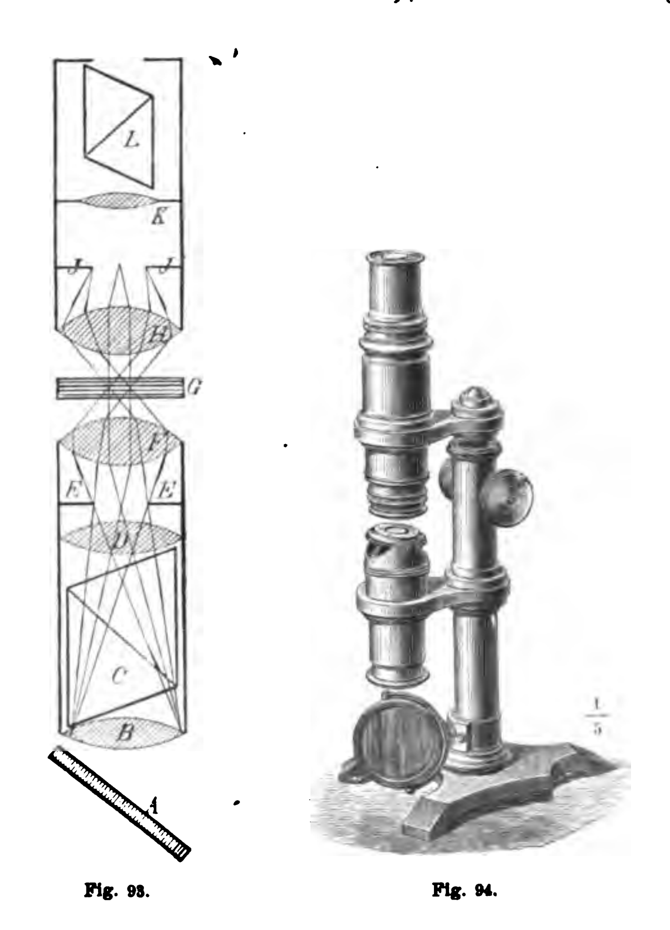


Fig. 93. Fig. 94.

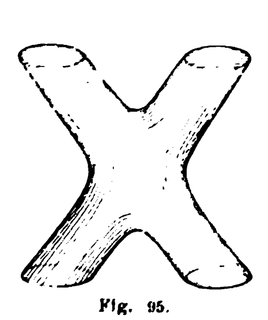
ebene des Polarisators mit einer Schwingungsrichtung der einen Welle im Krystall bildet. Die Punkte des Gesichtsfeldes, für welche δ constant ist, bilden eine gewisse Curvenschaar, die Curven gleichen Gangunterschiedes (Isochromaten); die Punkte des Gesichtsfeldes, für welche φ constant ist, bilden die Curven gleicher Polarisationsrichtung (Isogyren). Mit Hülfe dieser

beiden Curvenschaaren lässt sich die im Gesichtsfelde wahrgenommene Lichtstärke am einfachsten beschreiben.

Denkt man sich sämmtliche, die Krystallplatte durchsetzende Lichtstrahlen durch einen einzigen Punkt O der ersten Begrenzungsfläche der Platte hindurchgehend, so gelangt nur ein Lichtstrahl zum Punkte M des Gesichtsfeldes. Derselbe schneidet die zweite Begrenzungsfläche der Platte in dem Punkte M' (Spur des Punktes M). Wenn wir auf diese Weise jedem Punkte M der Brennebene einen Punkt M' der Plattengrenze zuordnen, so sind Figuren, deren Punkte zugeordnete sind, einander ähnlich. Wir werden daher uns jetzt immer auf die Punkte M' der zweiten Krystallgrenze beziehen. Die Curven gleichen Gangunterschiedes werden nun offenbar nach Formel (89), in der $d : \cos r$ den in der Krystallplatte zurückgelegten Weg des Lichtstrahls bezeichnet, erhalten durch den Schnitt der zweiten Grenzfläche des Krystalls mit der um den Punkt O construirten Flächenschaar:

$$\rho \sin g_1 \sin g_2 = Const., \tag{91}$$

wobei ρ den Radiusvector eines Punktes P einer Fläche vom Punkte O aus bezeichnet, während g_1 und g_2 die Winkel sind, welche der Radiusvector ρ mit den optischen Axen einschliesst.


Fig. 95.

Eine solche Fläche hat etwa die in Figur 95 gezeichnete Gestalt, sie muss in der Richtung der optischen Axen asymptotisch ins Unendliche verlaufen, da für $g_1 = 0$ oder $g_2 = 0$ nach (91) $\rho = \infty$ wird.

Ist nun z. B. die Krystallplatte senkrecht zu einer optischen Mittellinie geschnitten, d. h. zu einer in der Ebene der optischen Axen liegenden optischen Symmetrieaxe, so sind die Curven gleichen Gangunterschiedes lemniscatenartige Curven, deren Pole A_1, A_2 die optischen Axen sind. Betrachten wir die Platte zwischen gekreuzten Nicols, so gilt die Formel (85). Bei Beleuchtung mit homogenem Licht zeichnen sich die Curven gleichen Gangunterschiedes, für welche $\delta = 2h\pi$ ist, als schwarze lemniscatenartige Curven ab. Bei einfallendem weissen Licht erscheinen diese Curven als solche gleicher Farbe (daher Isochromaten genannt), und zwar treten annähernd die Newton'schen Interferenzfarben auf. Doch entstehen aus dem oben S. 322 genannten Grunde Abweichungen

davon bei einigen Krystallen,[1]) auch complicirt sich hier die ganze Erscheinung durch die Dispersion der optischen Axen, d. h. durch die Erscheinung, dass die Spur der optischen Axen im Interferenzbilde mit der Farbe variirt.[2]) Bei einigen Krystallen (Brookit) kommt es sogar vor, dass die Ebene der optischen Axen bei Veränderung der Farbe in eine senkrechte Lage umschlägt. Durch die Dispersion der optischen Axen kann die Form der Isochromaten bei einfallendem weissen Licht bedeutend verändert werden. Das ganze Gesichtsfeld wird nun noch gemäss (85) von einer schwarzen Curve durchzogen, nämlich der sogenannten Hauptisogyre, für welche $\sin 2\varphi = 0$ ist. Wenn die Ebene der optischen Axen mit der Polarisationsebene des Analysators (oder Polarisators) zusammenfällt (sogenannte erste Hauptlage), ist diese Hauptisogyre ein schwarzes Kreuz, dessen einer Balken durch die optischen Axen



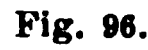


Fig. 96.



Fig. 97.

geht, während der andere, dazu senkrechte, durch die Mitte des Gesichtsfeldes geht. Denn für alle Punkte P dieses Kreuzes liegen nach der auf S. 299 angegebenen Construction die Polarisationsrichtungen H_1 und H_2 parallel und senkrecht zur Verbindungslinie $A_1 A_2$ der optischen Axen. Man erhält daher das in Figur 96 dargestellte Interferenzbild.

1) Besonders auffallend sind die Ringe in Apophyllit von den Faröer-Inseln und aus Peonah in Ostindien. Die Ringe sind alle gleich gefärbt und zwar abwechselnd dunkel violett und schmutzig gelb. Diese Apophyllite sind positiv doppelbrechend für rothes Licht, negativ für blaues Licht, für gelb haben sie keine Doppelbrechung.

2) Vgl. hierüber das Nähere bei Mascart, Traité d'Optique, T. 2, p. 173—190. Paris 1891. — Im Seignettesalz beträgt der Winkel der optischen Axen für Roth 76°, für Violett aber 56°.

In der sogenannten **zweiten Hauptlage** der Krystallplatte, wenn nämlich die Ebene der optischen Axen A_1, A_2 den Winkel 45° mit der Polarisationsebene des Analysators bildet, sind die Hauptisogyren hyperbelartige Büschel, welche durch die optischen Axen gehen. Man erhält daher das in Figur 97 dargestellte Bild. Annähernd kann man die Gleichung der Hauptisogyre ableiten, wenn man bei beliebiger Lage des Punktes P auf der Krystallplatte die den Winkel A_1PA_2 halbirende Linie PB als die eine Polarisationsrichtung H im Krystall auffasst[1]) (vgl. Figur 98). Die Coordinatenrichtungen x, y mögen in die Polarisationsebenen des Analysators und Polarisators gelegt sein. Bezeichnet man die Strecken $PA_1 = l_1$, $PA_2 = l_2$, $A_1A_2 = l$, so ist

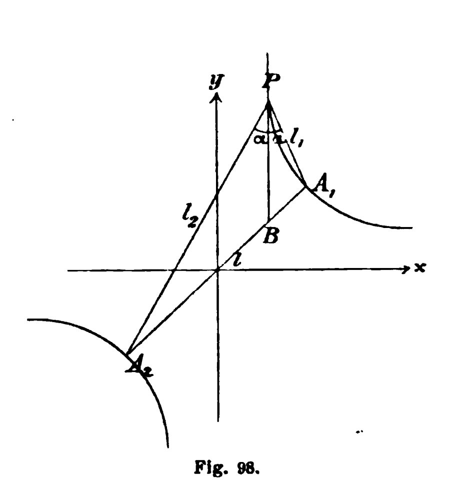


Fig. 98.

$$BA_1 : BA_2 = l_1 : l_2 , \quad BA_1 + BA_2 = l,$$

d. h.

$$BA_1 = \frac{l_1}{l_1 + l_2}\, l. \tag{92}$$

Ferner folgt aus Dreieck A_1BP:

$$\sin \alpha : \sin \sphericalangle A_1BP = BA_1 : l_1 . \tag{93}$$

Nun ist aber für die Hauptisogyre $\sphericalangle A_1BP = 45^0$, da die Verbindungslinie A_1A_2 der optischen Axen den Winkel 45° mit den Coordinatenrichtungen bilden sollen und für die Hauptisogyre die Linie PB mit der y-Axe parallel laufen soll. Es ist also nach (92) und (93)

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{l}{l_1 + l_2} . \tag{94}$$

Ferner folgt aus Dreieck A_1PA_2:

$$l^2 = l_1{}^2 + l_2{}^2 - 2l_1l_2 \cos \varphi = (l_1 - l_2)^2 + 4l_1l_2 \sin^2 \alpha,$$

---

1) Nach der oben S. 299 gegebenen Regel ist dies nur annähernd richtig. Die Aufgabe ist strenger durchgeführt in Winkelmann's Hdb. d. Phys. Optik, S. 726 ff.

d. h. nach (94):

$$l^2 = (l_1 - l_2)^2 + 2l^2 \frac{l_1 l_2}{(l_1 + l_2)^2},$$

oder

$$l^2 (l_1^2 + l_2^2) = (l_1^2 - l_2^2)^2. \tag{95}$$

Nennt man nun die Coordinaten der optischen Axenpunkte A_1 und A_2 : $\pm p$, so ist

$$l_1^2 = (x - p)^2 + (y - p)^2, \quad l_2^2 = (x + p)^2 + (y + p)^2, \quad l^2 = 8p^2$$

und (95) wird:

$$xy = p^2. \tag{96}$$

Dies stellt aber eine gleichseitige Hyperbel dar, welche durch die beiden optischen Axen A_1 und A_2 geht und welche die Coordinatenrichtungen zu Asymptoten hat.

Diese die Interferenzfigur durchziehenden schwarzen Hauptisogyren sind sehr geeignet, den scheinbaren Winkel der optischen Axen zu messen, d. h. denjenigen Winkel, welchen zwei aus der Platte austretende Wellennormalen mit einander bilden, welche im

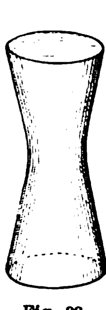


Fig. 99.



Fig. 100.

Innern derselben in den Richtungen der optischen Axen verlaufen sind. Aus dem Brechungsgesetz findet man dadurch den Winkel der optischen Axen selbst, wenn man die mittlere Hauptlichtgeschwindigkeit b im Krystall kennt. Man ermittelt den scheinbaren Winkel der optischen Axen, indem man die Krystallplatte um eine zur Ebene der optischen Axen senkrechte Axe dreht und dadurch die Spuren der optischen Axen nacheinander in die (durch ein Fadenkreuz markirte) Mitte des Gesichtsfeldes bringt. Der

Drehungswinkel wird an einem Theilkreise abgelesen. Die zu diesem Zweck construirten Polarisationsapparate heissen Axenwinkelapparate oder Stauroskope.

Bei einaxigen Krystallen hat eine Fläche gleichen Gangunterunterschiedes ($\delta = const.$) die in Figur 99 gezeichnete Gestalt. Bei einer senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Platte sind die Isochromaten concentrische Kreise um die optische Axe, die Hauptisogyre bildet bei gekreuzten Nicols ein schwarzes, rechtwinkliges Kreuz. Man erhält daher das in Figur 100 dargestellte Interferenzbild. Aus der Messung der Ringdurchmesser kann man die Differenz der beiden Hauptbrechungsindices des Krystalls erhalten.

Betreffs der Unterscheidung des Characters der Doppelbrechung vermöge eines aufgelegten Gypsblättchens, dessen $\delta = \pi/2$ beträgt, sowie über andere specielle Fälle vgl. Liebisch, phys. Krystallogr., oder Winkelmann, Hdb. d. Phys. Optik.

Kapitel IV.

Absorbirende Körper.

1. Elektromagnetische Theorie. Unter absorbirenden Körpern versteht man solche, in denen das Licht eine Schwächung erleidet, die um so bedeutender ist, je länger der in dem Körper vom Licht zurückgelegte Weg ist. Durch besonders starke Lichtabsorption zeichnen sich die Metalle aus. Nach der elektromagnetischen Theorie lässt sich Absorption bei allen Körpern erwarten, welche keine vollkommenen Isolatoren sind. Denn die durch Leitung entstehenden elektrischen Ströme erzeugen Joule'sche Wärme, deren Energie muss also für die strahlende Energie des Lichtes verloren gehen.

Ergänzen wir jetzt zunächst die oben S. 248 ff. gegebene elektromagnetische Theorie für einen unvollkommenen (isotropen) Isolator, d. h. einen Körper, der ausser einer Dielektricitätsconstante ε auch noch eine elektrische Leitfähigkeit σ besitzt.

Bezeichnet man die Componenten der Stromdichte wie früher mit j_x, j_y, j_z (nach elektrostatischem Maasse), so ist für unvollkommene Isolatoren zu setzen:

$$j_x = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \sigma X, \quad j_y = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t} + \sigma Y, \quad j_z = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t} + \sigma Z. \tag{1}$$

Die Strömung setzt sich nämlich zusammen aus den Verschiebungsströmen, die wir früher (cf. Formeln (17) auf S. 249) allein berücksichtigt haben, und den Leitungsströmen. Diese bedingen in (1) die Zusatzglieder σX, σY, σZ. Misst man Stromdichte und elektrische Kraft nach elektrostatischem Maasse, so wird auch σ die absolute elektrische Leitfähigkeit nach elektrostatischem Maasse genannt. Sie hat für Quecksilber den Zahlwerth [1]) $\sigma = 9{,}56 \cdot 10^{15}$.

Die Formeln (1) enthalten die einzige Erweiterung, welche an der bisherigen Theorie vollkommener Isolatoren anzubringen ist. Für jeden Körper werden nämlich die früheren Formeln (7) und (11) der S. 245, 247 als Grundformeln der Maxwell'schen Theorie festgehalten. Dies ergiebt, falls die Magnetisirungsconstante μ gleich 1 gesetzt wird, sodass $4\pi s_x = \partial\alpha/\partial t$ etc. ist, die beiden Systeme:

$$\frac{4\pi j_x}{c} = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}, \quad \frac{4\pi j_y}{c} = \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}, \quad \frac{4\pi j_z}{c} = \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{3}$$

Dass wir auch jetzt die Magnetisirungsconstante μ der absorbirenden Körper gleich 1 setzen, könnte zunächst bedenklich erscheinen, da unter die absorbirenden Körper auch die stark magnetischen Metalle Eisen, Nickel, Kobalt fallen. Indess ergiebt sich einerseits aus der Erfahrung, dass nach dem optischen Verhalten für alle Metalle die Magnetisirungsconstante gleich 1 zu setzen ist bei Lichtschwingungen,[2]) andrerseits führt auch die Theorie dazu, wie näher im Kapitel VII ausgeführt wird.

1) Dieser Zahlwerth hat die Dimension einer reciproken Zeit. Als Zeiteinheit ist dabei die sec. angenommen.

2) In der „Physik d. Aethers“, Stuttgart 1894, S. 547 ff. habe ich die allgemeineren Gleichungen für beliebige Magnetisirungsconstante entwickelt und dargethan, dass sie nach dem optischen Verhalten des Eisens den Werth 1 haben muss.

Die Grenzbedingungen für den Uebergang des Lichtes über die Grenze zweier verschiedener (absorbirender) Medien sind nach den allgemein geltenden Schlüssen, wie sie oben S. 250 angeführt sind, in der bisherigen Form enthalten:

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \tag{4}$$

falls die xy-Ebene zur Grenze parallel liegt.

Die Gleichungen (1) bis (4) bilden die vollständige Grundlage für die elektromagnetische Theorie isotroper absorbirender Medien.

Zur Integration der Differentialgleichungen schreiben wir analog wie oben S. 268:

$$X = Ae^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - (\mu x + \nu y + \varkappa z)\right)}, \tag{5}$$

wobei hier nicht nur A, sondern eventuell auch μ, ν, $\varkappa$ complexe Grössen sein sollen. Die eigentliche Bedeutung von X ist der reelle Theil der in (5) hingeschriebenen complexen Grösse. Wir können aber auf diese physikalische Bedeutung von X zum Schluss der Rechnung wieder zurückgreifen, und erhalten für die Rechnung selbst eine bedeutende Vereinfachung, wenn wir X nach (5) jener complexen Grösse direkt gleichsetzen. Nach (5) ergiebt sich nämlich:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = i\frac{2\pi}{T} X,$$

sodass unsere Gleichungen (1) übergehen in

$$j_x = \frac{\varepsilon - i \,.\, 2\sigma T}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}, \text{ etc.} \tag{6}$$

Der ganze Unterschied isotroper durchsichtiger und absorbirender Medien liegt dann nur darin, dass die reelle Constante ε der durchsichtigen Körper bei absorbirenden durch eine complexe Constante

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\, 2\sigma T \tag{7}$$

ersetzt wird. Alle unseren früheren Formeln können wir anwenden, sobald wir nur ε durch ε' ersetzen.

So ist z. B. (nach den Formeln (3) der S. 255):

$$\frac{\varepsilon'}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X. \tag{8}$$

Dies liefert nach (5):

$$\frac{\varepsilon'}{c^2} = \mu^2 + \nu^2 + \pi^2. \tag{9}$$

Da ε' complex ist, so können daher auch μ, ν, π nicht alle drei reelle Grössen sein. Dadurch prägt sich aber stets eine Lichtabsorption, d. h. Schwächung der Amplitude, aus. Setzen wir z. B. $\mu = \nu = 0$, $\pi = \frac{1 - i\varkappa}{V}$, wobei $\varkappa$ und V reell sein sollen, so wird nach (5)

$$X = A\,e^{-2\pi\varkappa\frac{z}{\lambda}} \,.\, e^{i\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}, \tag{10}$$

wobei

$$\lambda = T\,.\,V$$

gesetzt ist. Die Gleichung (10) sagt aber aus, dass nach Durcheilen der Strecke λ (Wellenlänge) die Lichtamplitude im Verhältniss $e^{-2\pi\varkappa}$ abgenommen hat. $\varkappa$ wird daher der Absorptionsindex genannt.

Der Ansatz (10) würde zu machen sein, falls Licht aus Luft senkrecht in einen absorbirenden Körper einfällt. V ist die Geschwindigkeit des Lichtes im Körper, λ die Wellenlänge in ihm. Nennt man das Verhältniss $c : V = n$ den Brechungsindex des Körpers, da es das Verhältniss der Lichtgeschwindigkeiten im Vacuum (die wir mit der in Luft identificiren können) und im Körper bedeutet, so ist nach (9)

$$\varepsilon' = n^2\,(1 - \varkappa^2 - 2i\varkappa),$$

d. h.

$$n^2\,(1 - \varkappa^2) = \varepsilon, \quad n^2\varkappa = \sigma T. \tag{11}$$

Durch diese Relation würde also Brechungs- und Absorptionsindex sich aus den elektrischen Constanten bestimmen. Wir werden zwar unten sehen, dass die Relation (11) numerisch nicht bestätigt wird, indess ist hier zunächst die Hauptsache, dass ein complexer Werth von ε' thatsächlich Lichtabsorption bedingt, und dass man den reellen und imaginären Bestandtheil von ε' ersetzen kann nach der Gleichung (11) durch die physikalisch anschaulicheren Begriffe des Brechungs- und Absorptionsindex.

2. Reflexion an Metallen. Wir benutzen die frühere Bezeichnungsweise der S. 259 u. ff. Es soll linear polarisirtes Licht einfallen, dessen Polarisationsebene unter 45° gegen die Einfallsebene

geneigt sei. Dann ist $E_p = E_s$. Wir können vollständig jene Entwickelungen auch hier benutzen, wenn wir nur die dortige reelle Constante ε ersetzen durch einen complexen Werth ε'. φ bedeutet den Einfallswinkel des Lichtes, χ ist eine complexe Grösse, welche sich aus φ bestimmt durch:

$$(12) \qquad \sin\chi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varepsilon'}} .$$

Nach (27) auf S. 264 ergiebt sich dann das Verhältniss der (complexen) Amplituden des reflectirten Lichtes zu:

$$(13) \qquad \frac{\mathrm{R}_p}{\mathrm{R}_s} = \varrho \, . \, e^{i\varDelta} = - \frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)} .$$

Es bedeutet hier ϱ das Verhältniss der reellen Amplituden der p- und s-Componente des reflectirten Lichtes, $\varDelta$ die relative Phasendifferenz beider Componenten, wie man sofort erkennt, wenn man $\mathrm{R}_p = R_p \, . \, e^{i\delta_p}$, $\mathrm{R}_s = R_s \, . \, e^{i\delta_s}$ setzt, worin R_p, R_s, δ_p, δ_s reelle Grössen sind. Es ist dann

$$(14) \qquad \varrho = R_p : R_s, \quad \varDelta = \delta_p - \delta_s .$$

Da die rechte Seite von (13) eine complexe Grösse ist, so ist auch $\varDelta$ von Null verschieden. Einfallendes linear polarisirtes Licht wird also durch Reflexion an einem Metall zu elliptisch polarisirtem.

Nach (13) folgt

$$\frac{1 + \varrho \, . \, e^{i\varDelta}}{1 - \varrho \, . \, e^{i\varDelta}} = \frac{\sin\varphi \sin\chi}{\cos\varphi \cos\chi} .$$

Ersetzt man hierin χ durch φ und ε' gemäss (12), so entsteht:

$$(15) \qquad \frac{1 + \varrho \, . \, e^{i\varDelta}}{1 - \varrho \, . \, e^{i\varDelta}} = \frac{\sin\varphi \, tg\,\varphi}{\sqrt{\varepsilon' - \sin^2\varphi}} .$$

Für $\varphi = 0$ ergiebt sich daher $\varrho \, . \, e^{i\varDelta} = -1$, d. h. $\varDelta = 0$, $\varrho = -1$; für $\varphi = \pi/2$ ergiebt sich $\varrho \, . \, e^{i\varDelta} = +1$, d. h. $\varDelta = 0$, $\varrho = 1$. Die relative Phasendifferenz $\varDelta$ im reflectirten Lichte, d. h. auch seine Elliptizität, verschwindet daher für senkrechte und für streifende Incidenz. Derjenige Einfallswinkel φ, für welchen die relative Phasendifferenz $\varDelta$ den Werth $\pi/2$ annimmt, wird der Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ genannt. Für ihn ist also $e^{i\varDelta} = i$, daher nach (15):

$$\frac{1 + i \cdot \bar{\varrho}}{1 - i \cdot \bar{\varrho}} = \frac{\sin \bar{\varphi} \cdot tg\, \bar{\varphi}}{\sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \bar{\varphi}}} \,. \tag{16}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit ihrer complex conjugirten Gleichung

$$\frac{1 - i \cdot \bar{\varrho}}{1 + i \cdot \bar{\varrho}} = \frac{\sin \bar{\varphi} \cdot tg\, \bar{\varphi}}{\sqrt{\varepsilon'' - \sin^2 \bar{\varphi}}} \,,$$

worin ε'' der complex conjugirte Werth zu ε' bedeutet, so entsteht auf der linken Seite 1. Der Haupteinfallswinkel ist also durch die Gleichung bestimmt:

$$\sin^4 \bar{\varphi} \cdot tg^4\, \bar{\varphi} = n^4 (1 + \varkappa^2)^2 - 2n^2 (1 - \varkappa^2) \sin^2 \bar{\varphi} + \sin^4 \bar{\varphi} \,. \tag{17}$$

Für numerische Berechnungen braucht man fast stets nur das erste Glied der rechten Seite zu berücksichtigen, da bei allen Metallen $n^2 (1 + \varkappa^2)$ einen erheblich über 1 liegenden Werth hat, der zwischen 8 bis 30 liegt. Mit dieser Annäherung wird einfach

$$\sin \bar{\varphi}\, tg\, \bar{\varphi} = n \sqrt{1 + \varkappa^2} \,. \tag{18}$$

Man erhält diese Annäherung direct aus (15), wenn man im Nenner der rechten Seite $\sin^2 \varphi$ neben ε' vernachlässigt. Da nach (11) ist

$$\sqrt{\varepsilon'} = n (1 - i\varkappa) \,, \tag{19}$$

so wird dann (15) zu

$$\frac{1 + \varrho \cdot e^{i\Delta}}{1 - \varrho \cdot e^{i\Delta}} = \frac{\sin \varphi\, tg\, \varphi}{n (1 - i\varkappa)} \,. \tag{20}$$

Schreibt man

$$\varrho = tg\, \psi \,, \tag{21}$$

so bedeutet ψ das Azimuth der Polarisationsebene des reflectirten Lichtes gegen die Einfallsebene, falls es durch irgend ein Mittel, z. B. einen Babinet'schen Compensator (vgl. oben S. 237) wieder linear polarisirt gemacht ist. Daher heisst ψ das Azimuth der wiederhergestellten Polarisation.

Es lässt sich nun leicht die Beziehung ableiten:

$$\frac{1 - \varrho\, e^{i\Delta}}{1 + \varrho\, e^{i\Delta}} = \frac{\cos 2\psi - i \sin \Delta \sin 2\psi}{1 + \cos \Delta \sin 2\psi} \,,$$

sodass aus (20) ableitbar ist:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \sin \Delta\, tg\, 2\psi \,, \\ n &= \sin \varphi\, tg\, \varphi \frac{\cos 2\psi}{1 + \cos \Delta \sin 2\psi} \,, \\ n^2 (1 + \varkappa^2) &= \sin^2 \varphi\, tg^2 \varphi \cdot \frac{1 - \cos \Delta \sin 2\psi}{1 + \cos \Delta \sin 2\psi} \,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Nach diesen Formeln lassen sich die optischen Constanten n und $\varkappa$ eines Metalls aus Beobachtung des reflectirten Lichtes (ψ und Δ) in meist genügender Annäherung[1]) finden.

Für den Haupteinfallswinkel $\varphi = \bar{\varphi}$ nennt man ψ das Hauptazimuth $\bar{\psi}$. Aus der ersten Formel (22) folgt

$$(23) \qquad \varkappa = tg\ 2\bar{\psi}.$$

Um umgekehrt Δ und ψ aus den optischen Constanten zu finden, setze man

$$(24) \qquad tg\ P = \frac{n\sqrt{1+\varkappa^2}}{\sin\varphi\ tg\ \varphi},\quad tg\ Q = \varkappa;$$

Dann ergiebt sich aus (20), da die rechte Seite den Werth $cotg\ P \, . \, e^{iQ}$ hat:

$$(25) \qquad \begin{aligned} tg\ \Delta &= \sin Q\ tg\ 2P, \\ \cos 2\psi &= \cos Q\ \sin 2P. \end{aligned}$$

Als **Reflexionsvermögen** des Metalles bezeichnet man das Verhältniss der reflectirten Lichtintensität zu der einfallenden Lichtintensität beim Einfallswinkel $\varphi = 0$. Nach Formel (26) auf S. 263 ist in diesem Falle, da n hier durch $n\,(1 - i\varkappa)$ zu ersetzen ist [cf. Formel (19)]:

$$(26) \qquad \frac{\mathrm{R}_p}{E_p} = \frac{R_p \, . \, e^{i\delta_p}}{E_p} = \frac{n\,(1-i\varkappa) - 1}{n\,(1-i\varkappa) + 1}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit ihrer complex conjugirten, so erhält man den Werth des Reflexionsvermögens R zu:

$$(27) \qquad R = \frac{R_p^2}{E_p^2} = \frac{n^2\,(1+\varkappa^2) + 1 - 2n}{n^2\,(1+\varkappa^2) + 1 + 2n}.$$

Da bei allen Metallen $2n$ klein im Vergleich zu $n^2\,(1 + \varkappa^2)$ ist, so ist R nahezu gleich 1, d. h. das Reflexionsvermögen sehr hoch. Man bezeichnet dieses starke Reflexionsvermögen der Metalle, welches bei Silber z. B. 95% erreicht, als **Metallglanz**.[2]) Der-

1) Strengere Formeln, welche $\sin^2\varphi$ nicht neben ε' vernachlässigen, sind in Winkelmann, Hdb. d. Phys. Optik, S. 822 ff. enthalten.

2) Dass dieser in der That nur durch das hohe Reflexionsvermögen bewirkt wird, kann man deutlich daran erkennen, dass auch eine Luftblase unter Wasser, an der das Licht total reflectirt wird, wie ein metallisch glänzender Quecksilbertropfen aussieht.

selbe ist um so stärker, je grösser der Absorptionsindex x des Metalls ist. Da x mit der Farbe variirt, so besitzen einige Metalle, wie besonders Gold und Kupfer, eine ausgesprochene Färbung. Dieselbe erscheint z. B. roth, wenn das rothe Licht stärker, als die anderen Farben reflectirt wird. Annähernd ist daher die Oberflächenfarbe des Metalles complementär zu der Farbe des durchgehenden Lichtes. Um letzteres überhaupt wahrzunehmen, bedarf es allerdings äusserst dünner Metallschichten, die nur wenige Tausendstel Millimeter dick sind. In so geringen Dicken erscheinen aber thatsächlich Goldschichten grün durchsichtig.

Lässt man das Licht zwischen zwei Spiegeln des gleichen Körpers wiederholt hin und her reflectiren, so wird ihre Farbe gesättigter, da die am stärksten absorbirte Farbe durch die wiederholten Reflexionen viel weniger geschwächt wird, als die anderen Farben. Dieses war auch das Mittel, mit Hülfe dessen Rubens, Nichols[1]) und Aschkinass[2]) Wärmestrahlen von der grössten bisher beobachteten Wellenlänge isolirt haben. Ein Auerbrenner ohne Glascylinder wurde als Strahlungsquelle benutzt, nach fünfmaliger Reflexion an Sylvin ergab sich eine annähernd homogene Strahlung der Wellenlänge (in Luft) $\lambda = 0{,}061$ mm, der grössten bisher nachgewiesenen Wellenlänge einer Wärmestrahlung. Das Reflexionsvermögen des Sylvins für diese Strahlen ist $R = 0{,}80$, d. h. 80%. Auch durch vielfache Reflexion an Steinsalz, Flussspath, Quarz kann man langwellige Wärmestrahlen isoliren.

Von den durch metallische Reflexion entstehenden Oberflächenfarben sind wohl zu unterscheiden die Farben, welche mässig absorbirende Körper mit rauher Oberfläche zeigen, z. B. gefärbtes Papier, pulverisirtes farbiges Glas etc. Diese Körper erscheinen im diffus reflectirten Lichte gefärbt, weil das Licht zum Theil erst aus inneren Theilen des Körpers reflectirt wird und daher der auswählenden Absorption des Körpers unterliegt. In diesen Fällen ist die Farbe im durchgehenden und reflectirten Licht die gleiche, nicht die complementäre, wie annähernd bei den Metallen.

3. Die optischen Constanten der Metalle. Die optischen Constanten n und x eines Metalls kann man nach den Formeln (22) experimentell bequem bestimmen, wenn man die Schwingungsellipse

---

1) Rubens und Nichols, Wied. Ann. 60, S. 418, 1897.

2) Rubens und Aschkinass, Wied. Ann. 65, S. 241, 1898.

des reflectirten Lichtes bei einfallendem linear polarisirten Lichte misst, d. h. Δ und ψ bestimmt nach der oben S. 235 u. ff. beschriebenen Methode mit Babinet'schem Compensator und analysirendem Nicol. Man muss nur darauf achten, dass die Metalloberfläche möglichst rein sei, weil Verunreinigungen derselben (Oberflächenschichten) stets den Haupteinfallswinkel zu klein erscheinen lassen.[1] Die folgende Tabelle enthält einige Zahlwerthe, die ich durch Reflexion an möglichst reinen Metallflächen für gelbes Licht erhalten habe:

Metalle	$n\varkappa$	n	$\bar{\varphi}$	$\bar{\psi}$	R
Silber	3,67	0,18	75°42′	43°35′	95,3 %
Gold	2,82	0,37	72°18′	41°39′	85,1 „
Platin	4,26	2,06	78°30′	32°35′	70,1 „
Kupfer	2,62	0,64	71°35′	38°57′	73,2 „
Stahl	3,40	2,41	77°3′	27°49′	58,5 „
Natrium	2,61	0,005	71°19′	44°58′	99,7 „
Quecksilber	4,96	1,73	79°34′	35°43′	78,4 „

Das Reflexionsvermögen R ist nicht direct beobachtet worden, sondern nach (27) berechnet.

Die optischen Constanten kann man auch durch Beobachtungen im durchgehenden Lichte feststellen. Durch Messung der Absorption in einer dünnen Schicht der Dicke d erhält man, wie aus (10) hervorgeht, einen Werth für $\varkappa : \lambda$, falls λ die Wellenlänge im Metall bedeutet. Da nun $\lambda = \lambda_0 : n$, falls λ_0 die Wellenlänge in Luft ist, so erhält man also $n\varkappa$, da λ_0 bekannt ist. An den Grenzen der dünnen Metallschicht treten aber bedeutende Schwächungen durch Reflexion ein. Um deren Wirkung zu eliminiren, vergleicht man zweckmässig die Absorptionen in zwei verschieden dicken Schichten. Die Reflexionsverluste sind dann in beiden Fällen nahezu dieselben, sodass man aus der Verschiedenheit der Absorption direct auf $n\varkappa$ schliesst. Die Beobachtungen leiden an der Schwierigkeit, löcherfreie, gleichmässig dicke Metallschichten von wenigen Tausendstel Millimeter Dicke herzustellen. Daher fällt $n\varkappa$ bei diesen Durchgangs-Beobachtungen meist kleiner aus, als nach der

1) Das Nähere hierüber vgl. bei P. Drude, Wied. Ann. 36, S. 885, 1889, — 39, S. 481, 1890.

Reflexionsmethode,[1]) in einigen Fällen[2]) (bei Silber, welches man verhältnissmässig einfach auf nassem Wege auf Glas niederschlagen kann) stimmt aber das aus der Absorption berechnete $n\varkappa$ gut überein mit dem aus der Reflexion berechneten.

Der Brechungsindex n kann analog wie bei durchsichtigen Medien aus der Brechung durch ein Metallprisma gefunden werden,[3]) nur bedarf es sehr geringer Prismenwinkel (Bruchtheile einer Bogenminute), damit das Licht überhaupt noch in merklicher Intensität durch das Metallprisma hindurch geht. Seitdem es Kundt[4]) gelungen ist, geeignete Metallprismen herzustellen (meist durch Elektrolyse auf platinirtem Glase), sind mehrfach[5]) die Brechungsindices von Metallen in dieser Weise bestimmt worden. Die Herstellung der Prismen sowohl, als die Beobachtungen sind sehr schwierige, da das Resultat als Quotient zweier sehr kleiner Grössen erhalten wird. Die Resultate stimmen meist gut überein mit den aus den Reflexionsbeobachtungen erhaltenen; z. B. wird das auffallende Resultat bestätigt, dass bei verschiedenen Metallen $n < 1$ ist.

Diese kleinen Brechungsindices von Silber, Gold, Kupfer und besonders Natrium sind ja sehr auffallend; sie besagen, dass sich in diesen Metallen das Licht viel schneller fortpflanzt, als in Luft.

Vergleichen wir diese optischen Constanten mit der Forderung (11) der elektromagnetischen Theorie, so springt ein Widerspruch sofort in die Augen: Es würde nämlich, da $\varepsilon = n^2(1-\varkappa^2)$ sein soll, bei allen Metallen die Dielektricitätsconstante ε negativ sein, da $\varkappa = tg\ 2\psi$, und 2ψ bei allen Metallen grösser als 45^0, d. h. $\varkappa > 1$ ist. Eine negative Dielektricitätsconstante hat aber keinen Sinn. Auch die zweite der Beziehungen (11): $n^2\varkappa = \sigma T$ wird nicht bestätigt, da z. B. bei Quecksilber (cf. oben S. 331) und gelbem Licht $\sigma T = 20$ ist, während $n^2\varkappa$ den Werth 8,6 hat. Für Silber ist σT viel grösser, als bei Quecksilber, während trotzdem $n^2\varkappa$ viel kleiner als bei Quecksilber ist.

---

1) Bei W. Rathenau, Die Absorption des Lichtes in Metallen. Dissert. Berlin 1889.

2) Bei W. Wernicke, Pogg. Ann. Ergzgbd. 8, S. 75, 1878. — Auch die Beobachtungen von W. Wien (Wied. Ann. 35, S. 48, 1888) ergeben annähernde Bestätigung.

3) Betreffs der Formeln vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 24, S. 144, 1885. — P. Drude, Wied. Ann. 42, S. 666, 1891.

4) A. Kundt, Wied. Ann. 34, S. 469, 1888.

5) Vgl z. B. Du Bois u. Rubens, Wied. Ann. 41, S. 507, 1890.

Wir treffen hier wieder auf dieselbe Thatsache, die wir schon oben constatirt haben, als wir die Brechungsindices durchsichtiger Körper mit den Dielektricitätsconstanten verglichen haben. Formal stimmt die elektromagnetische Theorie mit den Erscheinungen gut überein, die numerischen Werthe der optischen Constanten kann man aber nicht aus dem elektrischen Verhalten entnehmen. Die Erweiterung der Theorie, welche diesen Widerspruch hebt, soll im folgenden Kapitel gemacht werden.

4. Absorbirende Krystalle. Die Ausdehnung des bisherigen Ansatzes für isotrope absorbirende Körper auf Krystalle geschieht sehr einfach, indem man nach drei zu einander senkrechten optischen Symmetrieaxen verschiedene Dielektricitätsconstanten und verschiedene Leitfähigkeiten annimmt. Legt man das Coordinatensystem in diese drei Symmetrieaxen, so erhält man das frühere Formelsystem (12) der S. 292, nur bedeuten die ε_1, ε_2, ε_3 complexe Grössen, wenn man die elektrische Kraft als complexe Grösse nach Formel (5) dieses Kapitels (S. 332) zunächst in die Rechnung einführt. Allerdings würde der Ansatz insofern noch zu speciell sein, als die Symmetrieaxen für die Dielektricitätsconstante im Allgemeinen nicht zusammen zu fallen brauchen mit den Symmetrieaxen für die Leitfähigkeit; dies ist erst für Krystalle, die mindestens die Symmetrie des rhombischen Systemes besitzen, nothwendig. Indess wollen wir hier den allgemeinsten Fall nicht discutiren,[1]) da das Charakteristische schon bei der hier getroffenen Vereinfachung hervortritt.

Zur Integration der früheren Differentialgleichungen:

$$\frac{\varepsilon_1'}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \text{ etc.} \tag{28}$$

machen wir für die Componenten u, v, w des Lichtvectors den Ansatz:

$$\begin{gathered} u = \varepsilon_1' X = M e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - (mx + ny + pz)\frac{1 - i\varkappa}{V}\right)}, \\ v = \varepsilon_2' Y = N e^{i\frac{2\pi}{T}(t\ldots)}, \quad w = \varepsilon_3' Z = \Pi e^{i\frac{2\pi}{T}(t\ldots)}, \end{gathered} \tag{29}$$

wobei $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ sein soll, und M, N, Π complex sein können. Dieser Ansatz entspricht ebenen Wellen, deren Normale die Richtungscosinus m, n, p besitzt. V ist die Fortpflanzungs-

1) Dieser ist näher in Winkelmann's Hdb. d. Phys. Optik, S. 811 ff. ausgeführt.

geschwindigkeit der Wellenebenen, $\varkappa$ ihr Absorptionsindex (vgl. oben S. 333). Setzt man

$$\frac{V}{1 - i\varkappa} = \omega\,, \tag{30}$$

so gilt das frühere Fresnel'sche Gesetz (18) der S. 293:

$$\frac{m^2}{a_0^2 - \omega^2} + \frac{n^2}{b_0^2 - \omega^2} + \frac{p^2}{c_0^2 - \omega^2} = 0\,, \tag{31}$$

dabei sind aber a_0^2, b_0^2, c_0^2 complexe Grössen. Diese Gleichung zerfällt also in zwei, aus denen man V und $\varkappa$ gesondert als Function der Richtung m, n, p der Wellennormale berechnen kann.

Für die M, N, Π ergeben sich nach den früheren Relationen (15), (19) und (20) der S. 293 u. 294 die Beziehungen:

$$Mm + Nn + \Pi p = 0\,, \tag{32}$$

$$M : N : \Pi = \frac{m}{a_0^2 - \omega^2} : \frac{n}{b_0^2 - \omega^2} : \frac{p}{c_0^2 - \omega^2}\,, \tag{33}$$

$$M_1\, M_2 + N_1\, N_2 + \Pi_1\, \Pi_2 = 0\,. \tag{34}$$

Da nach (33) die M, N, Π complex sind, so ergeben sich für jede Richtung m, n, p zwei elliptisch polarisirte Wellen. Denn schreibt man $M = \mathsf{M} \cdot e^{i\delta_1}$, $N = \mathsf{N} \cdot e^{i\delta_2}$, so bedeutet $\delta_1 - \delta_2$ die Phasendifferenz zwischen der Componente u und v des Lichtvectors; bei geradlinig polarisirtem Licht müsste $\delta_1 - \delta_2 = 0$ sein. Die Gleichung (32) drückt aus, dass die Ebene der Schwingungsbahn senkrecht zur Wellennormale steht, (34) besagt, dass für beide Wellen die Schwingungsellipsen einander ähnlich sind, aber inverse Lage zu einander haben.[1])

Die aus (31) abzuleitende Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Richtung m, n, p ist sehr complicirt. Das Fresnel'sche Gesetz wird also, trotz der scheinbaren Identität mit der Formel (31), bedeutend modificirt. Dagegen liegen die Verhältnisse bedeutend einfacher bei schwach absorbirenden Krystallen, wie sie z. B. bei Beobachtungen im durchgehenden Lichte[2]) stets

1) Betreffs des näheren Nachweises hiervon vgl. Winkelmann's Hdb. d. Phys. Optik, S. 813.

2) Im reflectirten Lichte sind die Wirkungen starker Absorption gut zu beobachten, z. B. an Magnesium- (oder Baryum-)platincyanür. Derartige Krystalle besitzen polarisirten Metallglanz.

vorliegen. Kann man nämlich $\varkappa^2$ gegen 1 vernachlässigen, so ist $\omega^2 = V^2\,(1 + 2i\varkappa)$. Setzt man daher

$$(35)\qquad a_0^2 = a^2 + i\,a'^2\,,\quad b_0^2 = b^2 + i\,b'^2\,,\quad c_0^2 = c^2 + i\,c'^2\,,$$

so wird

$$(36)\quad \frac{m^2}{a_0^2 - \omega^2} = \frac{m^2}{a^2 - V^2 - i\,(2\varkappa V^2 - a'^2)} = \frac{m^2}{a^2 - V^2}\left(1 + i\,\frac{2\varkappa V^2 - a'^2}{a^2 - V^2}\right).$$

Daher zerfällt (31) in die beiden Gleichungen:

$$(37)\qquad \frac{m^2}{a^2 - V^2} + \frac{n^2}{b^2 - V^2} + \frac{p^2}{c^2 - V^2} = 0\,,$$

$$(38)\qquad \begin{aligned} 2\varkappa V^2 &\left\{\frac{m^2}{(a^2 - V^2)^2} + \frac{n^2}{(b^2 - V^2)^2} + \frac{p^2}{(c^2 - V^2)^2}\right\} \\ &= a'^2\,\frac{m^2}{(a^2 - V^2)^2} + b'^2\,\frac{n^2}{(b^2 - V^2)^2} + c'^2\,\frac{p^2}{(c^2 - V^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Die Gleichung (37) ist das gewöhnliche Fresnel'sche Gesetz. Bei kleiner Absorption wird dasselbe also nicht modificirt. Die Gleichung (38) stellt $\varkappa$ als Function von m, n, p dar. Nach (33) sind bei kleiner Absorption die M, N, Π annähernd reell, d. h. die beiden Wellen im Krystall nur schwach elliptisch polarisirt. Bezeichnet man mit $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$ die Richtungscosinus der grossen Axe der Schwingungsellipse, so ist nach (33) und (36), da $\mathfrak{M}$ der reelle Theil von M ist etc.:

$$(39)\qquad \mathfrak{M} : \mathfrak{N} : \mathfrak{P} = \frac{m}{a^2 - V^2} : \frac{n}{b^2 - V^2} : \frac{p}{c^2 - V^2}\,.$$

Die $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$ bestimmen sich also gerade so, wie die Schwingungsrichtungen in durchsichtigen Krystallen.

Vermöge (39) und der Beziehung $\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 = 1$ schreibt sich (38):

$$(40)\qquad 2\varkappa V^2 = a'^2\,\mathfrak{M}^2 + b'^2\,\mathfrak{N}^2 + c'^2\,\mathfrak{P}^2\,,$$

d. h. nach der auch hier gültigen Relation (18') der S. 295:

$$(41)\qquad 2\varkappa = \frac{a'^2\,\mathfrak{M}^2 + b'^2\,\mathfrak{N}^2 + c'^2\,\mathfrak{P}^2}{a^2\,\mathfrak{M}^2 + b^2\,\mathfrak{N}^2 + c^2\,\mathfrak{P}^2}\,.$$

Der Absorptionsindex $\varkappa$ ist also gerade wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V eine eindeutige Function der Schwingungsrichtung.

Man kann dieses Gesetz leicht verificiren, wenn man einen

parallel zu den Symmetrieebenen geschnittenen Würfel eines gefärbten Krystalls im durchgehenden Lichte betrachtet. Derselbe erscheint verschieden gefärbt, je nach der Richtung der Lichtstrahlen (Trichroismus bei rhombischen, Dichroismus bei hexagonalen und tetragonalen Krystallen). Man kann dies z. B. am Turmalin, Beryll, Rauchtopas, Cordierit und besonders am Pennin wahrnehmen, bei dem die Farben blaugrün und braungelb vorkommen. Wenn man nun das durch einen solchen Würfel hindurchgehende Licht durch ein Nicol analysirt, so hängt die Farbe von der Lage seiner Polarisationsebene ab, indem die extremsten Farben erhalten werden, wenn sie einer Symmetrieaxe des Krystalls parallel ist.[1]) Von diesen sechs extremsten Farben, die man mit Hülfe eines Nicols an einem Würfel eines trichroitischen Krystalls wahrnehmen kann, sind nun stets zwei paarweise einander gleich, und zwar liegen in diesen Fällen allemal die Schwingungsrichtungen (im Fresnel'schen Sinne) identisch (cf. oben S. 233).

Die Formeln (40) und (41) vereinfachen sich, wenn die Wellennormale in der Nähe einer optischen Axe, z. B. bei A_1, liegt. Ist der Winkel g_1 zwischen Wellennormale N und optischer Axe A_1 so klein, dass man sein Quadrat gegen 1 vernachlässigen kann, so ist $V^2 = b^2$ zu setzen. Nennt man ferner den Winkel der durch A_1 und N gelegten Ebene (NA_1) mit der Ebene der optischen Axen (xz-Ebene) ψ, so macht die durch N und die eine Schwingungsrichtung $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{P}_1$ gelegte Schwingungsebene den Winkel $\psi/_2$ mit der xz-Ebene. Denn nach S. 299 halbirt die Schwingungsebene den Winkel, welchen die Ebenen (NA_1) und (NA_2) mit einander einschliessen, da aber N unmittelbar bei der optischen Axe liegen soll, so können wir die durch N und A_2 gelegte Ebene (NA_2) mit der Ebene $(A_1 A_2)$ der optischen Axen, d. h. der xz-Ebene, identificiren. Es muss also auch die Schwingungsrichtung $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{P}_1$ den Winkel $\frac{1}{2}\psi$ einschliessen mit einer zur Wellennormale N, d. h. zur optischen Axe A_1, senkrechten Richtung S, welche in der xz-Ebene liegt. Die Richtungscosinus von S sind $\cos q$, o, $-\sin q$, falls q den Winkel zwischen der optischen Axe A_1 und der z-Axe bedeutet, d. h. den halben Winkel, den beide optischen Axen mit einander einschliessen (q = halber Axenwinkel). Daher folgt

1) Man erhält beide Farben gleichzeitig, wenn man anstatt eines Nicols einen gewöhnlichen Doppelspath verwendet. (Dichroskopische Lupe, cf. Müller-Pouillet-Lummer, Optik, S. 1005.)

(42) $$\cos\frac{\psi}{2} = \mathfrak{M}_1 \cos q - \mathfrak{P}_1 \sin q\,.$$

Da nun ferner $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{P}_1$ auch rechtwinklig zur Wellennormale N, d. h. zur optischen Axe A_1 steht, welche die Richtungscosinus $\sin q, o, \cos q$ hat, so ist auch

(42′) $$0 = \mathfrak{M}_1 \sin q + \mathfrak{P}_1 \cos q\,.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen ergiebt sich:

(43) $$\mathfrak{M}_1 = \cos q \cos\frac{\psi}{2}\,,\quad \mathfrak{N}_1 = \sin\frac{\psi}{2}\,,\quad \mathfrak{P}_1 = -\sin q \cos\frac{\psi}{2}\,.$$

Hieraus leitet man $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{P}_2$ ab, da es senkrecht zu $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{P}_1$ und zu m, n, p steht, in der Form:

(44) $$\mathfrak{M}_2 = -\cos q \sin\frac{\psi}{2}\,,\quad \mathfrak{N}_2 = \cos\frac{\psi}{2}\,,\quad \mathfrak{P}_2 = \sin q \sin\frac{\psi}{2}\,.$$

In der Nähe der optischen Axe wird daher nach (40):

(45) $$\begin{aligned} 2\varkappa_1 b^2 &= (a'^2 \cos^2 q + c'^2 \sin^2 q) \cos^2\frac{\psi}{2} + b'^2 \sin^2\frac{\psi}{2}\,,\\ 2\varkappa_2 b^2 &= (a'^2 \cos^2 q + c'^2 \sin^2 q) \sin^2\frac{\psi}{2} + b'^2 \cos^2\frac{\psi}{2}\,. \end{aligned}$$

Diese Formeln zeigen, dass für irgend einen Winkel $+\psi$ der Werth von $\varkappa_1$ derselbe ist, wie der von $\varkappa_2$ für einen Winkel $\psi' = \pi + \psi$. — Für die optische Axe selbst werden jene Formeln unbestimmt, weil dort ψ seine Bedeutung verliert. Nach früheren Entwickelungen (cf. S. 297) kann man die Schwingungsrichtung willkürlich wählen. Aus (40) folgt für eine in der Ebene der optischen Axen polarisirte, d. h. senkrecht zu ihr schwingende Welle, da dann $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{N} = 1$ ist:

(46) $$2\varkappa_s b^2 = b'^2,$$

dagegen für eine senkrecht zur Ebene der optischen Axen polarisirte, d. h. in dieser Ebene schwingende Welle, da für sie $\mathfrak{M} = \cos q$, $\mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{P} = -\sin q$ ist:

(47) $$2\varkappa_p b^2 = a'^2 \cos^2 q + c'^2 \sin^2 q\,.$$

Für Zwischenlagen der Polarisationsebene erhält man Zwischenwerthe für $\varkappa$, die zwischen $\varkappa_s$ und $\varkappa_p$ liegen. Die Absorption einer in Richtung einer optischen Axe fortgepflanzten

Welle hängt also von ihrer Polarisationsrichtung ab. — Durch Einführung der Grössen $\varkappa_s$ und $\varkappa_p$ schreibt sich (45):

$$\varkappa_1 = \varkappa_p \cdot \cos^2\frac{\psi}{2} + \varkappa_s \cdot \sin^2\frac{\psi}{2}, \quad \varkappa_2 = \varkappa_p \cdot \sin^2\frac{\psi}{2} + \varkappa_s \cdot \cos^2\frac{\psi}{2}. \quad (48)$$

Bei einaxigen Krystallen ($a = b$, $a' = b'$) ist, falls g den Winkel der Wellennormale gegen die optische Axe bezeichnet, aus (40) sofort abzuleiten für die ordinäre Welle:

$$2\varkappa_o V_o^2 = a'^2, \quad V_o^2 = a^2,$$

für die extraordinäre Welle:

$$2\varkappa_e V_e^2 = a'^2 \cos^2 g + c'^2 \sin^2 g, \quad V_e^2 = a^2 \cos^2 g + c^2 \sin^2 g. \quad (49)$$

5. Interferenzerscheinungen in absorbirenden zweiaxigen Krystallen. Es möge die Platte eines absorbirenden Krystalls zwischen Analysator und Polarisator bei convergent einfallendem Lichte gelegt werden. Wir beziehen uns auf die Bezeichnungsweise der §§ 14 und 15 auf S. 319 und 323 und die dortige Figur 91. Die nach einer Richtung H_1 schwingende Welle W_1 hat beim Eintritt in den Krystall die Amplitude $E\cos\varphi$, beim Austritt daher $E\cos\varphi \cdot e^{-\frac{2\pi}{T}\frac{\varkappa_1}{V_1}l}$, wobei l den in der Krystallplatte zurückgelegten Weg bezeichnet. Es ist $l = d : \cos r_1$, falls d die Dicke der Krystallplatte und r_1 der Brechungswinkel der Welle W_1 ist. — Analog ist die Amplitude der Welle W_2 nach dem Austritt aus dem Krystall $E\sin\varphi\, e^{-\frac{2\pi}{T}\frac{\varkappa_2}{V_2}l}$ (es ist näherungsweise für beide Wellen der im Krystall zurückgelegte Weg als gleich angenommen). Nach dem Durchtritt durch den Analysator sind daher die Amplituden der beiden Wellen:

$$\begin{aligned} &E\cos\varphi\cos(\varphi - \chi) \cdot e^{-\varkappa_1\sigma_1}, \quad \sigma_1 = \frac{2\pi}{TV_1}\frac{d}{\cos r}, \\ &E\sin\varphi\sin(\varphi - \chi) \cdot e^{-\varkappa_2\sigma_2}, \quad \sigma_2 = \frac{2\pi}{TV_2}\frac{d}{\cos r}. \end{aligned} \quad (50)$$

Die Phasendifferenz δ beider Wellen bestimmt sich bei convergent einfallendem Licht durch die Formel (88) der S. 323.

Betrachten wir näher den Fall der gekreuzten Nicols ($\chi = \pi/_2$), nehmen wir ferner eine Platte, welche senkrecht zu einer optischen Axe (A_1) geschnitten ist, und nennen wir ψ den Winkel, den die Verbindungslinie MA_1 eines in der Nähe der optischen Axe liegen-

den Punktes M des Gesichtsfeldes[1]) und der Axe A_1 mit der Ebene $A_1 A_2$ der optischen Axen bildet, so macht (vgl. Figur 101) die Schwingungsrichtung H_1 annähernd den Winkel $\psi/_2$ mit der Richtung $A_1\,A_2$, falls $A_1 M$ klein gegen $A_1 A_2$ ist. Macht ferner die Schwingungsebene P des Polarisators den Winkel α mit der Ebene $A_1 A_2$ der optischen Axen, so ist in (50) zu setzen $\varphi = \alpha - \psi/_2$, $\chi = \pi/_2$. Die beiden zur Interferenz kommenden Amplituden werden daher

$$(51)\qquad \begin{aligned} &+ E \cos(\alpha - \psi/_2) \sin(\alpha - \psi/_2)\, e^{-\varkappa_1 \sigma}, \\ &- E \sin(\alpha - \psi/_2) \cos(\alpha - \psi/_2)\, e^{-\varkappa_2 \sigma}, \end{aligned}$$

wobei

$$\sigma = \frac{2\pi d}{T b}$$

ist, da in der Nähe der optischen Axe $V_1 = V_2 = b$ ist, und r nur klein sein soll.

Daher ist die aus dem Analysator austretende Lichtintensität

$$(52)\qquad \begin{aligned} J = \frac{E^2}{4} \sin^2(2\alpha - \psi) \\ \left\{ e^{-2\varkappa_1 \sigma} + e^{-2\varkappa_2 \sigma} - 2e^{-(\varkappa_1 + \varkappa_2)\sigma} \cdot \cos\delta \right\}. \end{aligned}$$

Für die optische Axe selber führt folgende Betrachtung zum Ziel: Die einfallende Amplitude E werde in die Componenten parallel und senkrecht zur Ebene $A_1 A_2$ der optischen Axen zerlegt. Diese Componenten sind $E \cos\alpha$ und $E \sin\alpha$. Erstere hat nach dem Austritt aus dem Krystall den Werth $E \cos\alpha \cdot e^{-\varkappa_p \sigma}$, letztere $E \sin\alpha\, e^{-\varkappa_s \sigma}$. Nach dem Durchtritt durch den Analysator ergiebt erstere Componente die Amplitude $E \cos\alpha \sin\alpha\, e^{-\varkappa_p \sigma}$, letztere

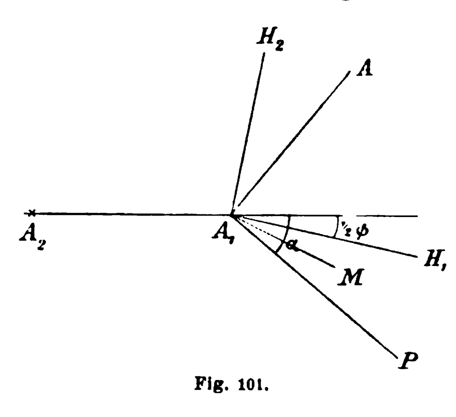


Fig. 101.

$- E \sin\alpha \cos\alpha\, e^{-\varkappa_s \sigma}$. Eine relative Phasendifferenz δ haben diese beiden Wellen nicht, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in

1) Die verschiedenen Punkte des Gesichtsfeldes entsprechen nach S. 324 verschiedenen Neigungen der die Krystallplatte durchsetzenden Strahlen.

Richtung der optischen Axe für beide Wellen die gleiche ist. Folglich ist die aus dem Analysator austretende Lichtintensität für die optische Axe:

$$J' = \frac{E^2}{4} \sin 2\alpha \left(e^{-\varkappa^p \sigma} - e^{-\varkappa^s \sigma}\right)^2. \tag{53}$$

Den ersten Factor in (52) gleich Null gesetzt, ergiebt die Lage der dunkeln Hauptisogyre $\psi = 2\alpha$. Während aber die schwarze Isogyre bei ungefärbten Krystallen durch die optische Axe selbst hindurchgeht, ist sie bei pleochroitischen Krystallen durch einen hellen Axenpunkt unterbrochen, wenn nicht gerade $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi/2$ ist, d. h. wenn nicht gerade die Krystallplatte in der ersten Hauptlage liegt. Denn nach (53) ist J' von Null verschieden, falls $\sin 2\alpha \gtrless 0$ und $\varkappa_p$ von $\varkappa_s$ verschieden ist.

Der zweite Factor in (52) gleich Null gesetzt, ergiebt dunkle Ringe um die optische Axe, da der Werth dieses zweiten Factors von $\cos\delta$ abhängt, und $\cos\delta$ mit wachsender Entfernung von der optischen Axe periodisch Maxima und Minima annimmt. Doch werden diese Ringe (bei homogener Beleuchtung) nur da vollkommen schwarz, wo $\varkappa_1 = \varkappa_2$ ist, d. h. nach (48) für $\psi = + \pi/2$, denn dort verschwindet für $\cos\delta = 1$ wirklich der zweite Factor. Die ganze Erscheinung der Ringe wird um so undeutlicher, je stärker die Absorption sich bemerklich macht, d. h. je dicker die Platte ist. Denn das von der Phasendifferenz δ in (52) abhängige Glied hat einen Factor, den man nach (48) schreiben kann $e^{-(\varkappa_p + \varkappa_s)\sigma}$. Wenn der Krystall nun überhaupt zu den gefärbten gehört, so muss mindestens einer von den beiden Absorptionsindices $\varkappa_p$ und $\varkappa_s$ von Null verschieden sein, d. h. bei genügend grossem σ, d. h. bei genügender Plattendicke d, verschwindet dies Glied, d. h. der Einfluss von δ. Man kann dann den zweiten Factor von J in (52) schreiben:

$$F = e^{-2\varkappa_1\sigma} + e^{-2\varkappa_2\sigma}. \tag{54}$$

Diese Glieder können, obgleich σ gross ist, noch merkbare Werthe geben, da $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ klein sein können für gewisse Stellen M des Gesichtsfeldes, falls von den $\varkappa_p$ und $\varkappa_s$ eines klein ist. Man kann nun nachweisen, dass F für $\psi = 0$, π ein Maximum, für $\psi = \pm \pi/2$ ein Minimum wird. Denn es ist nach (48)

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = \sigma \sin \psi \, (\varkappa_p - \varkappa_s) \, (e^{-2\varkappa_1 \sigma} - e^{-2\varkappa_2 \sigma}),$$

daher sind Maxima oder Minima vorhanden bei $\psi = 0, \pi$ und $\varkappa_1 = \varkappa_2$, d. h. $\psi = \pm \pi/2$. Für $\psi = 0, \pi$ ist aber

$$F = e^{-2\varkappa_p \sigma} + e^{-2\varkappa_s \sigma} = F_1, \tag{55}$$

für $\psi = \pm \pi/2$ ist

$$F = 2 \,.\, e^{-(\varkappa_p + \varkappa_s)\sigma} = F_2. \tag{56}$$

Setzt man $e^{-2\varkappa_p \sigma} = x$, $e^{-2\varkappa_s \sigma} = y$, so wird $\frac{1}{2} F_1 = \frac{x+y}{2}$, $\frac{1}{2} F_2 = \sqrt{xy}$. Da nun aber stets das arithmetische Mittel grösser als das geometrische ist (um so mehr, je mehr x und y, d. h. $\varkappa_p$ und $\varkappa_s$ von einander verschieden sind), so entspricht der Werth $\psi = 0$, π einem Maximum, der Werth $\psi = \pm \pi/2$ einem Minimum von F.

Ausser der Hauptisogyre ($\psi = 2\alpha$) durchzieht also stets noch ein senkrecht zur Ebene der optischen Axen ($\psi = \pm \pi/2$) verlaufendes schwarzes Büschel das Gesichtsfeld. Dieses fällt mit der Hauptisogyre zusammen in der zweiten Hauptlage der Krystallplatte ($\alpha = \pi/4$).

Durch die Absorption sind schon besondere Erscheinungen wahrnehmbar, wenn der Analysator oder Polarisator fortgelassen wird. Für ersteren Fall treten aus der Krystallplatte die beiden rechtwinklig zu einander schwingenden Amplituden $E \cos(\alpha - \frac{1}{2}\psi)\, e^{-\varkappa_1 \sigma}$ und $E \sin(\alpha - \frac{1}{2}\psi)\, e^{-\varkappa_2 \sigma}$. Werden diese nicht auf eine gemeinsame Schwingungsrichtung zurückgeführt, so interferiren sie nicht, und die resultirende Intensität ergiebt sich einfach als Summe der Intensitäten beider einzelnen Componenten. Es ist daher

$$J = E^2 \left\{ \cos^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\psi)\, e^{-2\varkappa_1 \sigma} + \sin^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\psi)\, e^{-2\varkappa_2 \sigma} \right\}. \tag{57}$$

Für die optische Axe selbst ergiebt sich:

$$J' = E^2 \left\{ \cos^2 \alpha \, e^{-2\varkappa_p \sigma} + \sin^2 \alpha \, e^{-2\varkappa_s \sigma} \right\}. \tag{58}$$

Untersuchen wir folgende beiden Hauptfälle

1) $\alpha = 0$. Es wird

$$J = E^2 \left\{ \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi \, e^{-2\varkappa_1 \sigma} + \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi \, e^{-2\varkappa_2 \sigma} \right\},$$
$$J' = E^2 \, e^{-2\varkappa_p \sigma}.$$

Da $\frac{\partial J}{\partial \psi} \sim \sin\psi \left\{\sigma(\varkappa_s - \varkappa_p)\left(\sin^2 \tfrac{1}{2}\psi\, e^{-2\varkappa_2\sigma} - \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi\, e^{-2\varkappa_1\sigma}\right) + \frac{e^{-2\varkappa_2\sigma} - e^{-2\varkappa_1\sigma}}{2}\right\}$,

so wird $\frac{\partial J}{\partial \psi} = 0$ für $\psi = 0,\ \pi$ und $\psi = \pm \pi/2$.

$$\text{Für } \psi = 0,\ \pi \text{ ist } J = J_1 = E^2 \cdot e^{-2\varkappa_p\sigma},$$
$$\text{für } \psi = \pm \pi/2 \text{ ist } J = J_2 = E^2 \cdot e^{-(\varkappa_p + \varkappa_s)\sigma}.$$

Wenn daher $\varkappa_p < \varkappa_s$ (II. Typus, Cordiorit, Epidot), so ist $J_1 > J_2$, d. h. ein dunkles Büschel liegt senkrecht zur Ebene der optischen Axen, dasselbe wird aber durch ein helles Axenbild durchbrochen. — Ist aber $\varkappa_p > \varkappa_s$ (I. Typus, Andalusit, Titanit), so ist $J_2 > J_1$. Dann liegt ein dunkles Büschel in der Ebene der optischen Axen, und dasselbe setzt sich durch die Axe selbst hindurch fort.

$$2)\ \alpha = \pi/2: \quad J = E^2 \left\{\sin^2 \tfrac{1}{2}\psi\, e^{-2\varkappa_1\sigma} + \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi\, e^{-2\varkappa_2\sigma}\right\},$$
$$J' = E^2 \cdot e^{-2\varkappa_s\sigma}.$$

$$\text{Für } \psi = 0,\ \pi \text{ ist } J = J_1 = E^2 \cdot e^{-2\varkappa_s\sigma},$$
$$\text{für } \psi = + \pi/2 \text{ ist } J = J_2 = E^2 \cdot e^{-(\varkappa_p + \varkappa_s)\sigma}.$$

Wenn daher $\varkappa_p < \varkappa_s$, so ist $J_1 < J_2$, d. h. ein dunkles Büschel liegt in der Axenebene und setzt sich durch die Axe fort. — Ist aber $\varkappa_p > \varkappa_s$, so ist $J_1 > J_2$, d. h. ein dunkles Büschel liegt senkrecht zur Ebene der optischen Axen; dasselbe wird aber durch ein helles Axenbild durchbrochen.

Wird sowohl Analysator als Compensator fortgelassen, d. h. betrachten wir eine senkrecht zu einer optischen Axe geschnittene Platte eines zweiaxigen, pleochroitischen Krystalls im durchgehenden natürlichen Lichte, so erhält man

$$J = E^2 \left(e^{-2\varkappa_1\sigma} + e^{-2\varkappa_2\sigma}\right), \tag{59}$$

für die optische Axe selbst:

$$J' = E^2 \left(e^{-2\varkappa_p\sigma} + e^{-2\varkappa_s\sigma}\right). \tag{60}$$

Denn wir können das natürliche Licht auffassen als zwei nach beliebigen aufeinander senkrechten Richtungen schwingende Com-

ponenten gleicher Amplitude, welche incohärent sind. In (60) bedeutet daher $2E^2$ die Intensität des einfallenden Lichtes. Da wir nun schon oben S. 348 [Formel (54)] constatirt haben, dass der Ausdruck (59) ein Minimum wird für $\psi = \pm \pi/2$, so erblickt man ein senkrecht zur Axenebene verlaufendes dunkles Büschel, welches durch ein helleres Axenbild durchbrochen wird. Diese im natürlichen Licht auftretenden Axenbilder sind schon 1819 von Brewster beobachtet worden. Man kann sie leicht wahrnehmen am Andalusit und Epidot.[1])

6. Interferenzerscheinungen in absorbirenden einaxigen Krystallen. Die Krystallplatte sei senkrecht zur optischen Axe geschnitten.

1) Gekreuzte Nicols. Die Schwingungsebene des Polarisators mache den Winkel φ mit der Verbindungslinie AM der optischen Axe A und einem Punkte M des Gesichtsfeldes in einem Polarisationsapparate für convergentes Licht. Dann ist AM die Schwingungsrichtung H der ausserordentlichen Welle, diese hat also nach dem Austritt aus dem Krystall die Amplitude $E \cos \varphi \, e^{-\varkappa_e \sigma}$, nach dem Austritt aus dem Analysator die Amplitute $E \cos \varphi \sin \varphi \, e^{-\varkappa_e \sigma}$. Die ordentliche Welle hat nach dem Austritt aus der Krystallplatte die Amplitude $E \sin \varphi \, e^{-\varkappa_o \sigma}$, aus dem Analysator $-E \sin \varphi \cos \varphi \, e^{-\varkappa_o \sigma}$. Daher ist die aus dem Analysator austretende Lichtintensität:

$$(61) \quad J = \frac{E^2 \sin^2 2\varphi}{4} \left\{ e^{-2\varkappa_o \sigma} + e^{-2\varkappa_e \sigma} - 2 \cos \delta \, e^{-(\varkappa_o + \varkappa_e)\sigma} \right\}.$$

In der optischen Axe ist $\varkappa_o = \varkappa_e$, $\delta = 0$, daher

$$(62) \quad J' = 0.$$

Es ergeben sich Interferenzringe, die aber verschwinden, wenn die Krystallplatte genügende Dicke hat, sodass die Absorption genügend zur Wirkung kommt. Das Gesichtsfeld ist vom dunkeln Kreuz $\varphi = 0$, $\pi/2$ durchzogen, dessen Balken parallel den Schwingungsrichtungen des Analysators und Compensators liegen. Ausserhalb dieses Kreuzes ist das Gesichtsfeld hell bei denjenigen Krystallen, für welche a'^2 sehr klein (cf. (49) auf S. 345), aber c'^2 bedeutend ist (I. Typus, Magnesiumplatincyanür), d. h. bei denen

1) Weiteres über diese idiocyclophanen Axenbilder vgl. bei Winkelmann, Hdb. d. Phys. Optik, S. 817, Anm. 1.

die Absorption in Richtung der optischen Axe klein ist. Dagegen ist bei den Krystallen des II. Typus (Turmalin), bei denen a'^2 gross und c'^2 klein ist, das Gesichtsfeld überall dunkel.

2) Analysator oder Polarisator allein vorhanden. Beide Fälle ergeben dasselbe. Ist nur der Polarisator vorhanden, und macht seine Schwingungsebene den Winkel φ mit der Richtung AM, so ist die Intensität der ausserordentliche Welle $E^2 \cos^2\varphi \, e^{-2\varkappa_e\sigma}$, die der ordentlichen $E^2 \sin^2\varphi \, e^{-2\varkappa_o\sigma}$. Daher

$$J = E^2 (\sin^2\varphi \, e^{-2\varkappa_o\sigma} + \cos^2\varphi \, e^{-2\varkappa_e\sigma}). \qquad (63)$$

In der optischen Axe ist $\varkappa_o = \varkappa_e$, d. h.

$$J' = E^2 \, e^{-2\varkappa_o\sigma}. \qquad (64)$$

Bei Krystallen des ersten Typus ($\varkappa_o < \varkappa_e$) ergiebt sich daher dunkles Büschel bei $\varphi = 0, \pi$, d. h. parallel zur Schwingungsrichtung, also senkrecht zur Polarisationsebene des Polarisators. Das dunkle Büschel wird durch ein helles Axenbild durchbrochen. — Bei Krystallen des zweiten Typus ($\varkappa_o > \varkappa_e$) ergiebt sich ein dunkles Büschel bei $\varphi = \pm \pi/2$, d. h. es liegt parallel zur Polarisationsebene des Polarisators. Das dunkle Büschel geht durch die Axe selbst hindurch.

3) Durchgehendes natürliches Licht. Die Intensität der ordentlichen Welle ist $E^2 \cdot e^{-2\varkappa_o\sigma}$, die der senkrecht dazu schwingenden ausserordentlichen Welle ist $E^2 \cdot e^{-2\varkappa_e\sigma}$, daher

$$J = E^2 (e^{-2\varkappa_o\sigma} + e^{-2\varkappa_e\sigma}). \qquad (65)$$

In der optischen Axe selber ist $\varkappa_o = \varkappa_e$, d. h.

$$J' = 2E^2 \, e^{-2\varkappa_o\sigma}. \qquad (66)$$

$2E^2$ bedeutet die Intensität des einfallenden natürlichen Lichtes. — In Krystallen des ersten Typus erscheint ein heller Axenfleck mit dunkler Umgebung, in Krystallen des zweiten Typus ein dunkler Axenfleck mit heller Umgebung.

Kapitel V.

Die Dispersion der Körper.

1. Theoretische Grundlage. Man gelangt zu einer die beobachteten Erscheinungen gut darstellenden Theorie, wenn man die Annahme einführt, dass die kleinsten Theile (Moleküle oder Atome) eines Körpers die Möglichkeit zu Eigenschwingungen besitzen. Diese werden je nachdem ihre Periode näher oder ferner liegt zur Periode der von aussen auftreffenden Lichtschwingungen mehr oder weniger stark angeregt.[1]) Solche durch eine Lichtwelle, d. h. eine oscillirende elektrische Kraft angeregten Schwingungen sind ohne Weiteres verständlich, wenn man die durch die Elektrolyse nothwendig gemachte Vorstellung verallgemeinert, dass jedes Molekül eines Körpers aus positiv und negativ geladenen Atomen oder Atomgruppen, den sogenannten Ionen,[2]) besteht. Bei einem Leiter sind dieselben frei beweglich, bei einem Isolator haben dieselben aber gewisse Gleichgewichtslagen, um die sie schwingen können. Die Summe der Ladungen der positiven und negativen Ionen muss in jedem Volumelement Null sein, da an keiner Stelle eines, nicht von aussen geladenen Körpers freie Elektricität auftritt.

Fassen wir zunächst nur die positiven Ladungen ins Auge und bezeichnen mit e_1 die Ladung eines positiven Ions, mit m_1 seine ponderabele Masse, mit ξ_1 die Verschiebung desselben nach der

1) Wie kürzlich Lord Rayleigh gefunden hat (Phil. Mag. 48, p. 151, 1889), hat zuerst Maxwell im Cambr. Calendar f. 1869 (Math. Tripos Exam.) von ähnlichen Grundlagen aus die Theorie der anomalen Dispersion gegeben. Seine Arbeit ist aber nicht weiter bekannt geworden und unabhängig von ihm haben dann Sellmeier, v. Helmholtz und Ketteler jene Vorstellungen zur Theorie der Dispersion herangezogen. — Die molecularen Eigenschwingungen kann man von verschiedenen Standpunkten aus rechtfertigen, auch von der mechanischen Lichttheorie aus. Vom elektrischen Standpunkt kann man Eigenschwingungen durch zwei verschiedene Betrachtungen einführen; die hier angestellten schliessen sich der Helmholtz'schen Auffassung an und ihrer von Reiff (Theorie molecularelektrischer Vorgänge, 1896) gegebenen Darstellung, welche auch für andere Gebiete eine interessante Durchführung dieser Vorstellungen enthält. Diese Auffassung hat den Vorzug grösserer Anschaulichkeit vor der anderen, von Kolaček (Wied. Ann. 32, S. 224, 1887) benutzten.

2) Dieselben brauchen nicht identisch zu sein mit den durch Elektrolyse erhaltenen Ionen.

x-Axe aus der Gleichgewichtslage, so muss die Bewegungsgleichung dieses Ions die Form besitzen, falls eine äussere elektrische Kraft der x-Componente X wirkt [1]):

$$m_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = e_1 X - \frac{4\pi e_1^2}{\vartheta_1} \xi_1 - r_1 e_1^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t}. \tag{1}$$

Es ist nämlich $e_1 X$ die gesammte, von aussen wirkende Kraft. Das zweite Glied der rechten Seite bezeichnet die (elastische) Kraft, welche durch die Verschiebung des Ions geweckt wird und dasselbe in die ursprüngliche Lage zurückzuführen strebt. Der Factor e_1^2 ist zugesetzt, um anzudeuten, dass das Vorzeichen dieser Kraft vom Vorzeichen der Ladung unabhängig ist. — Das dritte Glied der rechten Seite bezeichnet eine der Bewegung des Ions entgegenstehende Reibungskraft. Auch dieses Glied enthält den Factor e_1^2, weil es vom Vorzeichen der Ladung unabhängig sein muss. m_1, ϑ_1, r_1 sind positive Constanten. Die Bedeutung von ϑ_1 erkennt man, falls man die Gleichgewichtslage der Ionen unter Wirkung der Kraft X bestimmt. Wenn nämlich ξ_1 von der Zeit t unabhängig ist, so folgt aus (1):

$$e_1 \xi_1 = \frac{\vartheta_1}{4\pi} X. \tag{2}$$

ϑ_1 giebt also die Leichtigkeit an, mit welcher die Ionen aus ihrer ursprünglichen Lage zu verschieben sind, d. h. sozusagen ist ϑ_1 proportional zu dem reciproken elastischen Widerstand (oder dem Elasticitätscoefficienten). — Für Leiter ist $\vartheta_1 = \infty$ zu setzen.

Eine ganz analoge Gleichung gilt für die negativ geladenen Ionen:

$$m_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = e_2 X - \frac{4\pi e_2^2}{\vartheta_2} \xi_2 - r_2 e_2^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t}. \tag{3}$$

Auch hier sind m_2, ϑ_2, r_2 positiv, e_2 ist aber negativ.

Die elektrische Strömung nach der x-Axe besteht nun aus drei Bestandtheilen. 1) Der Strömung, wie sie im freien Aether (ohne Vorhandensein ponderabler Molecüle) unter Einwirkung einer Kraft X besteht. Die Stromdichte (elektrostatisch gemessen) hat nach (13) auf S. 248 den Werth:

$$(j_x)_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}. \tag{4}$$

1) Alle Grössen (e_1, X) sollen in elektrostatischem Maasse gemessen sein. Die Gleichung (1) würde auch gelten, wenn das Ion gar keine Masse m_1 besitzt, aber wenn die Selbstinduction bei seiner Bewegung zu berücksichtigen ist.

2) Der Strömung durch die Verschiebung der positiven Ladungen. Hat die Verschiebung während des Zeitelementes dt den Werth $d\xi_1$ und bezeichnet $\mathfrak{N}'$ die Anzahl positiver Ionen, welche auf der Längeneinheit, $\mathfrak{N}''$ die Anzahl der Ionen, welche auf der Querschnittseinheit vorhanden sind, so tritt durch die Querschnittseinheit während dt die Ladungsmenge

$$e_1\,\mathfrak{N}''\cdot d\xi_1\,\mathfrak{N}' = e_1\,\mathfrak{N}_1\,d\xi_1\,,$$

wobei $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}'\cdot\mathfrak{N}''$ die in der Volumeinheit vorhandene Ionenzahl der Gattung 1 bezeichnet. In der Zeiteinheit tritt also durch die Querschnittseinheit die Elektricitätsmenge:

$$(5)\qquad (j_x)_1 = e_1\,\mathfrak{N}_1\,\frac{d\xi_1}{dt} = e_1\,\mathfrak{N}_1\,\frac{\partial\xi_1}{\partial t}\,,$$

wobei $\frac{\partial\xi_1}{\partial t}$ als Differentialquotient nach der Zeit aufzufassen ist. $(j_x)_1$ bezeichnet die Stromdichte, welche durch die Bewegung der Ionen der Gattung 1 hervorgerufen wird.

3) Der Strömung durch die Verschiebung der negativen Ladungen. Dieselbe schreibt sich analog

$$(6)\qquad (j_x)_2 = e_2\,\mathfrak{N}_2\,\frac{\partial\xi_2}{\partial t}\,,$$

denn eine Verschiebung einer negativen Ladung nach der negativen x-Axe ergiebt einen nach der positiven x-Axe gerichteten Strom.

Die gesammte Stromdichte nach der x-Axe ist also

$$(7)\ j_x = (j_x)_0 + (j_x)_1 + (j_x)_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(e_1\,\mathfrak{N}_1\,\xi_1 + e_2\,\mathfrak{N}_2\,\xi_2\right).$$

Analog lauten die Stromcomponenten nach der y- und z-Axe.

Weil jedes abgrenzbare Volumen keine freie Ladung hat, muss die Beziehung erfüllt sein:

$$(8)\qquad e_1\,\mathfrak{N}_1 + e_2\,\mathfrak{N}_2 = 0.$$

Wir halten nun, wie immer, an den Grundgleichungen (7) und (11) (S. 245, 247) der Maxwell'schen Theorie fest, und setzen die Magnetisirungsconstante $\mu = 1$, sodass $4\pi\,s_x = \partial\alpha/\partial t$ etc. wird. Wir haben dann in jenen Grundgleichungen, sowie in (1), (3) und (7) die vollständig ausreichende theoretische Grundlage für alle Dispersionserscheinungen.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (1) und (3) lässt sich nun sofort hinschreiben, wenn man X als periodische Function der Zeit annimmt. Es wird dann nämlich ξ_1 und ξ_2 proportional der gleichen periodischen Function der Zeit vermehrt um einen gewissen Bestandtheil, der die Eigenschwingungen der Ionen, die nach (1) und (3) für $X = 0$ stattfinden, darstellt. Diesen Bestandtheil kann man aber bei Betrachtung stationärer Zustände ignoriren, da er wegen der Reibungswiderstände r_1, r_2 im Laufe der Zeit gedämpft wird. Wir können daher setzen

$$\xi_1 = A_1 \cdot e^{i \frac{t}{\tau}}, \quad \xi_2 = A_2 \cdot e^{i \frac{t}{\tau}}, \tag{9}$$

$$\tau = T : 2\pi, \tag{10}$$

wobei A_1 und A_2 noch unbestimmte Functionen des Ortes sind, die aber die Zeit nicht mehr enthalten, während T die Periode der von aussen eindringenden Kraft, d. h. der Lichtschwingungen, ist. Eigentlich haben ξ_1 und ξ_2 nur die Bedeutung der reellen Theile der in (9) hingeschriebenen complexen Grössen, indess können wir sie jenen complexen Grössen zunächst selbst gleichsetzen, und am Schluss der Rechnung wieder zur physikalischen Bedeutung, d. h. zu den reellen Theilen, übergehen. Dadurch werden die Rechnungen bedeutend vereinfacht.

Es ist nun nach (9):

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{i}{\tau} \xi_1, \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\tau^2} \xi_1. \tag{11}$$

Daher kann man (1) schreiben als:

$$e_1 \xi_1 \left(1 + \frac{i}{\tau} \frac{r_1 \vartheta_1}{4\pi} - \frac{1}{\tau^2} \frac{m_1 \vartheta_1}{4\pi e_1^2}\right) = \frac{\vartheta_1}{4\pi} X,$$

oder für

$$a_1 = \frac{r_1 \vartheta_1}{4\pi}, \quad b_1 = \frac{m_1 \vartheta_1}{4\pi e_1^2} \tag{12}$$

folgt

$$e_1 \xi_1 = \frac{1}{4\pi} X \frac{\vartheta_1}{1 + \frac{i}{\tau} a_1 - \frac{b_1}{\tau^2}} \tag{13}$$

Analog ergiebt sich $e_2 \xi_2$ durch Vertauschung des Index 1 mit dem

Index 2. Wir haben daher nach (7):

(14) $$j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{1 + \frac{\vartheta_1 \mathfrak{N}_1}{1+\frac{i}{\tau}a_1 - \frac{b_1}{\tau^2}} + \frac{\vartheta_2 \mathfrak{N}_2}{1+\frac{i}{\tau}a_2 - \frac{b_2}{\tau^2}}\right\}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der früheren Formel (17) der S. 249 $j_x = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$, so erkennt man, dass an Stelle der Dielektricitätsconstanten ε die complexe, von der Schwingungsperiode $T = \tau \cdot 2\pi$ abhängige Grösse tritt:

(15) $$\varepsilon' = 1 + \sum_h \frac{\vartheta_h'}{1+i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

(15′) $$\vartheta_h' = \vartheta_h \mathfrak{N}_h.$$

Die Σ ist über die einzelnen, schwingungsfähigen Ionen zu erstrecken. Man kann eventuell mehr, als zwei Gattungen derselben annehmen. Dieselben sind hier (bei den schnellen Wechselzahlen, welche die Lichtschwingungen besitzen und in Isolatoren) nicht identisch anzunehmen mit den bei der Elektrolyse gefundenen Ionengattungen.

Die in (15) auftretenden Constanten können wir noch anschaulicher interpretiren. Für sehr langsame Perioden, wie sie bei langsamen elektrischen Schwingungen (oder elektrostatischen Versuchen) eintreten, ist, falls man $\tau = \infty$ setzt, nach (15)

(16) $$\varepsilon = \varepsilon_\infty' = 1 + \Sigma\,\vartheta_h'.$$

ε hat die Bedeutung der bei solchen Versuchen massgebenden Dielektricitätsconstante. ϑ_h' kann nach Gleichung (2) und (13) die Dielektricitätsconstante der h'ten Ionengattung genannt werden. Die resultirende Dielektricitätsconstante ist also die Summe der Dielektricitätsconstanten des Aethers und aller Ionengattungen.

Ferner hängt die Constante b_h mit der Eigenschwingungsdauer T_h zusammen, welche die h'te Ionengattung besitzen würde, falls ihr Reibungscoefficient a_h vernachlässigt würde. Für diesen Fall ($X = o$, $a_h = r_h = o$) folgt nämlich aus (1)

(17) $$b_h = \tau_h^2, \quad \tau_h = T_h : 2\pi.$$

Nun haben wir oben S. 333 gesehen, dass eine complexe Dielektricitätsconstante Lichtabsorption bedingt. Nennen wir n den Brechungsindex, $\varkappa$ den Absorptionsindex, so ist nach den dortigen Entwickelungen [vgl. die dortige Formel (11)] und der hier abgeleiteten Formel (15):

$$\varepsilon' = n^2 (1 - i\varkappa)^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta_h'}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{\tau_h^2}{\tau^2}}. \tag{18}$$

Aus dieser Formel kann man durch Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile zwei Relationen ableiten, aus denen man n und $\varkappa$ berechnen kann.

2. Normale Dispersion. Bei den durchsichtigen Körpern ist eine Absorption nicht zu bemerken. Man muss für diese Körper annehmen, dass die Reibungscoefficienten a_h nur klein sind, sodass man den Betrag a_h/τ vernachlässigen kann gegen $1 - (\tau_h/\tau)^2$. Dieses ist offenbar immer nur gestattet, wenn die Periode T des Lichtes nicht nahe bei einer Eigenschwingung T_h der Ionen liegt, denn sonst würde $\tau_h/\tau = 1$ sein und es würde Absorption auftreten, selbst wenn a_h nur klein ist. Die durchsichtigen Körper sind daher als solche aufzufassen, deren Eigenschwingungsdauern nicht mit den Perioden des sichtbaren Lichtes zusammenfallen, und deren Reibungscoefficienten klein sind. In diesem Falle wird bei Vernachlässigung von a_h/τ die rechte Seite von (18) reell, sodass $\varkappa = 0$ wird und der Brechungsindex den Werth annimmt:

$$n^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta_h'}{1 - \left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}. \tag{19}$$

Wenn die Eigenschwingungsdauern sich viel von den Perioden des Lichtes unterscheiden, so kann man für n^2 eine schnell convergirende Reihenentwickelung benutzen. Es sind die Eigenschwingungsdauern im Ultravioletten τ_v zu unterscheiden von den Eigenschwingungsdauern im Ultrarothen τ_r. Für erstere ist τ_v/τ ein kleiner Bruch, daher

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^2} = 1 + \left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^4 + \text{etc.} \tag{20}$$

Für letztere ist τ/τ_r ein kleiner Bruch, daher:

$$(21)\quad \frac{1}{1-\left(\frac{\tau_r}{\tau}\right)^2} = -\frac{\tau^2}{\tau_r^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^2} = -\frac{\tau^2}{\tau_r^2}\left(1+\left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^2+\left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^4\cdots\right)$$

Benutzt man diese Reihenentwickelungen, und führt man an Stelle der τ die Perioden T selbst ein nach (10) und (17), so entsteht aus (19)

$$(22)\quad \begin{aligned} n^2 = 1 + \Sigma\vartheta_v' + \frac{\Sigma\vartheta_v' T_v^2}{T^2} + \frac{\Sigma\vartheta_v' T_v^4}{T^4} + \cdots \\ - T^2\Sigma\frac{\vartheta_r'}{T_r^2} - T^4\Sigma\frac{\vartheta_r'}{T_r^4} - \cdots \end{aligned}$$

Es hat sich nun in der That eine vierconstantige Dispersionsformel:

$$(23)\quad n^2 = -A'T^2 + A + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{T^4}$$

mit positiven Coefficienten A', A, B, C bisher den Beobachtungen über die Abhängigkeit des n von T bei durchsichtigen Körpern meist sehr gut angeschlossen. Wir erkennen in (23) die abgebrochenen Reihenentwickelungen von (22) und verstehen daher theoretisch, weshalb alle Coefficienten A', A, B, C positiv sein müssen. Zugleich ergiebt sich, dass das von der Periode T freie Glied A der Dispersionsformel die physikalische Bedeutung hat:

$$(24)\quad A = 1 + \Sigma\vartheta_v'.$$

Da nach (16) die Dielektricitätsconstante ε die Bedeutung hat

$$\varepsilon = 1 + \Sigma\vartheta_h' = 1 + \Sigma\vartheta_v' + \Sigma\vartheta_r',$$

so ergiebt sich

$$(25)\quad \varepsilon - A = \Sigma\vartheta_r',$$

d. h. die Differenz zwischen Dielektricitätsconstante und dem von T freien Gliede der Dispersionsformel ist stets positiv und hat die Bedeutung der Summe der Dielektricitätsconstanten der Ionen, deren Eigenschwingungen im Ultrarothen liegen. Hierdurch werden also die oben S. 256 constatirten Abweichungen der ursprünglichen Maxwell'schen Theorie von der Erfahrung erklärt.

Eine solche Differenz zwischen ε und A muss also immer be-

stehen, wenn die Dispersion nicht durch die dreiconstantige Formel

$$n^2 = A + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{T^4} \tag{26}$$

darzustellen ist; denn der Coefficient A' in der Formel (23) rührt gerade von den Ionen her, welche Eigenschwingungen im Ultrarothen besitzen. Für diesen Satz bildet das Verhalten des Wassers eine glänzende Bestätigung. Denn unter allen durchsichtigen Körpern erreicht der Coefficient A' der vierconstantigen Dispersionsformel den grössten Betrag an Wasser, und dies steht sowohl im Einklang damit, dass Wasser am meisten von allen Körpern Wärmestrahlen absorbirt, als damit, dass bei Wasser die Differenz zwischen ε und A am grössten ist. — Unter der Annahme, dass nur ein einziges Absorptionsgebiet im Ultrarothen liegt, kann man die Lage desselben aus A' und $\varepsilon - A$ berechnen. Denn es ist dann (22), (23) und (25):

$$A' = \frac{\vartheta_r'}{T_r^2}, \quad \varepsilon - A = \vartheta_r', \text{ d. h. } T_r^2 = \frac{\varepsilon - A}{A'}. \tag{27}$$

Nach Ketteler ist nun für Wasser $A' = 0{,}0128 \cdot 10^8 \cdot c^2\, sec^{-2}$, wobei $c = 3 \cdot 10^{10}$ ist. Ferner ist $\varepsilon - A = 77$. Hieraus berechnet sich die dem ultrarothen Absorptionsgebiet entsprechende Wellenlänge (in Luft oder Vacuum gemessen) zu

$$\lambda_r^2 = c^2\, T_r^2 = \frac{77}{0{,}0128}\, 10^{-8} = 60 \cdot 10^{-6},$$

d. h.

$$\lambda_r = 7{,}75 \cdot 10^{-3}\,\text{cm} = 0{,}08\,\text{mm}. \tag{28}$$

Diese Wellenlänge liegt in der That weit im Ultrarothen. Experimentelle Untersuchungen ergaben, dass das Wasser nicht nur ein Absorptionsgebiet im Ultrarothen hat,[1]) dass die Grössenordnung der am stärksten absorbirten Wellenlängen aber in der That mit (28) übereinstimmt.[2])

Weitere quantitative Bestätigungen der Dispersionsformel (19) haben sich am Flintglas, Flussspath, Quarz, Steinsalz, Sylvin ergeben, indem man zur Untersuchung auch sehr langwellige

---

1) Vgl. F. Paschen, Wied. Ann. 53, S. 334, 1894.

2) Vgl. Rubens u. Aschkinass, Wied. Ann. 65, S. 252, 1898.

Strahlen verwendete.[1]) Schreibt man (19) in der Form

$$n^2 = 1 + \Sigma \vartheta_h' + \Sigma \frac{\vartheta_h' \tau_h^2}{\tau^2 - \tau_h^2},$$

d. h. in der Form:

$$n^2 = b^2 + \Sigma \frac{M_h}{\lambda^2 - \lambda_h^2}, \tag{29}$$

so erkennt man, dass b^2 mit der Dielektricitätsconstante ε identisch sein muss. Bei den genannten Körpern konnte man nun n^2 durch die Formel (29) in der That gut darstellen, z. B. bei **Quarz** (ordinärer Strahl) durch die Constanten:

$$\begin{array}{lll} M_1 = 0{,}0106, & \lambda_1^2 = 0{,}0106. & \\ M_2 = 44{,}224, & \lambda_2^2 = 78{,}22, & \\ M_3 = 713{,}55, & \lambda_3^2 = 430{,}56, & b^2 = 4{,}58. \end{array}$$

Es ist $\lambda_h = T_h \cdot V$ gesetzt, und Einheit von λ_h ist der tausendste Theil eines Millimeters (μ). Diese 7 Constanten M_1, M_2, M_3, λ_1, λ_2, λ_3, b^2 müssen nach (29) die Relation erfüllen:

$$b^2 - 1 = \Sigma \vartheta_h' = \frac{M_1}{\lambda_1^2} + \frac{M_2}{\lambda_2^2} + \frac{M_3}{\lambda_3^2}. \tag{30}$$

Die rechte Seite hat hier den Zahlwerth: 3,2; die linke Seite ist 3,6. Diese Differenz wird veranlasst durch Molecülgattungen, deren Eigenperioden so weit im Ultravioletten liegen, dass man für sie $\tau_h = 0$ setzen kann. Nennt man die Summe ihrer Dielektricitätsconstanten ϑ_o', so wird nach (29):

$$b^2 = 1 + \vartheta_o' + \Sigma \vartheta_h', \quad M_h = \vartheta_h' \cdot \lambda_h^2.$$

An Stelle von (30) tritt daher:

$$b^2 - 1 - \frac{M_h}{\lambda_h^2} = \vartheta_o'. \tag{30'}$$

Die Dielektricitätsconstante des Quarzes hat sich nun zu $\varepsilon = 4{,}55$ bis 4,73 ergeben, was mit dem Werth b^2 sehr gut übereinstimmt.

1) Vgl. **Rubens** und **Nichols**, Wied. Ann. 60, S. 418, 1897. — **Paschen**, Wied. Ann. 54, S. 672, 1895.

Flussspath: $M_1 = 0{,}00612$, $\lambda_1^2 = 0{,}00888$,
$M_2 = 5099$, $\lambda_2^2 = 1258$,
$b^2 = 6{,}09$, $\varepsilon = 6{,}7$ bis $6{,}9$.

(Auch hier ist (30) nicht genau erfüllt.)

Steinsalz: $M_1 = 0{,}018$, $\lambda_1^2 = 0{,}0162$,
$M_2 = 8977$, $\lambda_2^2 = 3149$,
$b^2 = 5{,}18$, $\varepsilon = 5{,}81$ bis $6{,}29$.

[(30) ist annähernd erfüllt. $\vartheta_o' = 0{,}18$.]

Sylvin: $M_1 = 0{,}0150$, $\lambda_1^2 = 0{,}0234$,
$M_2 = 10747$, $\lambda_2^2 = 4517$,
$b^2 = 4{,}55$, $\varepsilon = 4{,}94$.

(Die Relation (30) ist nicht erfüllt. Es ist nach (30') $\vartheta_o' = 0{,}53$.)

Der Schluss, dass die Differenz zwischen ε und A nach Formel (25) auf Eigenschwingungen und Absorption im Ultrarothen deutet, lässt sich nicht umkehren, d. h. auch wenn die Dielektricitätsconstante ε und das von der Periode freie Glied A der vierconstantigen Dispersionsformel (23) übereinstimmen, brauchen Eigenschwingungen und Absorptionen im Ultrarothen nicht ganz ausgeschlossen zu sein. Nach (25) wären nur die Dielektricitätsconstanten ϑ_r' dieser Ionengattungen, deren Eigenschwingungen im Ultrarothen liegen, sehr klein. Trotzdem kann aber merkliche Absorption für $\tau = \tau_r$ eintreten. Denn nach (18) tritt dann in ε' das Glied $\vartheta_r' : i \cdot a_r/\tau_r$ auf. Dieser Term hat nach (12) den Werth $-i\, 2T_r \mathfrak{N}_r : r_r$, wobei r_r den in (1) definirten Reibungswiderstand bedeutet. Der Werth dieses Gliedes bleibt also endlich, auch wenn ϑ_r sehr klein wird. So sehen wir in der That bei vielen Körpern, z. B. den Kohlenwasserstoffen, dass die Differenz zwischen ε und A sehr klein ist, und trotzdem sind diese Körper für Wärmestrahlen nicht vollständig absorptionsfrei.

Aus der Dispersionsformel (22) oder (23) folgt, dass n^2 beständig abnimmt, wenn T wächst. Dies kann man in der That bei allen durchsichtigen Körpern beobachten, es ist der normale Verlauf, daher bezeichnet man ihn als normale Dispersion.

3. Anomale Dispersion. Normale Dispersion des n^2 tritt allemal ein, wenn man die Untersuchung beschränkt auf ein Gebiet von Schwingungsperioden T, welches nicht durch eine Eigenschwingungsperiode des Körpers hindurchgeht. Sowie aber das letztere eintritt, muss der normale Verlauf des n^2 gestört werden. Denn aus (19) folgt, dass für Perioden T, welche kleiner als eine

Eigenperiode T_h ist, für welche also $1-(\tau_h/\tau)^2$ den negativen Werth $-\zeta$ hat, n^2 das grosse negative Glied: $-\vartheta_h':\zeta$ enthält, während für T, welche grösser als T_h sind, $1-(\tau_h/\tau)^2$ den positiven Werth ζ' annimmt, daher n^2 das positive Glied $+\vartheta_h':\zeta'$ enthält. Wenn daher T beständig wächst, so nimmt n^2 im Allgemeinen ab, beim Hindurchgehen durch ein Absorptionsgebiet aber zu. Im Absorptionsgebiet selbst ist die Formel (19) nicht zu gebrauchen, vielmehr ist dann n^2 und $\varkappa$ aus (18) mit Berücksichtigung von a_h zu berechnen. Jedenfalls müssen die Werthe von n^2 continuirlich zusammenhängen. Man erhält daher den in Figur (102) dargestellten Verlauf des n^2 und des Absorptionsindex $\varkappa$. Letzterer ist bei kleinem a_h nur in unmittelbarer Nähe von T_h von Null verschieden, aber dann auch um so bedeutender, je kleiner a_h ist. Denn aus (18) folgt für $T = T_h$:

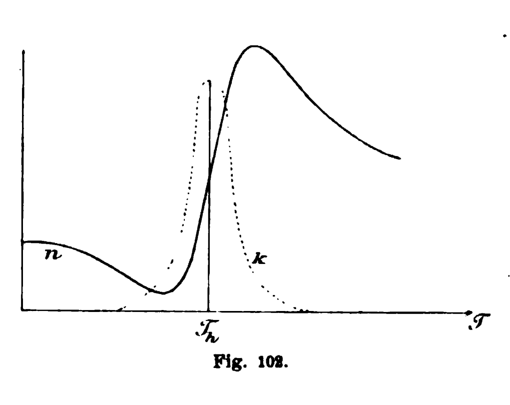


Fig. 102.

$$2n^2\varkappa = \frac{T}{2\pi}\,\frac{\vartheta_h'}{a_h} = \frac{2T\mathfrak{R}_h}{r_h}. \tag{31}$$

Je kleiner also a_h, d. h. r_h ist, um so schärfere und schmalere Absorptionsstreifen besitzt der Körper, während bei grossem a_h die Absorption sich über grössere Gebiete von Wellenlängen erstreckt, aber mit geringerer Intensität.

Der in Figur (102) angedeutete Gang der anomalen Dispersion wird nun in der That bei Körpern mit auswählender starker Absorption (z. B. Fuchsin) gut bestätigt.[1]) Die Gase und Metalldämpfe zeichnen sich durch sehr schmale und intensive Absorptionsstreifen aus. Auch in der Nähe dieser schmalen Absorptionsstreifen tritt anomale Dispersion des n^2 auf.

Experimentell kann man das Vorhandensein anomaler Dis-

1) Vgl. Ketteler, theoret. Optik, Braunschweig, 1885, S. 548 ff. — Eine gute Bestätigung der Theorie auch im Absorptionsgebiete selbst hat Pflüger (Wied. Ann. 65, S. 173, 1898) am Cyanin erhalten.

persion am einfachsten dadurch erkennen, dass ein Prisma des betreffenden Körpers von einer Lichtlinie ein Spectrum entwirft, in welchem die Farbenfolge nicht die normale ist. Die Erscheinung kann aber dadurch complicirt werden, dass im Spectrum an mehreren Stellen zwei Farben aufeinander fallen können. Daher ist es übersichtlicher, wenn man die Kundt'sche Methode der gekreuzten Prismen anwendet, indem ein durch ein Glasprisma mit vertikaler brechender Kante entworfenes normales, sehr schmales, horizontales Spectrum betrachtet wird durch ein Prisma der zu untersuchenden Substanz mit horizontaler brechender Kante. Es entsteht eine Lichtlinie, welche bei anomaler Dispersion von S aus Stücken in verschiedener Höhe besteht, welche durch dunkle Stellen, die den Absorptionsgebieten entsprechen, von einander getrennt sind.

Ein Uebelstand dieser Prismenmethoden ist es, dass bei starker Absorption nur Prismen von sehr kleinem brechenden Winkel

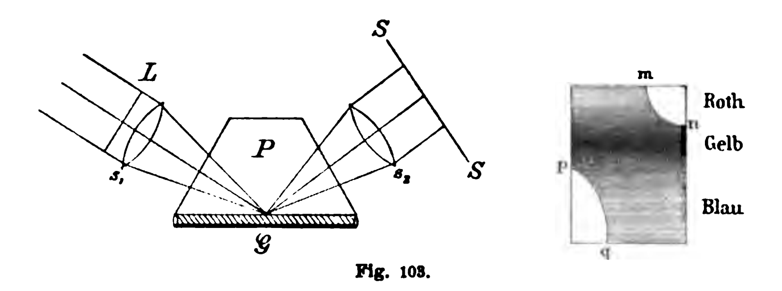


Fig. 103.

benutzt werden können. Daher ist die Methode von Mach und Arbes[1]) günstig, welche die anomale Dispersion aus der Totalreflexion erschliesst. Eine Fuchsinlösung wird in den Glastrog G gefüllt, und auf ihn das Flintglasprisma P gesetzt. Von der Lichtlinie L, die in einer Verticalebene liegt, concentrirt die Sammellinse s_1 die Lichtstrahlen auf der Grenzfläche Glas-Fuchsinlösung. Die Linse s_2 sammelt die reflectirten Strahlen und entwirft ein reelles Bild von L auf dem Schirm S. Dieses Bild wird aber vorher durch ein geeignet gestelltes Glasprisma in ein Spectrum verbreitert. Dasselbe zeigt dann die in der Figur dargestellte Helligkeitsvertheilung, in der die Curve $mnpq$ der Totalreflexion zu erkennen ist. Das Absetzen

1) E. Mach und J. Arbes, Wied. Ann. 27, S. 436, 1886.

dieser Curve zwischen n und p lässt auf einen Blick die anomale Dispersion erkennen. (Zwischen n und p liegt ein dunkler Streifen, da für die dort liegenden Farben der Brechungsindex des Flintglases gleich dem der Fuchsinlösung ist, sodass überhaupt keine Reflexion eintritt.) Direct im Gebiete maximaler Absorption kann man allerdings auch nach dieser Methode den Brechungsindex nicht immer bestimmen, denn in diesem Gebiete ist oft die partielle Reflexion wegen der hohen Absorption so gross (cf. Metallreflexion), dass die partielle Reflexion continuirlich in die Totalreflexion übergeht, sodass keine scharfe Grenzcurve auftritt. Man kann dann aber n und $\varkappa$ aus der partiellen Reflexion wie bei den Metallen bestimmen.

Eine glänzende Bestätigung der hier dargelegten Anschauungen hat sich neuerdings[1]) durch die Thatsache ergeben, dass Quarz für sehr langwellige Strahlen ($\lambda = 56\,\mu$) einen viel grösseren Brechungsindex besitzt ($n = 2{,}18$) als für sichtbares Licht. Die Formel (29) liefert mit Annahme der auf S. 360 angegebenen Constantenwerthe des Quarzes $n = 2{,}20$. Wenn man daher die Strahlen eines Auerbrenners durch ein Quarzprisma spectral zerlegt, so findet man jenseits der violetten Seite des Spectrums diese langwelligen Strahlen, welche daher so in einfacher Weise durch Abblendung von den anderen Strahlen zu isoliren sind.

Das Gegenstück zu einem sehr schmalen Absorptionsstreifen bietet der Fall, dass in (18) oder in (15) nicht a_h, sondern b_h oder τ_h zu vernachlässigen ist, dass wir uns also in einem Absorptionsgebiete befinden, in welchem keine Eigenschwingungen liegen (dieselben würden vielmehr erst bei viel kleineren Schwingungen eintreten). Dann wäre nach (18):

$$(32)\qquad n^2(1 - i\varkappa)^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta_h'}{1 + \frac{a_h^2}{\tau^2}}\left(1 - i\,\frac{a_h}{\tau}\right) + \sum \frac{\vartheta_v'}{1 - \left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^2}.$$

Die Σ über den Index v bezieht sich auf die im Ultravioletten liegenden Eigenschwingungen. Nimmt man deren Perioden als sehr klein gegen T an, so wird nach (32), falls man wiederum in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung der S. 360 $\Sigma\vartheta_v' = \vartheta'$ setzt:

$$(33)\qquad n^2(1 - \varkappa^2) = 1 + \vartheta_0' + \sum \frac{\vartheta_h'\tau^2}{\tau^2 + a_h^2},\quad 2n^2\varkappa = \sum \frac{\vartheta_h' a_h \tau}{\tau^2 + a_h^2}.$$

1) Rubens u. Aschkinass, Wied. Ann. 67, S. 459, 1899.

Ist nur eine Ionengattung h vorhanden, so ergiebt sich, dass n mit abnehmender Periode T von $T = \infty$ an zunächst beständig abnimmt und die Absorption, welche ein sehr breites Gebiet einnimmt, ein Maximum für eine gewisse Periode T erreicht. Diese Formeln scheinen bei manchen Substanzen die Dispersionserscheinungen darzustellen, die man im Gebiete der durch elektrische Vorgänge erhaltenen grossen Wellenlängen von $\lambda = \infty$ bis zu etwa $\lambda = 1$ cm herab beobachtet.[1])

4. Die Dispersion der Metalle. Wenn wir Leiter der Elektricität in den Kreis der Betrachtungen ziehen, so haben wir zu berücksichtigen, dass in Leitern Elektricitätsmengen unter dem Einfluss einer constanten elektrischen Kraft fortdauernd verschoben werden, ohne eine bestimmte Gleichgewichtslage anzunehmen. Die bei den Elektrolyten benutzte Vorstellung, dass die verschobenen Elektricitätsmengen an bestimmte Massen (Ionen) geknüpft sind, übertragen wir insofern auf die Metalle, als auch in ihnen die Bewegung der Ionen so erfolgt, als ob sie träge Masse m besässen. Dieselbe kann aber auch scheinbare Masse sein, indem die Trägheit durch die Selbstinduction veranlasst wird (cf. oben S. 353).

Für diese (Leitungs-) Ionen muss man ihre Constante ϑ unendlich gross setzen, da nach (2) ϑ_1 proportional ist der Verschiebung der Ionen aus der ursprünglichen Lage unter der Einwirkung einer constanten elektrischen Kraft. Die Bewegungsgleichung dieser Ionen entsteht daher aus der Gleichung (1) der S. 353, wenn man dort $\vartheta_1 = \infty$ setzt, d. h. sie ist:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = eX - re^2 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{34}$$

oder wenn man nach (5) die von diesen Ionen hervorgerufene Strömung $j_x = e \mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial t}$ einführt:

$$\frac{m}{e^2 \mathfrak{N}} \frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{r}{\mathfrak{N}} j_x = X. \tag{35}$$

Hierin ist m die (scheinbare oder wirkliche) Masse eines Ions, e die Ladung desselben, $\mathfrak{N}$ die Anzahl der Ionen in der Volumeinheit. Aus (35) erkennt man, dass, falls zwei Leitungs-Ionengattungen

---

1) Dies habe ich näher in Wied. Ann. 64, S. 131, 1898 ausgeführt.

vorhanden sind, eine positiv und eine negativ geladene Gattung, deren Reibungswiderstände r_1 und r_2 sind, für constante Ströme die Beziehung besteht

$$(36)\qquad \frac{\mathfrak{N}_1}{r_1} + \frac{\mathfrak{N}_2}{r_2} = \sigma,$$

wobei σ die nach elektrostatischem Maasse gemessene specifische elektrische Leitfähigkeit des Körpers ist (cf. S. 331).

Für periodische Aenderungen wird nach (35), da $X = -i\tau \frac{\partial X}{\partial t}$ ist,

$$j_x \left\{ \frac{i}{\tau} \frac{m}{e^2 \mathfrak{N}} + \frac{r}{\mathfrak{N}} \right\} = -i\tau \frac{\partial X}{\partial t}$$

oder

$$(37)\qquad j_x = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} \left\{ \frac{4\pi\tau\mathfrak{N}}{-\frac{m}{\tau e^2} + ir} \right\}.$$

Durch derartige Zusatzglieder ist die frühere Formel (14) der S. 356 zu erweitern, sodass, wenn man zur Abkürzung setzt

$$(38)\qquad m : e^2 = m'$$

die resultirende complexe Dielektricitätsconstante ε' die Gestalt annimmt:

$$(39)\qquad \varepsilon' = 1 + \sum_h \frac{\vartheta_h'}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}} + 4\pi\tau \sum_k \frac{\mathfrak{N}}{ir - \frac{m'}{\tau}}.$$

Nimmt man an, dass die Schwingungen weit von den Eigenschwingungen der Ionengattungen h entfernt seien, sodass a_h zu vernachlässigen ist, so entsteht aus (39), da $\varepsilon' = n^2(1 - i\varkappa)^2$ ist, durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$(40)\qquad n^2(1 - \varkappa^2) = 1 + \sum \frac{\vartheta_h'}{1 - \left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2} - 4\pi \sum \frac{m'\mathfrak{N}}{r^2 + \left(\frac{m'}{\tau}\right)^2},$$

$$(41)\qquad n^2\varkappa = 2\pi\tau \sum \frac{r\mathfrak{N}}{r^2 + \left(\frac{m'}{\tau}\right)^2}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass bei Metallen wohl $\varkappa > 1$ sein kann, da die rechte Seite von (40) nicht nur wegen des zweiten

Termes, sondern besonders auch wegen des dritten Termes, der mit der Masse m der Leitungs-Ionen proportional ist, negativ werden kann. Dies wird bei bestimmten m' und τ um so eher eintreten, je kleiner r, d. h. je grösser die specifische Leitfähigkeit ist. Ferner ist durch die Gleichung (41) der zweite Widerspruch erklärt, der oben auf S. 339 constatirt wurde, dass nämlich bei den Metallen $n^2\varkappa$ kleiner als σT ist. Setzt man nämlich $m' = 0$ (oder $\tau = \infty$), so ergiebt (41) thatsächlich [mit Rücksicht auf (36)] die von der ursprünglichen Maxwell'schen Theorie geforderte Beziehung

$$n^2\varkappa = 2\pi\,\tau\Sigma\frac{\mathfrak{N}}{r} = \sigma T,$$

sobald aber m'/τ nicht vernachlässigt wird gegen r (und gerade bei schnellen Perioden [τ klein] und grosser Leitfähigkeit [r klein] wird dies nicht gestattet sein), so ergiebt sich nach (41) $n^2\varkappa < \sigma T$.[1]

Noch allgemeinere Formeln als (40) und (41) könnte man durch Hinzuziehung der in (33) gebildeten Ausdrücke erhalten, was der Annahme entspräche, dass ausser den eigentlichen Leitungs-Ionen noch leitende Bestandtheile vorhanden wären, welche aber unter Wirkung einer constanten elektrischen Kraft nur um einen endlichen Betrag aus ihrer ursprünglichen Lage verschoben werden (sogenannte innere Leitfähigkeit, wie man sie durch Leiter, welche in einem Isolator eingebettet sind, im Groben nachahmen kann). Ob diese erweiterte Annahme nothwendig ist, könnte erst eine weit vollständigere Untersuchung der Dispersion der Metalle ergeben, als sie bisher ermöglicht worden ist.

Die Formeln (40) und (41) geben auch Aufschluss darüber, dass nur bei so guten Leitern, wie sie die Metalle sind, Lichtabsorption durch die elektrische Leitfähigkeit hervorgerufen wird, während bei den besten elektrolytischen Leitern die Leitfähigkeit noch immer so gering ist, dass sie, wie es auch die Beobachtung bestätigt, sehr gut durchsichtig sein können, z. B. ist bei bestleitender Schwefelsäure oder Salpetersäure die specifische elektrische Leitfähigkeit etwa $7 \cdot 10^{-5}$ mal so gross, als beim Quecksilber. Da bei letzterem (cf. oben S. 331) $\sigma = 10^{16}$ ist, so wäre also bei den bestleitenden Elektrolyten $\sigma = 7 \cdot 10^{11}$. Nun ist aber für Licht-

1) Betreffs genauerer Ausführung vgl. meinen Aufsatz in der phys. Zeitsch. S. 161, Jan. 1900.

schwingungen etwa $T = 2 \cdot 10^{-15}$, daher ist $\sigma T = 14 \cdot 10^{-4} = 0{,}0014$. Nach Formel (41) ist aber $n^2 \varkappa$ stets kleiner, jedenfalls nie grösser als σT. Daher ist $\varkappa$, d. h. die Lichtabsorption, sehr gering, wenigstens die durch die Leitfähigkeit bedingte.

Kapitel VI.

Natürlich-active Körper.

1. Allgemeine Grundlage. Wenn ein linear polarisirter Lichtstrahl senkrecht auf eine planparallele Glasplatte fällt, so hat die Polarisationsebene des austretenden Strahles dieselbe Lage, wie die des eintretenden. In derselben Weise verhalten sich im Allgemeinen alle Körper, auch Krystallplatten, welche senkrecht zu einer optischen Axe geschnitten sind.

Indess giebt es eklatante Ausnahmen von dieser Regel bei den sogenannten natürlich[1]-activen Körpern: So z. B. dreht eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Quarzplatte die Polarisationsebene sehr bedeutend, und sogar in Zuckerlösungen ist diese Drehung leicht nachweisbar. Letzteres Resultat ist um so auffallender, als man eine Lösung als einen völlig isotropen Körper anzusehen geneigt ist, während die besprochene Erscheinung entschieden gegen die Isotropie des Körpers spricht. Denn bei vollkommener Isotropie könnte aus Symmetrierücksichten eine Ablenkung der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes in irgend einem bestimmten Sinne nicht möglich sein.

Diese Erscheinung spricht also dafür, dass die Zuckerlösung in optischer Hinsicht keine einzige Symmetrieebene besitzt, da sonst, wenn z. B. die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit ihr

1) Dieser Zusatz dient zur Unterscheidung von den später zu besprechenden magnetisch-activen Körpern.

zusammenfiele, keine Drehung derselben stattfinden könnte. Der Natur der Lösung entspricht es aber, dass sie sich in allen Richtungen gleich verhält. Es lässt sich hiernach die Gestalt der Differentialgleichungen, welche die optischen Vorgänge in einer Zuckerlösung beschreiben können, dahin characterisiren, dass dieselbe ungeändert bleiben muss bei einer beliebigen Drehung des ganzen Coordinatensystems, dass dagegen die Gestalt der Differentialgleichungen sich ändern muss, wenn nur eine der Coordinatenaxen in die entgegengesetzte Richtung gelegt wird, d. h. wenn z. B. x und y unverändert bleiben, während z mit $-z$ vertauscht wird. Körper, für welche Differentialgleichungen dieser Gestalt gelten, heissen dissymmetrisch-isotrope.

Dagegen nennt man einen Krystall der, wie Quarz, keine optische Symmetrieebene besitzt, einen dissymmetrisch-krystallinischen Körper.

2. Isotrope Körper. Bei einer Lösung kann eine Unsymmetrie nur in der Gestaltung des Molecüles selbst liegen, nicht in der gegenseitigen Anordnung der Molecüle, und in der That haben le Bel und van't Hoff das Drehungsvermögen direct mit der chemischen Constitutionsformel in Verbindung setzen können. — Bei einem festen Körper kann die Dissymmetrie in der gegenseitigen Anordnung der Molecüle liegen.

Eine Erweiterung unserer bisherigen Theorie versuchen wir in den Gleichungen (1) auf S. 353 des vorigen Kapitels, während wir an den sogenannten Grundgleichungen der Maxwell'schen Theorie (S. 247) nach wie vor festhalten.

Die dissymmetrische Constitution eines Körpers ist nun nur dadurch zu erkennen, dass man die Eigenschaften an einer Stelle mit denen einer benachbarten Stelle vergleicht; ein genau punktförmiges Gebilde kann keine dissymmetrische Eigenschaften haben, diese können immer erst bei räumlich ausgedehnten Gebilden hervortreten. Die nothwendige Erweiterung unserer früheren Anschauungen über die Ionenbeweglichkeit muss also darin bestehen, dass wir die Verschiebung ξ eines Ions nicht nur von der elektrischen Kraft X an der Stelle des Ions als abhängig betrachten, sondern auch von den elektrischen Kraftcomponenten der unmittelbar benachbarten Stellen. Mathematisch drückt sich diese Idee dadurch aus, dass in der Gleichung (1) der S. 353 oder der Gleichung (2) ausser X auch noch die Differentialquotienten von X, Y, Z nach den Coordinaten vorkommen müssen. Berücksichtigt man nun die

Bedingung der Isotropie, d. h. dass keine Coordinatenrichtung vor der anderen ausgezeichnet ist, so bleibt als mögliche Erweiterung von (2) nur:

$$e\,\xi = \frac{\vartheta}{4\pi}\left(X + f'\left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right), \tag{1}$$

zu welcher Gleichung sich zwei analoge zuordnen, die man durch cyklische Vertauschung der Buchstaben aus (1) ableiten kann. In (1) könnte wegen der Isotropie auch noch das Glied $\frac{\partial X}{\partial x}$ auftreten. Dieses muss aber deshalb verschwinden, weil sonst

$$e\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \sim \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

wäre, d. h. es könnte eine Anhäufung freier Ladung entstehen, da die rechte Seite im Allgemeinen, z. B. bei Lichtschwingungen, nicht verschwindet.

Wir würden ein dissymmetrisch-isotropes Medium erhalten, wenn die Molecüle einer Lösung alle dieselben unregelmässigen Tetraeder sind, während die Tetraeder, welche zu ihnen spiegelbildlich gleich sind, nicht vorhanden oder mindestens kleiner an Zahl sind. — Eine directe Versinnlichung der Gleichung (1) erhält man, wenn man annimmt, dass unter dem Einfluss der Molecularstructur die Bahnen der Ionen nicht kurze gerade Linien, sondern kurze, in einem Sinne gewundene Schraubenlinien sind, deren Axen nun aber regellos im Raume verschieden gerichtet sind. Betrachten wir z. B. eine rechts gewundene Schraubenbahn (cf. Figur 104), deren Axe parallel zur x-Axe geht. Die Componente X treibt das geladene Ion beständig nach rechts, ein positives Y treibt aber das Ion auf der Oberseite der Schraube nach links, auf der Unterseite nach rechts. Es resultirt daher eine Wirkung nach rechts, welche proportional zu $-\frac{\partial Y}{\partial z}$ ist, da es auf den Unterschied der Y oben und unten ankommt. Ebenfalls treibt ein positives Z das Ion auf der Vorderseite der Schraube nach links, auf der Hinterseite nach rechts. Der resultirende Effect nach rechts ist proportional zu $+\frac{\partial Z}{\partial y}$. Es entsteht daher der Ansatz (1), wobei f' negativ sein würde bei

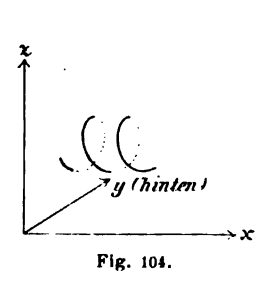


Fig. 104.

rechts gewundenen Ionenbahnen und wenn das Coordinatensystem in der der Figur 104 entsprechenden Weise gewählt wird.

Nach dem Ansatz (1) ist die frühere Gleichung (1) der S. 353 zu erweitern in

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=e\left(X+f'\left[\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right)-\frac{4\pi e^2}{\vartheta}\xi-re^2\frac{\partial\xi}{\partial t}. \tag{2}$$

Für periodische Veränderlichkeit mit der Zeit entsteht, falls wir die Strömung $(j_x)_1=e\mathfrak{N}\frac{\partial\xi}{\partial t}$ einführen:

$$(j_x)_1=\frac{\vartheta\mathfrak{N}}{4\pi\left(1+i\frac{a}{\tau}-\frac{b}{\tau^2}\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left(X+f'\left[\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right), \tag{3}$$

wobei

$$a=\frac{r\vartheta}{4\pi},\quad b=\frac{r\vartheta}{4\pi e^2}=\tau_1^2. \tag{4}$$

Wir wollen im Folgenden a/τ vernachlässigen, was gestattet ist, wenn die Lichtschwingungen nicht nahe zusammenfallen mit der Eigenperiode einer Ionengattung. Die ganze, von allen Ionengattungen und vom Aether herrührende Strömung ist dann

$$j_x=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon X+f\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right\}, \tag{5}$$

wobei

$$\varepsilon=1+\Sigma\frac{\vartheta_h\mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2},\qquad f=\Sigma\frac{\vartheta_h f_h'\mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}. \tag{6}$$

Die Grundgleichungen (7) und (11) der S. 245, 247 werden daher, falls die Magnetisirungsconstante $\mu=1$ gesetzt wird, sodass $4\pi s_x=\partial\alpha/\partial t$ etc. ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon X+f\left[\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right)&=\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z},\\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon Y+f\left[\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right]\right)&=\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x},\\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon Z+f\left[\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right]\right)&=\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y},\end{aligned} \tag{7}$$

$$(8)\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Als Grenzbedingungen beim Uebergang des Lichtes über die Grenze zweier verschiedener Körper ergiebt sich nach denselben Ueberlegungen, wie sie oben S. 251 angestellt sind, Stetigkeit der der Grenze parallelen elektrischen und magnetischen Kraftcomponenten.

Wir haben damit eine vollständige Theorie der Lichterscheinungen in natürlich activen Körpern gewonnen.

Aus den Gleichungen (7) folgt, dass

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0$$

ist. Aus den Gleichungen (7) und (8) erhält man daher durch Elimination von α, β, γ analog wie oben S. 255:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon X+f\left[\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right)&=\Delta X,\\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon Y+f\left[\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right]\right)&=\Delta Y,\\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon Z+f\left[\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right]\right)&=\Delta Z.\end{aligned}$$

Gleichungen derselben Form genügen α, β, γ.

3. Die Drehung der Polarisationsebene. Pflanzen sich ebene Wellen nach der z-Axe fort, so ist zu setzen:

$$(11)\qquad X=Me^{\frac{i}{\tau}(t-pz)},\quad Y=Ne^{\frac{i}{\tau}(t-pz)},\quad Z=0.$$

p bedeutet die reciproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle. Setzt man die Werthe (11) in (10) ein, so erhält man die Beziehungen:

$$\varepsilon M-\frac{i}{\tau}fpN=Mp^2c^2,$$

$$\varepsilon N+\frac{i}{\tau}fpM=Np^2c^2.$$

Diesen Gleichungen kann man durch zwei Werthsysteme genügen, nämlich durch

$$(12)\qquad \varepsilon-p^2c^2=\frac{pf}{\tau},\quad M=iN,$$

und

$$\varepsilon - p^2 c^2 = -\frac{pf}{\tau}, \quad M = -iN. \tag{13}$$

Es ergiebt sich also hier das eigenthümliche Resultat, dass zwei Wellen mit verschiedenem p, d. h. auch mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten existiren. Ferner haben die Wellen imaginäre y-Amplituden, wenn sie reelle x-Amplituden besitzen.

Um die physikalische Bedeutung hiervon zu erkennen, ist zu berücksichtigen, dass die eigentliche physikalische Bedeutung von X und Y erhalten wird, wenn auf der rechten Seite von (11) nur der reelle Theil genommen wird. Es folgt daher

für $iN = M$:

$$X = M \cos \frac{1}{\tau}(t - pz), \quad Y = M \sin \frac{1}{\tau}(t - pz), \tag{14}$$

für $iN = -M$:

$$X = M \cos \frac{1}{\tau}(t - pz), \quad Y = -M \sin. \frac{1}{\tau}(t - pz). \tag{15}$$

Diese Gleichungen stellen circular polarisirte Wellen dar, und zwar ist, da bei unserer oben S. 244 festgesetzten Lage des Coordinatensystems die x-Axe nach rechts, die y-Axe nach oben geht, wenn man der z-Axe entgegensieht, die erste Welle links circular polarisirt, da sie eine dem Uhrzeiger entgegengerichtete Drehung darstellt; die zweite Welle ist rechts-circularpolarisirt (Definition vgl. oben S. 230).

Diese beiden Wellen haben nun also verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V, und zwar ist nach (12) für die erste Welle:

$$p' = \frac{1}{V'} = -\frac{f}{2\tau c^2} + \frac{1}{c}\sqrt{\frac{f^2}{4\tau^2 c^2} + \varepsilon}, \tag{16}$$

für die zweite Welle nach (13):

$$p'' = \frac{1}{V''} = +\frac{f}{2\tau c^2} + \frac{1}{c}\sqrt{\frac{f^2}{4\tau^2 c^2} + \varepsilon}. \tag{17}$$

Es ergiebt sich hiernach das Resultat, dass der Brechungsexponent für rechts- und links-circularpolarisirtes Licht in activen Körpern etwas verschieden sein muss, und dass ein natürlicher Lichtstrahl bei schiefer Incidenz in zwei räumlich getrennte Strahlen

zerlegt wird, von denen der eine rechts-, der andere links-circularpolarisirt ist. Diese Folgerungen der Theorie hat in der That v. Fleischl[1]) an Zuckerlösungen und anderen Flüssigkeiten experimentell nachweisen können.

Der Effect der Superposition zweier sich mit den Geschwindigkeiten V' und V'' fortpflanzenden rechts- und links-circularpolarisirten Wellen ist

$$(18)\qquad \begin{aligned} X &= X' + X'' = 2M \cos \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{p'+p''}{2} z\right) \cos \frac{1}{\tau} \frac{p''-p'}{2} z,\\ Y &= Y' + Y'' = 2M \cos \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{p'+p''}{2} z\right) \sin \frac{1}{\tau} \frac{p''-p'}{2} z. \end{aligned}$$

An einer bestimmten Stelle, d. h. für ein bestimmtes z, besteht daher eine linearpolarisirte Lichterregung, da nach (18) X und Y von gleicher Phase sind. Die Lage der Polarisationsebene zur x-Axe bestimmt sich aus

$$Y : X = tg \frac{1}{\tau} \frac{p''-p'}{2} z,$$

d. h. diese Lage wechselt mit z. Die Polarisationsebene dreht sich also um die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes gleichmässig herum, und zwar auf der Strecke z um den Winkel:

$$(19)\qquad \delta = \frac{z}{\tau} \frac{p''-p'}{2} = \frac{f}{2\tau^2 c^2} z = 2\pi^2 \frac{f}{\lambda_0^2} z,$$

falls $\lambda_0 = Tc$ die Wellenlänge der betreffenden Lichtsorte im Vacuum bezeichnet. Da pc den Brechungsindex n des Körpers gegen das Vacuum bedeutet, so ist

$$(19')\qquad \delta = \frac{z}{\tau c} \frac{n''-n'}{2} = z \frac{\pi}{\lambda_0} (n''-n'),$$

falls n'' und n' den Brechungsindex des Körpers für eine rechts- und eine links-circularpolarisirte Welle bedeuten. Nach (19) und (19') gilt also:

$$(19'')\qquad 2\pi \frac{f}{\lambda_0} = n'' - n'.$$

1) E. v. Fleischl, Wied. Ann. 24, S. 127, 1885. — Leichter gelingt es, die circulare Doppelbrechung für Quarz in Richtung der optischen Axe nachzuweisen. Bei Quarz ist die Constante f viel grösser, als in Flüssigkeiten.

Wenn also linear polarisirtes Licht senkrecht auf eine Platte der Dicke z eines activen Körpers fällt, so ist die Polarisationsebene nach dem Austritt aus der Platte um den Winkel δ gedreht. Je nach dem Vorzeichen von f kann der Drehungswinkel δ in verschiedenem Sinne stattfinden. Aus δ berechnet sich $n'' - n'$ nach (19').

Um diese Drehung bequem und scharf zu beobachten, sind besondere Apparate construirt worden.[1]) Die sogenannten Halbschattenapparate beruhen auf der Benutzung eines zweifach getheilten Gesichtsfeldes, dessen Theile schwach gegeneinander geneigte Polarisationsebenen besitzen. Aber schon bei Anwendung zweier einfacher Nicol'scher Prismen als Polarisator und Analysator kann man bei genügend intensiver, homogener Beleuchtung die Lage der Polarisationsebene bei wiederholten Ablesungen auf drei Bogensecunden genau bestimmen, wenn man als Einstellungscriterium den sogenannten Landolt'schen Streifen benutzt. Weil nämlich bei Anwendung Nicol'scher Prismen das Gesichtsfeld nie genau homogen überall polarisirt ist, so ist bei gekreuzten Nicols nicht das ganze Gesichtsfeld völlig dunkel, sondern es zieht sich ein schwarzer, gekrümmter Streifen, auf den Landolt zuerst aufmerksam gemacht hat, durch das Gesichtsfeld. Die Lage dieses Streifens wechselt nun sehr schnell, wenn die Polarisationsebene des in den Analysator einfallenden Lichtes sich verändert.[2])

4. Krystalle. Um zu einem Ansatz für Krystalle zu gelangen, muss man berücksichtigen, dass die in den Gleichungen (1) (S. 353) der Dispersionstheorie auftretenden Constanten ϑ_1, r_1 von der Coordinatenrichtung abhängen. Auch die in diesem Kapitel angebrachten Zusatzglieder, welche der optischen Activität entsprechen, können in einem Krystall eine viel allgemeinere Gestalt besitzen, als sie im Ansatz (1) der S. 370 enthalten ist. Jedoch wollen wir die Annahme machen, dass hinsichtlich dieser activen Zusatzglieder der Krystall wie ein dissymmetrisch-isotroper Körper behandelt werden soll. Diese Annahme ist unbedenklich, da die Coefficienten f der activen Zusatzglieder bei allen thatsächlich

1) Betreffs der genaueren Beschreibung dieser Apparate sei verwiesen auf Landolt, Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen. Braunschweig, 2. Aufl. — Müller-Pouillet (Lummer), Optik, S. 1166ff. — Die Beobachtung der Drehung der Polarisationsebene wird zur quantitativen Zuckerbestimmung practisch verwerthet.

2) Vgl. hierüber F. Lippich, Wien. Ber. (2) 85, S. 268, 1892. — Müller-Pouillet (Lummer), Optik, S. 1115.

vorliegenden Körpern überhaupt nur so klein sind, dass die durch die Krystallstructur bewirkte Veränderlichkeit der f mit der Richtung zu vernachlässigen ist.

Wählt man als Coordinatenaxen diejenigen Richtungen, welche die optischen Symmetrieaxen des Krystalls sein würden, falls derselbe keine optische Activität besässe, so würden sich unsere Gleichungen (7) und (8) erweitern in [1]:

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_1 X + f\left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right) &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},\\
\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_2 Y + f\left[\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right]\right) &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},\\
\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_3 Z + f\left[\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right]\right) &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y},
\end{aligned}
$$

$$
(21)\qquad \frac{1}{C}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\quad \frac{1}{C}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\quad \frac{1}{C}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},
$$

wobei ist:

$$
(22)\qquad \varepsilon_1 = 1 + \Sigma \frac{\vartheta_h'\mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h'}{\tau}\right)^2},\quad \varepsilon_2 = 1 + \Sigma \frac{\vartheta_h''\mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h''}{\tau}\right)^2},\quad \varepsilon_3 = 1 + \Sigma \frac{\vartheta_h'''\mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h'''}{\tau}\right)^2},
$$

$$
(23)\qquad f = \Sigma \frac{\vartheta_h f_h'\mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}.
$$

Hierin bezeichnen $\vartheta_h'\mathfrak{N}_h$, $\vartheta_h''\mathfrak{N}_h$, $\vartheta_h'''\mathfrak{N}_h$ die drei verschiedenen Dielektricitätsconstanten der h^{ten} Ionengattung nach den drei Coordinatenrichtungen, τ_h', τ_h'', τ_h''' sind proportional zu den drei Schwingungsdauern nach den drei Axen; in (23) bezeichnen ϑ_h, τ_h Mittelwerthe von ϑ_h', ϑ_h'', ϑ_h''' bezw. τ_h', τ_h'', τ_h'''.

Setzt man zur Integration analog wie oben auf S. 340

$$
(24)\qquad u = \varepsilon_1 X = Me^{i\psi},\quad v = \varepsilon_2 Y = Ne^{i\psi},\quad w = \varepsilon_3 Z = \Pi e^{i\psi},
$$
$$
\psi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right),
$$

wobei man u, v, w als Componenten des Lichtvectors interpretiren kann, so folgt [2]) aus (20) und (21), wenn man zur Abkürzung setzt:

1) Es ist C für c geschrieben.

2) Dies ist näher ausgeführt in Winkelmann's Hdb. d. Phys. Optik, S. 791 ff. — Die Normalenfläche und Strahlenfläche activer Krystalle ist näher discutirt von O. Weder, Die Lichtbewegung in zweiaxigen activen Krystallen, Dissertation, Leipzig 1896. — Ztschr. f. Krystallogr. 1896.

$$C^2 : \varepsilon_1 = a^2, \quad C^2 : \varepsilon_2 = b^2, \quad C^2 : \varepsilon_3 = c^2, \tag{25}$$

$$\eta = \frac{2\pi f C}{T\varepsilon^{3/2}}, \tag{26}$$

wobei ε ein Mittelwerth von ε_1, ε_2, ε_3 bedeutet, das Gesetz für die Geschwindigkeit V als Function der Richtung m, n, p der Wellennormale in der Form:

$$\begin{aligned} m^2 (V^2 - b^2)(V^2 - c^2) + n^2 (V^2 - c^2)(V^2 - a^2) \\ + p^2 (V^2 - a^2)(V^2 - b^2) = \eta^2. \end{aligned} \tag{27}$$

Durch Einführung der Winkel g_1 und g_2, welche die Wellennormale mit den optischen Axen bildet, ergiebt sich analog wie oben S. 297:

$$\begin{aligned} 2 V_1^2 &= a^2 + c^2 + (a^2 - c^2) \cos g_1 \cos g_2 \\ &\quad + \sqrt{(a^2 - c^2)^2 \sin^2 g_1 \sin^2 g_2 + 4\eta^2} \\ 2 V_2^2 &= a^2 + c^2 + (a^2 - c^2) \cos g_1 \cos g_2 \\ &\quad - \sqrt{(a^2 - c^2)^2 \sin^2 g_1 \sin^2 g_2 + 4\eta^2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Man erkennt hieraus, dass in keiner Richtung, auch nicht für die Richtung einer optischen Axe, die beiden Geschwindigkeiten V_1 und V_2 identisch werden.

Eine in einen activen Krystall eindringende Welle zerlegt sich also stets in zwei Wellen verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Diese beiden Wellen sind elliptisch polarisirt, in beiden Wellen ist die Erregungsbahn die gleiche Ellipse, die Ellipsen liegen aber invers zu einander, und werden in entgegengesetztem Rotationssinne durchlaufen. Das Axenverhältniss h der Erregungsellipse bestimmt sich aus:

$$h + \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)^2 \sin^2 g_1 \sin^2 g_2 + 4\eta^2}}{\eta}. \tag{29}$$

In der Richtung der optischen Axen (g_1 oder $g_2 = 0$) ist daher das Axenverhältniss $h = 1$, d. h. es findet dann Circularpolarisation statt. Bei kleiner Abweichung der Wellennormale von der Richtung einer optischen Axe ist aber die Erregungsbahn schon eine sehr flache Ellipse, da 2η selbst bei stark activen Krystallen stets sehr klein gegen die Differenz $a^2 - c^2$ der Quadrate der beiden Haupt-Lichtgeschwindigkeiten ist.

Zweiaxige active Krystalle sind in der Natur bisher nicht

aufgefunden worden; dagegen sind mehrere Repräsentanten einaxiger activer Krystalle vorhanden, z. B. Quarz. Derselbe kommt in zwei spiegelbildlich gleichen krystallographischen Formen vor, und daher giebt es auch sowohl rechts- als linksdrehenden Quarz. Die Drehung der Polarisationsebene durch eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Quarzplatte der Dicke z bestimmt sich gerade wie bei isotropen Medien durch die Formel

$$\delta = 2\pi^2 \frac{f}{\lambda_0^2} z = \frac{\pi}{\lambda_0} z (n'' - n'). \tag{30}$$

Für $z = 1$ mm und gelbes Licht ($\lambda_0 = 0{,}000589$ mm) beträgt $\delta = 21{,}7^0 = 0{,}12\,\pi$ absolutes Bogenmaass. Daraus berechnet sich

$$2\pi \frac{f}{\lambda_0} = n'' - n' = 0{,}12 \cdot \frac{\lambda_0}{z} = 0{,}000071. \tag{31}$$

Dabei bezeichnen n', n'' die beiden Brechungsindices, welche der Quarz in der Richtung der optischen Axe in Folge seiner Activität haben muss. Eine Doppelbrechung $n'' - n'$ in dem aus (31) sich ergebenden Betrage hat nun thatsächlich V. v. Lang am Quarz in Richtung seiner optischen Axe gefunden. Zur besseren Demonstration dieser Doppelbrechung lässt man nach Fresnel zweckmässig das Licht abwechselnd durch rechts- und linksdrehende Quarzprismen gehen, deren Keilwinkel abwechselnd nach verschiedenen Seiten zu liegen.

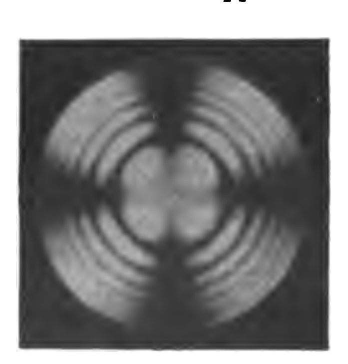


Fig. 105.

Betrachtet man eine einige Millimeter dicke, senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte zwischen gekreuzten Nicols bei einfallendem weissen Lichte, so erscheint die Platte farbig. Die einfallende Polarisationsebene ist nämlich nach dem Durchgang durch die Platte für die verschiedenen Farben verschieden gedreht, und es müssen im Gesichtsfelde alle diejenigen Farben ausgelöscht werden, deren Polarisationsebene senkrecht zu der des Analysators liegt. Die Farbe der Quarzplatte wechselt daher auch bei Drehung des Analysators. — Benutzt man einfallendes convergentes Licht, so tritt die oben S. 329 für einaxige Krystalle beschriebene Inter-

ferenzfigur zwischen gekreuzten Nicols erst in einiger Entfernung von der optischen Axe auf. In der Nähe derselben macht sich die Circularpolarisation in der Zerstörung des schwarzen Kreuzes der Hauptisogyren geltend. Eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte zeigt daher zwischen gekreuzten Nicols bei convergenter Beleuchtung das in Figur 105 dargestellte Interferenzbild.

Spiralige Interferenzfiguren treten auf, wenn man circularpolarisirtes Licht einfallen lässt. Die Berechnung dieser Airyschen Spiralen ist in den „Vorlesungen über theoretische Optik" von F. Neumann, herausg. v. Dorn, S. 244 ff., Leipzig 1885, gegeben.

5. Die Dispersion der Rotationspolarisation. Die Drehung δ der Polarisationsebene, welche eine Platte eines activen isotropen Körpers oder die senkrecht zur Axe geschnittene Platte eines activen Krystalls bewirkt, muss mit der Farbe variiren. Wir erhalten das Dispersionsgesetz aus den Formeln (6) und (19), falls wir die Dicke der Platte $z = 1$ setzen und anstatt der Wellenlänge λ_0 im Vacuum die Wellenlänge λ der betreffenden Farbe in Luft einführen [1])

$$\delta = \frac{k}{\lambda^2} \Sigma \frac{\vartheta_h f_h' \mathfrak{N}_h}{1 - \left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}, \tag{32}$$

worin k eine Constante bedeutet.

Wenn die Eigenschwingungsdauern der activen Ionenarten [2]) so viel kleiner sind, als die Periode des angewandten Lichtes, dass $(\tau_h : \tau)^2$ gegen 1 zu vernachlässigen ist, so resultirt die einfachste Form des Dispersionsgesetzes

$$\delta = \frac{k'}{\lambda^2}. \tag{33}$$

Annäherungsweise genügt diese Biot'sche Formel, doch ist sie nicht genau. Wenn alle Eigenperioden der activen Ionen im Ultravioletten liegen, so kann man (32) nach steigenden Potenzen von $(\tau_h : \tau)^2$ entwickeln und erhält dann die Form

$$\delta = \frac{k_1}{\lambda^2} + \frac{k_2}{\lambda^4} + \frac{k_3}{\lambda^6} + \cdots \tag{34}$$

---

1) In Anbetracht der geringen Dispersion der Luft ist dies gestattet.

2) Wir wollen darunter alle diejenigen Ionenarten verstehen, die einer Bewegungsgleichung nach der Formel (2) genügen, während wir diejenigen Ionenarten inactiv nennen wollen, für welche die Constante f' in jener Gleichung (2) den Werth Null hat.

Meist genügt nun schon in der That diese Formel mit Benutzung der ersten beiden Glieder (**Boltzmann**'sche Formel), jedoch reicht sie für Quarz, bei dem man δ über ein sehr grosses Bereich von Wellenlängen gemessen hat (von $\lambda = 2\mu$ bis $\lambda = 0{,}2\mu$), nicht aus. — Die einzelnen Constanten k_1, k_2, k_3 können verschiedene Vorzeichen haben, da die f_h' der verschiedenen activen Ionengattungen nicht dasselbe Vorzeichen zu haben brauchen.

Wenn auch Eigenschwingungen τ im Ultrarothen bei den activen Ionen vorhanden wären, so würde (32) nach Potenzen von $(\tau : \tau_r)^2$ zu entwickeln sein. Man erhielte dann die Form:

$$\delta = \frac{k_1}{\lambda^2} + \frac{k_2}{\lambda^4} + \frac{k_3}{\lambda^6} + \cdots + k' + k_1' \lambda^2 + k_2' \lambda^4 + \cdots \tag{35}$$

Wenn man, wie beim Quarz, die Dispersion über sehr grosse Gebiete von Farben darstellen will, welche zum Theil den Eigenperioden ziemlich nahe kommen, so vermeidet man zweckmässiger Potenzentwickelungen und schreibt nach (32):

$$\delta = \Sigma \frac{k_h}{\lambda^2 - \lambda_h^2}. \tag{36}$$

Beim Quarz kennt man nun die Wellenlängen λ_h der dem Lichte am nächsten benachbarten Eigenperioden für die ordinäre Welle, sie betrugen (cf. oben S. 360) $\lambda_1^2 = 0{,}010627$, $\lambda_2^2 = 78{,}22$, $\lambda_3^2 = 430{,}6$. Einheit von λ_h ist dabei $1\mu = 0{,}001$ mm. Wir schlossen aber schon oben nach der dortigen Formel (30′), dass Quarz noch Ionengattungen haben wird, für welche ihr λ_h so klein ist, dass man noch immer nicht mit den Wellenlängen des benutzten Lichtes in die Nähe dieser λ_h gelangt. Die Activitätscoefficienten k' dieser Ionengattungen, deren λ_h^2 gegen λ^2 also in (36) zu vernachlässigen ist, müssen wir aber berücksichtigen, sodass folgende Dispersionsformel für Quarz entstehen würde:

$$\delta = \frac{k_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{k_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{k_3}{\lambda^2 - \lambda_3^2} + \frac{k'}{\lambda^2}. \tag{37}$$

Wendet man diese Formel auf die Dispersion des Quarzes an, so ergiebt sich aus den Beobachtungen, dass $k_2 = k_3 = 0$ sind, d. h. dass die Ionengattungen, deren Eigenschwingungen im Ultrarothen liegen, inactiv sind, dagegen ergiebt sich k_1 und k' von verschiedenem Vorzeichen. Es spricht nun sehr zu

Gunsten der ganzen Grundlagen der hier dargelegten Theorie, dass man mit Hülfe der Formel

$$\delta = \frac{k_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{k'}{\lambda^2}, \tag{38}$$

welche nur zwei Constanten enthält, da λ_1 aus der Dispersion des Brechungsindex, und nicht aus der Drehung der Polarisationsebene entnommen ist, die Dispersion des δ recht gut darstellen kann, wie folgende Tabelle[1]) lehrt, in der die Drehung δ in Graden pro 1 mm Dicke angegeben ist:

$k_1 = 12{,}200 \quad k' = -5{,}046.$

λ (in μ)	δ beob.	δ ber.
2,140	1,60	1,57
1,770	2,28	2,29
1,450	3,43	3,43
1,080	6,18	6,23
0,67082	16,54	16,56
0,65631	17,31	17,33
0,58932[2])	21,72	21,70
0,57905	22,55	22,53
0,57695	22,72	22,70
0,54610	25,53	25,51
0,50861	29,72	29,67
0,49164	31,97	31,92
0,48001	33,67	33,60
0,43586	41,55	41,46
0,40468	48,93	48,85
0,34406	70,59	70,61
0,27467	121,06	121,34
0,21935	220,72	220,57

Vielleicht könnten auch die Constantenwerthe k_1 und k' noch etwas besser den Beobachtungen angepasst werden. Jedenfalls ist es von Wichtigkeit, dass sich diese zweiconstantige Formel (38) den Beobachtungen genügend anschliesst, dagegen stellt die dreiconstantige Formel (37), wenn man darin $k' = 0$ setzen würde, die Beobachtungen nicht befriedigend dar. Wir müssen beim Quarz

1) Die Beobachtungsdaten sind der Zusammenstellung bei Gumlich, Wied. Ann. 64, S. 349, 1898 entnommen.

2) D-Linie.

also noch Ionengattungen annehmen, deren Eigenwellenlänge äusserst klein, viel kleiner als λ_1 ist.

Wie die Tabelle lehrt, nimmt δ mit abnehmendem λ zu. Dies ist der normale Dispersionsverlauf. Wie aber aus (38) hervorgeht, würden Störungen entstehen (anomale Rotationsdispersion), wenn die Wellenlänge noch kleiner als λ_1 wird, denn dann würde δ negativ werden. Ueberhaupt entsteht anomale Rotationsdispersion, sowie λ in die Nähe einer Eigenschwingung λ_h kommt. Aber auch wenn λ viel grösser als die λ_h ist, kann ein Vorzeichenwechsel von δ, wie selbst die allgemeine Formel (36) lehrt, stets eintreten, sowie mindestens zwei active Ionengattungen vorhanden sind, welche verschiedenes Vorzeichen ihres Activitätscoefficienten k_h besitzen. Ebenfalls können in diesen Fällen Maxima und Minima von δ bei Variation von λ auftreten.

Die Fälle sogenannter anomaler Rotationsdispersion sind thatsächlich mehrfach beobachtet worden (vgl. das oben citirte Werk von Landolt, S. 135. G. H. v. Wyss (Wied. Ann. 33, S. 554, 1888) hat durch Mischung rechts- und linksdrehenden Terpentinöls anomale Rotationsdispersion erzeugt). Im Allgemeinen muss jede Substanz in gewissen Schwingungsgebieten anomale Rotationsdispersion zeigen, nur werden allerdings diese Schwingungsgebiete nicht immer in den Bereich der experimentell herstellbaren Strahlung fallen.

6. Absorbirende active Körper. Wenn die Wellenlänge λ in der Nähe einer Eigenwellenlänge λ_h einer activen Ionengattung liegt, so wird nach (36) die Rotation δ der Polarisationsebene sehr gross. In diesem Falle muss aber Rücksicht auf die oben S. 357 vernachlässigten Reibungscoefficienten a_h genommen werden. Ebenfalls müssen die a_h berücksichtigt werden, falls der Körper breite Absorptionsgebiete zeigt. In diesen Fällen wird sowohl ε als f in den Formeln (10) complex, nämlich

$$
(39) \qquad \begin{aligned} \varepsilon &= 1 + \Sigma \frac{\vartheta_h \mathfrak{N}_h}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}}, \\ f &= \Sigma \frac{\vartheta_h f_h' \mathfrak{N}_h}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}}. \end{aligned}
$$

Die Grösse p der Formeln (11) ist daher ebenfalls complex anzunehmen. Schreibt man sie in der Form (vgl. S. 333):

$$p = \frac{1 - i\varkappa}{V}, \tag{40}$$

so bedeutet V Fortpflanzungsgeschwindigkeit, $\varkappa$ Absorptionsindex der Wellen. Da es zwei verschiedene Werthe p giebt, welche durch (16) und (17) gegeben sind, so giebt es also auch zwei verschiedene Absorptionsindices $\varkappa'$ und $\varkappa''$, welche für eine links- und eine rechts-circularpolarisirte Welle gelten. Dies ist in der That von Cotton (Compt. rend. 120, p. 989, 1044. — Ann. de chim. et de phys. [7] 8, p. 347, 1896) bei Lösungen von Kupfertartrat und Chromtartrat in Kalilauge beobachtet worden. Dass diese Lösungen auch anomale Rotationsdispersion zeigten, erscheint nach dem Vorhergehenden leicht verständlich, da die starke Absorption anzeigt, dass λ dem Gebiet der Eigenschwingungen nahe liegt.

Nach (16), (17) und (18) ist, wenn man die beiden Brechungsindices n', n'' für links- und rechts-circularpolarisirte Wellen einführt:

$$c\,(p'' - p') = n'' - n' - i\,(n''\varkappa'' - n'\varkappa') = \frac{f}{\tau c} = \frac{2\pi f}{\lambda}. \tag{41}$$

Ist ein scharfer Absorptionsstreifen vorhanden, dem nach Früherem ein kleines a_h entspricht, so wird der Unterschied von $\varkappa''$ und $\varkappa'$ für den Absorptionsstreifen selbst sehr bedeutend. Denn für $\tau^2 = b_h$ folgt aus (42) und (44):

$$n'' - n' = 0, \quad n''\varkappa'' - n'\varkappa' = \frac{\vartheta_h f_h' \mathfrak{N}_h}{a_h \cdot c}. \tag{42}$$

Liegt τ weiter von der Eigenperiode τ_h entfernt, und ist a_h genügend klein, sodass man nur bis auf erste Ordnung in $\varkappa$ oder a_h zu entwickeln braucht, so wird nach (44) und (42) das Dispersionsgesetz für die Differenz der Absorptionscoefficienten von der Form:

$$n''\varkappa'' - n'\varkappa' = \lambda^2 \Sigma \frac{ah}{(\lambda^2 - \lambda_h^2)^2}. \tag{43}$$

Bei Variation des λ können Vorzeichenwechsel, ferner Maxima und Minima von $n''\varkappa'' - n'\varkappa'$ eintreten, sobald mehrere Ionenarten mit verschiedenem Vorzeichen ihres Activitätscoefficienten f_h' vorhanden sind.

Uebrigens sind die Unterschiede in der Absorption der rechts-

und links-circularpolarisirten Wellen immer nur klein gegen die Absorptionen selber.

Denn man leitet aus (16) und (17), wenn man f^2 vernachlässigt, und falls nur ein Absorptionsstreifen vorhanden ist, leicht ab

$$\frac{n''\varkappa'' - n'\varkappa'}{n''\varkappa'' + n'\varkappa'} = \frac{2\pi f_h'}{\lambda} n\,, \tag{44}$$

wobei n das Mittel aus n' und n'' bedeutet.

Es ist nun aber $f_h' : \lambda$ stets eine kleine Zahl.

Ferner ist zu bemerken, dass nicht jeder active Körper, welcher Absorptionsstreifen besitzt, die hier besprochenen Erscheinungen zu zeigen braucht. Denn dazu ist nothwendig, dass dieselben Ionenarten, welche die Absorption veranlassen, auch activ sind. Es ist aber wohl denkbar, dass Absorption und Activität verschiedenen Ionengattungen ihre Entstehung verdanken.

Kapitel VII.

Magnetisch-active Körper.

A. Hypothese der Molecularströme.

1. Allgemeine Grundlage. Bei sämmtlichen Körpern beobachtet man besondere optische Eigenthümlichkeiten, wenn sie in starke Magnetfelder gebracht werden. Schon in rein magnetischer Hinsicht verhalten sich die verschiedenen Körper verschieden, nämlich hinsichtlich ihrer sogenannten Magnetisirungszahl μ (cf. oben S. 248). Dieselbe ist grösser als 1 bei paramagnetischen Körpern, kleiner als 1 bei diamagnetischen Körpern. Dies Verhalten hat zur Folge, dass ein Magnetfeld in paramagnetischen Körpern eine grössere Dichte magnetischer Kraftlinien hervorruft, als im freien Aether, in diamagnetischen Körpern dagegen eine geringere Kraftliniendichte, als im freien Aether. Zur Erklärung dieser Erscheinung hat man sich nach Ampère und Weber die Vorstellung

gebildet, dass in paramagnetischen Körpern sogenannte Molecularströme vorhanden sind. Diese werden nach der hier benutzten Grundlage der Dispersionstheorie durch Rotation der Ionenladungen hervorgerufen. Bei vorhandener äusserer magnetischer Kraft werden diese Molecularströme theilweise oder ganz gleich gerichtet, sodass die magnetischen Kraftlinien, welche diese Ströme erzeugen, sich gleichsinnig superponiren über die durch die äussere magnetische Kraft hervorgerufenen Kraftlinien.

Diamagnetische Körper hingegen sollen im unmagnetischen Zustande keine Molecularströme besitzen. Sowie aber diese Körper in ein Magnetfeld gebracht werden, so sollen durch Induction Molecularströme erzeugt werden, welche sich in unveränderter Stärke erhalten, so lange das äussere Magnetfeld unverändert bleibt; man muss sich vorstellen, dass die Ionenladungen in reibungslosen Bahnen rotiren können, sodass die Erhaltung dieser Molecularströme keinen Energieaufwand erfordert. Die Kraftlinien der durch Induction hervorgerufenen Molecularströme müssen den Kraftlinien des äusseren Magnetfeldes entgegen wirken, da die Inductionsströme nach der allgemeinen Lenz'schen Regel immer in der Richtung fliessen, dass sie die Veränderung der magnetischen Kraftlinien, welche durch eine äussere magnetische Kraft hervorgerufen wird, zu hemmen suchen.

Wenn wir die optischen Eigenschaften eines Körpers in einem starken, durch eine äussere magnetische Kraft hervorgerufenen Magnetfelde berechnen wollen, so haben wir also stets, sowohl bei para- als bei diamagnetischen Körpern, zu berücksichtigen, dass gewisse Ionengattungen in Rotation begriffen sind und Molecularströme bilden. Wenn wir e die Ladung eines rotirenden Ions einer Ionengattung 1 nennen, und T seine Umlaufsdauer, so ist die Stärke des von ihm hervorgerufenen Molecularstroms

$$i = e : \mathrm{T}. \tag{1}$$

Wenn nun ein solches, um einen Punkt $\mathfrak{P}$ rotirendes Ion von der elektrischen Kraft einer Lichtwelle getroffen wird, so muss es seine Bahn ändern. Wenn die Umlaufsdauer T sehr klein ist gegen die Schwingungsperiode des Lichtes, so bleibt die Bahn des Ions in ihrer Gestalt und Umlaufsdauer unverändert, das Ion rotirt aber jetzt um einen Punkt $\mathfrak{P}'$, welcher von $\mathfrak{P}$ um eine Strecke ξ in Richtung der elektrischen Kraft der Lichtwelle verschoben ist und

periodisch wie die elektrische Kraft der Lichtwelle oscillirt. — Derselbe Effect muss im Mittel eintreten, wenn die Umlaufsdauer T beliebig gross ist und nicht in rationalem Verhältniss zur Lichtperiode T steht. Von einer Drehung der Bahnebene durch die magnetische Kraft der Lichtwelle können wir absehen, da diese stets viel kleiner, als die äussere magnetische Kraft ist. — Durch diese Verschiebung des Molecularstroms werden nun die magnetischen Kraftlinien, welche er erzeugt, mit verschoben, sodass dadurch eine besondere Inductionswirkung entsteht, welche wir berücksichtigen müssen, falls eine Lichtwelle auf Molecularströme trifft.

Wir können diese Inductionswirkung sofort berechnen, wenn wir die Kraftlinienzahl kennen, welche an den Molecularströmen haftet.

Diese ist nun leicht zu finden. Die Bahnen der Molecularströme seien alle parallel einer Ebene, welche senkrecht zu einer Richtung R, der Richtung der äusseren magnetischen Kraft, steht. Wir fassen zunächst eine Linie der Länge l parallel der Richtung R ins Auge. Auf derselben mögen $l \cdot \mathfrak{N}'$ Molecularströme (der Ionengattung 1) liegen, $\mathfrak{N}'$ bezeichnet also die Anzahl Molecularströme auf der Längeneinheit. Diese Ströme kann man als ein Solenoid auffassen, q sei der Querschnitt der Strombahn, d. h. des Solenoids. Die Kraftlinienzahl in diesem Solenoid ist[1])

$$M = 4\pi \mathfrak{N}' i q : c.$$

Wenn nun auf der Flächeneinheit $\mathfrak{N}''$ solcher Solenoide vorhanden sind, so ist die Anzahl magnetischer Kraftlinien auf der Flächeneinheit, welche diesen Molecularströmen anhaftet,

$$M_1 = 4\pi \frac{\mathfrak{N}'\mathfrak{N}'' i q}{c} = 4\pi i q \frac{\mathfrak{N}}{c}$$

wobei $\mathfrak{N}$ die Anzahl der rotirenden Ionen der Gattung 1 in der Volumeneinheit bedeutet.

Die Componenten von M_1 nach den Coordinatenrichtungen sind:

$$(2)\quad \alpha_1 = \frac{4\pi}{c} i q \mathfrak{N} \cos(Kx),\ \beta_1 = \frac{4\pi}{c} i q \mathfrak{N} \cos(Ky),\ \gamma_1 = \frac{4\pi}{c} i q \mathfrak{N} \cos(Kz).$$

1) Die Kraftlinien eines Solenoids sind $4\pi n i q$, falls n die Anzahl Windungen pro Längeneinheit ist und i die Stromstärke nach elektromagnetischem Maass bedeutet. Da hier i elektrostatisch definirt ist, so tritt c als Divisor auf.

2. Herleitung der Differentialgleichungen. Wir halten fest an den Grundgleichungen (7) und (11) der Maxwell'schen Theorie (cf. S. 245, 247):

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \text{ etc.}, \quad \frac{4\pi}{c} s_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \text{ etc.} \tag{3}$$

Während aber bei den bisher betrachteten Erweiterungen der Maxwell'schen Theorie nur der Ausdruck j_x für die elektrische Stromdichte durch die Ionenhypothese modificirt wurde, die magnetische Stromdichte s_x dagegen beständig gleich $^1/_4 \pi \cdot \partial\alpha/\partial t$ war, so muss hier, bei der Vorstellung rotirender Ionen, auch s_x eine andere Form annehmen. $4\pi j_x$ und $4\pi s_x$ sind nach (12) auf S. 247 stets definirt durch die Aenderung der elektrischen bezw. magnetischen Kraftliniendichte in der Zeiteinheit.

Um nun hier $4\pi s_x$ zu berechnen, ist zu berücksichtigen, dass es aus mehreren Antheilen zusammengesetzt ist. Die Aenderung des Kraftlinienverlaufes im Aether, welche die Lichtwelle direkt hervorruft, giebt den Antheil $dy dz \cdot \partial\alpha/\partial t$ zum Kraftlinienfluss durch das Rechteck $dy\,dz$. Hierzu kommen nun aber noch Antheile, welche durch die von der Lichtwelle bewirkte Bewegung der Rotationsmittelpunkte $\mathfrak{P}$ der Ionenbahnen veranlasst werden, da die Kraftlinien M_1 die Bewegung der $\mathfrak{P}$ mitmachen.

Fig. 106.

Um diese Antheile für s_x zu berechnen, fassen wir ein Rechteckselement $dy dz$ senkrecht zur x-Axe ins Auge und fragen, welches ist die Zahl der Kraftlinien, welche bei der Bewegung von $\mathfrak{P}$, deren Componenten ξ, η, ζ sind, die 4 Seiten *abcd* des Rechtecks schneiden.

Berücksichtigen wir zunächst nur die Kraftlinien α_1 parallel zur x-Axe, so tritt in der Zeiteinheit durch die Seite a in das Rechteck ein die Kraftlinienzahl $\left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_a dz$, dagegen durch die Seite c tritt aus die Zahl $\left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_c dz$. Die unteren Indices a, c sollen bedeuten, dass der Werth des Termes $\alpha_1 \cdot \partial\eta/\partial t$ am Orte der betreffenden Seite des Rechtecks zu nehmen ist. Es ist daher

$$\left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_c = \left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_a + dy \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}\right).$$

Es ist hier α_1 noch unter dem Differentialzeichen nach y stehen

gelassen, um zugleich den Fall der inhomogenen Medien, bei denen α_1, β_1, γ_1 Functionen des Ortes sind, mit einzubegreifen. In homogenen Körpern sind α_1, β_1, γ_1 constant. Die Kraftlinien α_1, welche bei ihrer Bewegung die Seiten a, c schneiden, bewirken also eine Vermehrung der Kraftlinienzahl, welche das Rechteck durchsetzt, im Betrage von: $-dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1\,\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)$. Analog geben die Kraftlinien α_1, welche bei ihrer Bewegung die Seiten b, d des Rechtecks schneiden, zum Kraftfluss durch das Rechteck den Antheil $-dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1\,\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)$.

Die Kraftlinien β_1, welche parallel zur y-Axe laufen, können durch die Bewegung ξ von $\mathfrak{P}$ die Seiten des Rechtecks $abcd$ schneiden, und zwar nur die Seiten a und c. Die Kraftlinienzahl, welche das Rechteck durchsetzt, ändert sich nun nur durch eine Drehung der Kraftlinien β_1 um die z-Axe, und zwar im positiven Sinne, falls die Kraftlinien β_1 sich von der $+\,y$-Richtung etwas zur $+\,x$-Richtung drehen. Den Effekt dieser Drehung kann man dadurch berechnen, dass man von dem Ausdruck $\left(\beta_1\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_c dz$, welcher die Kraftlinienzahl ergiebt, welche die Seite c in der Zeiteinheit schneidet, subtrahirt den Ausdruck $\left(\beta_1\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_a dz$, welcher die die Seite a schneidende Kraftlinienzahl darstellt. Da nun ist:

$$\left(\beta_1\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_c = \left(\beta_1\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_a + dy\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_1\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}\right),$$

so folgt durch die Drehung von β_1 zum Kraftfluss durch das Rechteck der Antheil: $+\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_1\,\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)$.

Analog folgt durch die Drehung der Kraftlinien γ_1 um die y-Axe zum Kraftfluss durch das Rechteck der Antheil: $+\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_1\,\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)$.

Durch Addition aller Antheile zum Kraftfluss durch das Rechteck wird daher dieser Kraftlinienfluss:

$$dy\,dz\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1\,\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1\,\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_1\,\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_1\,\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right\}.$$

Die Aenderung der Kraftlinienzahl in der Zeiteinheit für ein Flächenelement der Grösse 1, welches senkrecht zur x-Axe liegt,

ist daher, da bei constantem äusseren Magnetfeld α_1, β_1, γ_1 von t nicht abhängen:

$$4\pi s_x = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma_1 \xi - \alpha_1 \zeta) - \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_1 \eta - \beta_1 \xi)\right\}. \tag{4}$$

Die Stromdichte wird, genau betrachtet, durch die Rotation der Ionen in complicirter Weise modificirt. Wenn aber die Rotationsdauer der Ionen nicht in einem rationalen Verhältniss zur Lichtperiode steht, so braucht man, um den mittleren Effekt zu finden, nur Rücksicht zu nehmen auf die Bewegung ξ, η, ζ des Rotationsmittelpunktes $\mathfrak{P}$.

Die Stromdichte j_x schreibt sich daher wie früher (vgl. Formel (7) der S. 354) in der Form:

$$j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + e\mathfrak{N}\frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{5}$$

Für die Bewegung eines Punktes $\mathfrak{P}$, der Mittellage eines rotirenden Ions der Gattung 1, setzen wir dieselbe Gleichung an, wie oben S. 353:

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = eX - \frac{4\pi e^2}{\vartheta}\xi - re^2\frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{6}$$

wenn $\mathfrak{P}$ um eine Gleichgewichtlage schwingen kann (isolirende Ionen), dagegen verwenden wir die Gleichung (34) auf S. 365:

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = eX - re^2\frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{7}$$

wenn $\mathfrak{P}$ einer constanten Kraft X dauernd folgt, d. h. wenn e ein Leitungsion ist, wie es in Elektricitätsleitern, z. B. Metallen vorkommt. m bezeichnet die ponderabele Masse des Ions.

Wenn man es mit periodischen Aenderungen zu thun hat, bei denen alle X und ξ proportional zu $e^{i\frac{t}{\tau}}$ sind, erhält man aus (6):

$$e\frac{\partial \xi}{\partial t}\left\{1 + i\frac{r\vartheta}{4\pi\tau} - \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}\cdot\frac{1}{\tau^2}\right\} = \frac{\vartheta}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}, \tag{8}$$

dagegen aus (7):

$$e\frac{\partial \xi}{\partial t}\left(r + \frac{i}{\tau}\frac{m}{e^2}\right) = X = -i\tau\frac{\partial X}{\partial t}. \tag{9}$$

Setzt man daher, wie früher

$$\frac{r\vartheta}{4\pi} = a, \quad \frac{m\vartheta}{4\pi e^2} = b = \tau_1^2, \quad \frac{m}{e^2} = m', \tag{10}$$

so wird nach (5), falls e ein nicht leitendes Ion ist:

$$j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{1 + \frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1 + i\,{}^a/_\tau - {}^b/_{\tau^2}}\right\}, \tag{11}$$

wenn dagegen e ein leitendes Ion ist:

$$j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{1 + \frac{4\pi\tau\mathfrak{N}}{ir - {}^{m'}/_\tau}\right\}. \tag{12}$$

In jedem Falle können wir setzen

$$j_x = \frac{\varepsilon'}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}, \quad j_y = \frac{\varepsilon'}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t}, \quad j_z = \frac{\varepsilon'}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t}, \tag{13}$$

worin ε' eine im allgemeinen complexe, von τ abhängige Grösse ist.

Wir gewinnen ferner aus (1), (2) und (8) für ein isolirendes Ion:

$$\gamma_1\,\xi = \frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1 + i\,{}^a/_\tau - {}^b/_{\tau^2}} \cdot \frac{q}{c\mathrm{T}} \cos(Kz)\,X, \tag{14}$$

aus (9) erhalten wir für ein leitendes Ion:

$$\gamma_1\,\xi = \frac{4\pi\tau\mathfrak{N}}{ir - {}^{m'}/_\tau} \cdot \frac{q}{c\mathrm{T}} \cos(Kz)\,X. \tag{15}$$

In jedem Falle können wir setzen

$$\gamma_1\,\xi = \nu\cos(Kz)\,X, \tag{16}$$

wobei ν eine im allgemeinen complexe Grösse bedeutet, welche von τ abhängt. Analog kann man die Producte $\alpha_1\,\zeta$ etc. schreiben. Setzt man noch

$$\nu\cos(Kx) = \nu_x, \quad \nu\cos(Ky) = \nu_y, \quad \nu\cos(Kz) = \nu_z, \tag{17}$$

so werden nach (13), (4) und (16) die Fundamentalgleichungen (3):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha + \frac{\partial}{\partial z}(\nu_z X - \nu_x Z) - \frac{\partial}{\partial y}(\nu_x Y - \nu_y X)\right\} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\
(18)\quad &\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\beta + \frac{\partial}{\partial x}(\nu_x Y - \nu_y X) - \frac{\partial}{\partial z}(\nu_y Z - \nu_z Y)\right\} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\gamma + \frac{\partial}{\partial y}(\nu_y Z - \nu_z Y) - \frac{\partial}{\partial x}(\nu_z X - \nu_x Z)\right\} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$\frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \tag{19}$$

Sind mehrere Molecülgattungen vorhanden, so gelten dieselben Formeln (18) und (19), aber die Constanten ε' und ν bestehen aus Summen:

$$\varepsilon' = 1 + \Sigma \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}} + 4\pi\tau\,\Sigma \frac{\mathfrak{N}_k}{i r_k - \frac{m'_k}{\tau}}, \tag{20}$$

$$\nu = \frac{1}{c}\Sigma \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}} \cdot \frac{q_h}{T_h} + \frac{4\pi\tau}{c}\,\Sigma \frac{\mathfrak{N}_k}{i r_k - \frac{m'_k}{\tau}} \frac{q_k}{T_k}. \tag{21}$$

Der Index h bezieht sich auf die isolirenden (nicht leitenden) Ionen, der Index k auf die leitenden Ionen. T_h ist mit verschiedenem Vorzeichen einzuführen, je nachdem das positiv geladene rotirende Ion die Kraftlinien des äusseren magnetischen Feldes verstärkt (T_h positiv), oder schwächt (T_h negativ). Bei einem negativ geladenen Ion ist T_h negativ zu nehmen, wenn die Kraftlinien des Molecularstromes in gleichem Sinne, wie die des äusseren Magnetfeldes, liegen. Bei rein paramagnetischen Ionen ist daher T_h positiv für die positiv geladenen Ionen, negativ für die negativ geladenen Ionen. Bei rein diamagnetischen Ionen ist es gerade umgekehrt. Ferner ist q_h als abhängig anzusehen von der Stärke des äusseren Magnetfeldes, denn bei Magnetisirung, welche nicht bis zur Sättigung getrieben ist, sind nicht alle Molecularströme parallel gerichtet, was wir am einfachsten dadurch ausdrücken, dass dann q_h kleiner ist. q_h ist daher proportional zur Magnetisirung des Körpers anzunehmen. — Nach ihrer Herleitung (cf. oben S. 388) gelten die Gleichungen (18), (19) ganz allgemein, d. h. auch in inhomogenen Körpern, bei denen ε' und ν Functionen des Ortes sind.

3. Die magnetische Drehung der Polarisationsebene. Wir wollen den Fall annehmen, dass die Lichtstrahlen parallel zur Magnetisirungsrichtung liegen sollen. Als solche wählen wir die z-Axe. Es hängt dann X, Y, α, β nur von z und t ab, falls ebene Wellen nach der z-Axe sich fortpflanzen, ferner ist $Z = \gamma = 0$. Ferner ist

$$\nu_x = \nu_y = 0, \quad \nu_z = \nu,$$

daher werden die Fundamentalgleichungen (18), (19):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha + \nu\frac{\partial X}{\partial z}\right\} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \tag{22}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\beta + \nu\frac{\partial Y}{\partial z}\right\} = -\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z}. \tag{23}$$

Differentiirt man die Gleichungen nach t und setzt für $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ ihre Werthe nach (22), so folgt

$$\frac{\varepsilon'}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\nu}{c}\frac{\partial^3 Y}{\partial t\,\partial z^2}, \tag{24}$$

$$\frac{\varepsilon'}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - \frac{\nu}{c}\frac{\partial^3 X}{\partial t\,\partial z^2}.$$

Zur Integration setzen wir wie oben S. 372:

$$X = M e^{\frac{i}{\tau}(t - pz)}, \quad Y = N e^{\frac{i}{\tau}(t - pz)}. \tag{25}$$

Dann ergiebt (24):

$$\varepsilon' M = p^2 c^2 \left(M + i\frac{\nu}{c\tau} N\right),$$

$$\varepsilon' N = p^2 c^2 \left(N - i\frac{\nu}{c\tau} M\right).$$

Diesen Gleichungen kann man durch zwei Werthsysteme genügen, nämlich durch:

$$p^2 c^2 \left(1 + \frac{\nu}{c\tau}\right) = \varepsilon', \quad M = iN, \tag{26}$$

und

$$p^2 c^2 \left(1 - \frac{\nu}{c\tau}\right) = \varepsilon', \quad M = -iN. \tag{27}$$

Nach der oben S. 373 gegebenen Interpretation der dortigen analogen Gleichungen (12) und (13) pflanzen sich also eine rechts- und eine links-circularpolarisirte Welle mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort. Die erste Welle (26) ist links-circularpolarisirt, ihr zugehöriges p ist

$$p' c = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{1 + \frac{\nu}{c\tau}}}. \tag{28}$$

Das zugehörige p der rechts-circularpolarisirten Welle ist

$$p''c = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{1 - \frac{\nu}{c\tau}}}\,. \tag{29}$$

Durch Superposition beider circularpolarisirten Wellen ergiebt sich, wenn wir zunächst annehmen, dass ε' und ν, d. h. auch p' und p'' reell sind, linearpolarisirtes Licht, dessen Polarisationsebene sich beim Fortschreiten nach z gleichmässig dreht um den Winkel

$$\delta = \frac{z}{\tau}\,\frac{p'' - p'}{2}\,. \tag{30}$$

Wenn $\nu : c\tau$ klein gegen 1 ist, wie es im Allgemeinen stets der Fall ist, so erhält man aus (30):

$$\delta = \frac{\nu\sqrt{\varepsilon'}}{2c^2\tau^2}\,z\,. \tag{30'}$$

Bei positivem ν ist der Drehungssinn von rechts nach links, d. h. dem Uhrzeiger entgegen, wenn man der Fortpflanzung des Lichtes entgegenblickt. In gleichem Sinne rotiren bei Magnetisirung nach der positiven z-Axe die positiven, paramagnetischen Ionen. *Wenn also ν positiv ist, so erfolgt eine Drehung der Polarisationsebene im Sinne der paramagnetischen Molecularströme.*

Da der Drehungssinn nur von der Magnetisirungsrichtung abhängt, so geht bei bestimmter Magnetisirung des Körpers die Drehung der Polarisationsebene weiter, wenn die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes umgekehrt wird. Lässt man daher linearpolarisirtes Licht in einen magnetisirten Körper einfallen und an der Hinterfläche desselben reflectiren, so ist die Polarisationsebene des an der Vorderfläche wieder austretenden Lichtes doppelt gedreht gegen die ursprüngliche Lage. — Bei einem natürlich-activen Körper wäre bei dieser Anordnung eine Drehung der Polarisationsebene nicht vorhanden. Denn in einem natürlich-activen Körper ist der Sinn der Drehung der Polarisationsebene, wenn man immer der Fortpflanzungsrichtung entgegen sieht, stets derselbe, d. h. die Drehung nach ihrer absoluten Lage wechselt mit der Fortschreitungsrichtung der Wellen.

Ob nun die Drehung δ im Sinne der paramagnetischen

Molecularströme erfolgt, oder ihnen entgegen, ist aus dem Magnetisirungscharacter des Körpers (para- oder diamagnetisch) nicht zu bestimmen, denn das Vorzeichen von ν kann man aus der Magnetisirungszahl μ des Körpers nicht berechnen, sobald mehr als eine rotirende Ionengattung vorhanden ist.[1]) Die Magnetisirungszahl μ ist nach (19) der S. 249 dadurch definirt, dass die gesammte Kraftliniendichte M_x nach der x-Axe gleich $\mu\gamma$ ist. Nach (2) ist nun bei Magnetisirung nach der x-Axe die gesammte Kraftlinienanzahl der Flächeneinheit (die sogenannte Induction):

$$(31) \qquad M_x = \mu\gamma = \gamma + \frac{4\pi}{c} \Sigma\, iq\mathfrak{N} = \gamma + \frac{4\pi}{c} \Sigma\, e\mathfrak{N} \frac{q}{\mathrm{T}}\,.$$

Hierdurch ist die Magnetisirungszahl μ anschaulich interpretirt. Je nachdem

$$(32) \qquad \frac{4\pi}{c} \Sigma\, e\mathfrak{N} \frac{q}{\mathrm{T}} \gtrless 0\,,$$

ist daher der Körper para- oder diamagnetisch. Aus dem Vorzeichen dieser Summe kann man aber nicht auf das Vorzeichen von ν schliessen. — Nehmen wir z. B. den einfachsten Fall, dass zwei nicht leitende paramagnetische Ionengattungen 1 und 2 vorhanden sind, es sei $e_1 = -e_2 = e$, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}$, $\mathrm{T}_1 = -\mathrm{T}_2 = \mathrm{T}$, $q_1 = q_2 = q$. Dann wird nach (31):

$$(\mu - 1)\,\gamma = \frac{4\pi}{c} \cdot 2e\mathfrak{N} \frac{q}{\mathrm{T}} > 0\,.$$

Nach (21) ist aber, wenn wir a_h und b_h vernachlässigen:

$$\nu = \frac{\mathfrak{N}}{c} \frac{q}{\mathrm{T}} (\vartheta_1 - \vartheta_2)\,.$$

Das Vorzeichen von ν hängt also von der Differenz der beiden Dielektricitätsconstanten $\mathfrak{N}\vartheta_1$ und $\mathfrak{N}\vartheta_2$ ab.

In der That ergeben auch die Beobachtungen, dass der Character der Magnetisirbarkeit nicht auf den Sinn der magnetischen Drehung der Polarisationsebene schliessen lässt.

---

1) Auf diesen Punkt hat auch Reiff in seinem Buche: „Theorie molecularelektrischer Vorgänge“ 1896 aufmerksam gemacht. Der Reiff'sche Standpunkt unterscheidet sich dadurch von dem hier benutzten, dass er nicht rotirende Ionen, sondern drehbare Molecularmagnete voraussetzt, welche nicht mit elektrischer Ladung behaftet sind.

4. Die Dispersion der magnetischen Rotationspolarisation. Führt man die Wellenlänge $\lambda_0 = Tc$ der benutzten Lichtsorte im Vacuum ein, so schreibt sich (30'):

$$\delta = \frac{2\pi^2 \nu}{\lambda_0^2} \sqrt{\varepsilon'} \, z = \frac{2\pi^2 \nu n}{\lambda_0^2} z, \tag{33}$$

wobei $\sqrt{\varepsilon'} = n$ den Brechungsindex des (unmagnetisirten) Körpers bezeichnet.

Wenn man zunächst n als constant annimmt, was in roher Annäherung gestattet ist, so würde auch ν als constant anzusehen sein. Dann ist also δ umgekehrt proportional zu λ_0^2, analog wie bei der natürlichen Rotationspolarisation. Als rohe Annäherung kann man dies wirklich annehmen.

Schreibt man aber $\varepsilon' = n^2$ in der Form[1]) (es ist λ die Wellenlänge in Luft, anstatt λ_0 eingeführt):

$$n^2 = 1 + \frac{A_1}{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2} + \frac{A_2}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2} + \frac{A_3}{1 - \left(\frac{\lambda_3}{\lambda}\right)^2} + \cdot\cdot \tag{34}$$

so wird nach (21):

$$\nu = \frac{A_1'}{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2} + \frac{A_2'}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2} + \frac{A_3'}{1 - \left(\frac{\lambda_3}{\lambda}\right)^2} + \cdot\cdot \tag{35}$$

wobei die A_1', A_2', A_3' .. Constanten sind, welche unabhängig von den A_1, A_2, A_3 ... sind.

Die Anzahl der Constanten, welche in die Dispersionsformel der magnetischen Rotationspolarisation eingehen, hängt also von der Constantenanzahl ab, welche zur Darstellung der Dispersion des Brechungsindex n nothwendig sind, d. h. von der Anzahl der Eigenschwingungsperioden, welche zu berücksichtigen sind.

Innerhalb des sichtbaren Lichtes kommt man in den meisten Fällen damit aus, dass man eine ultraviolette Eigenschwingung λ_1 annimmt, und ausserdem noch beliebig viele ultraviolette Eigenschwingungen, deren λ_2, λ_3 etc. gegen λ zu vernachlässigen ist. Dann wird die Dispersionsformel (34):

$$n^2 = 1 + A_2 + A_3 + \cdot\cdot + \frac{A_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2}$$

$$= 1 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdot\cdot + \frac{A_1 \lambda_1^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2},$$

---

1) Vgl. Formel (19) auf S. 357. Diese Form gilt nur im Bereich der normalen Dispersion und falls keine Leitungsionen zu berücksichtigen sind.

oder

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_1^2}. \tag{36}$$

In diesem Falle muss sich nach (35) die Dispersionsformel für ν schreiben:

$$\nu = \frac{A_1'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + A_2' + A_3' + \ldots = a' + \frac{b'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2}, \tag{37}$$

d. h. die Dispersionsformel für die magnetische Drehung δ nach (33) in der Form, falls $2\pi^2 \varkappa = 1$ gesetzt wird:

$$\delta = n\left(\frac{a'}{\lambda^2} + \frac{b'}{\lambda^2 - \lambda_1^2}\right). \tag{38}$$

Dies ist eine zweiconstantige Dispersionsformel, da λ_1 aus der Dispersion des n zu entnehmen ist. Sie genügt in der That den Beobachtungen gut,[1]) wie folgende Tabellen lehren:

Schwefelkohlenstoff.

$\lambda_1 = 0{,}212\,\mu$, $\lambda_1^2 = 0{,}0450$,
$a = 2{,}516$, $b = 0{,}0433$,
$a' = -0{,}0136$, $b' = +0{,}1530$.

Spectr. Linie	n ber.	n beob.	δ ber.	δ beob.
A	1,6115	1,6118	—	—
B	1,6179	1,6181	—	—
C	1,6210	1,6214	0,592	0,592
D	1,6307	1,6308	0,762	0,760
E	1,6439	1,6438	0,999	1,000
F	1,6560	1,6555	1,232	1,234
G	1,6805	1,6800	1,704	1,704
H	1,7033	1,7032	—	—

1) Eine Zusammenstellung anderer, bisher vorgeschlagener, einconstantiger Dispersionsformeln hat Poincaré gegeben in der Ztschrft. L'éclairage électrique XI, S. 488, 1897. Diese Formeln stellen die Beobachtungen sämmtlich nicht befriedigend dar.

Creosot.

$\lambda_1 = 0{,}1845\,\mu.$ $\lambda_1^2 = 0{,}0340$,
$a = 2{,}2948$, $b = 0{,}0227$,
$a' = -0{,}1799$, $b' = +0{,}3140$.

Spectr. Linie	n ber.	n beob.	δ ber.	δ beob.
B	1,5319	1,5319	0,515	—
C	1,5336	1,5335	0,573	0,573
D	1,5386	1,5383	0,745	0,758
E	1,5454	1,5452	0,990	1,000
F	1,5515	1,5515	1,226	1,241
G	1,5636	1,5639	1,723	1,723
H	1,5744	1,5744	2,206	—

Wenn man, was das einfachste ist, die Vorstellung zu Grunde legt, dass eine positiv geladene und eine negativ geladene rotirende Ionenart vorhanden ist, so zeigt die Verschiedenheit des Vorzeichens von a' und b', dass diese Ionen in entgegengesetztem Sinne rotiren.

Die Dispersionsformeln (33), (34) und (35) zeigen, dass die Drehung δ sehr gross wird, wenn λ in der Nähe einer Eigenwellenlänge λ_1 liegt. Dieses Resultat ist in der That kürzlich von Macaluso und Korbino[1]) am Natriumdampf bestätigt worden. Indess werden ihre Beobachtungen nicht durch die hier entwickelte Theorie dargestellt. Wie nämlich die Dispersionsformel (38) ergiebt, und wie auch eine strengere Discussion zeigt, bei der die Reibungsglieder a/τ nicht vernachlässigt werden, besitzt die Drehung δ nach der Theorie ein verschiedenes Vorzeichen zu beiden Seiten des Absorptionsstreifens, d. h. für $\lambda \gtrless \lambda_1$. Nach den Beobachtungen ist aber das Vorzeichen von δ zu beiden Seiten des Absorptionsstreifens dasselbe.

Dies zeigt daher, dass für diesen Fall, d. h. wohl überhaupt für alle Gase und Dämpfe unser bisheriger Ansatz die Erscheinungen nicht darstellt. Zu diesem Schluss führt auch noch ein zweiter Umstand, der im folgenden Paragraphen behandelt wird.

5. Magnetisirung senkrecht zu den Lichtstrahlen. Als Magne-

1) Rend. d. R. Accad. d. Linc. (5) 7, S. 293, 1898.

tisirungsrichtung wählen wir die z-Axe, als die der Lichtstrahlen die x-Axe. Dann hängt alles nur von x und t ab, und es ist $\nu_x = \nu_y = 0$, $\nu_z = \nu$. In der letzten der Gleichungen (18) (S. 390) würde allein der Coefficient ν vorkommen, nämlich in der Verbindung $-\nu \frac{\partial X}{\partial x}$, doch dies Glied verschwindet, weil wegen der ersten der Gleichungen (19) $X = 0$ ist. Daher hat nach dem bisherigen Ansatz die Magnetisirung überhaupt keinen Einfluss auf das optische Verhalten, wenn die Lichtwellen sich senkrecht zur Magnetisirungsrichtung fortpflanzen. Andrerseits ist aber ein solcher Einfluss neuerdings bei Metalldämpfen nachgewiesen worden. Dies bildet eine zweite Ursache dafür, dass wir noch nach einer anderen Hypothese zur Darstellung der optischen Eigenschaften im Magnetfelde suchen.

Man könnte ja den bisherigen Ansatz dadurch erweitern, dass offenbar der magnetisirte Körper eine nicht isotrope Structur erhält durch gegenseitige Anziehung seiner Molecularströme in der Kraftlinienrichtung. Indess führt eine andere Hypothese directer und vollständiger zum Ziel. Auch diese stützt sich auf gewisse beobachtete Eigenschaften der Körper im Magnetfelde.

B. Hypothese des Halleffectes.

1. Allgemeine Grundlage. Wir lassen die Annahme rotirender Ionen fallen, benutzen aber wie früher die Vorstellung beweglicher Ionen. Ein starkes Magnetfeld muss nun deshalb besondere, auf die Ionen wirkende, ponderomotorische Kräfte ausüben, weil die bewegten Ionen elektrische Ströme repräsentiren und jedes Stromstück in einem Magnetfelde eine Kraft erfährt, welche senkrecht steht auf dem Stromstück und der Magnetisirungsrichtung. In Folge dessen suchen sich die Stromlinien in einem Magnetfelde seitlich zu verschieben gegen ihre Richtung. Diese Erscheinung ist als Halleffect thatsächlich bei allen Metallen, besonders bei Wismuth und Antimon, beobachtet worden.

Wenn ein Stromstück der Länge dl und der Stromstärke i_m (nach elektromagnetischem Maasse) senkrecht schneidet die Kraftlinien eines Magnetfeldes der Intensität $\mathfrak{H}$,[1]) so ist die pondero-

1) Wenn die Magnetisirungszahl μ des Raumes von 1 verschieden ist, so ist an Stelle von $\mathfrak{H}$ die Kraftliniendichte (die Induction) einzusetzen.

motorische Kraft $\mathfrak{K}$ auf das Stromelement:

$$\mathfrak{K} = i_m \, dl \, \mathfrak{H} = \frac{i}{c} \, dl \, \mathfrak{H}, \tag{39}$$

falls i die Stromstärke nach elektrostatischem Maasse ist. Bei der von uns (S. 244) festgesetzten Lage des Coordinatensystems geht R nach der x-Axe, wenn i nach der y-Axe und $\mathfrak{H}$ nach der z-Axe läuft.

Wenn nun ein Ion der Ladung e in der Zeit dt sich um $d\eta$ nach der y-Axe verschiebt, so ist auf der Länge $d\eta$ nach S. 354 eine Stromstärke $i = e\mathfrak{N}' \frac{\partial \eta}{\partial t}$ vorhanden, wobei $\mathfrak{N}'$ die Anzahl der Ionen pro Längeneinheit ist. Daher ist nach (39), da $dl = d\eta$ ist:

$$\mathfrak{K} = \frac{e}{c} \, \mathfrak{N}' d\eta \, \frac{\partial \eta}{\partial t} \, \mathfrak{H}.$$

Diese Kraft wirkt auf sämmtliche Ionen, die auf der Strecke $d\eta$ liegen. Ihre Anzahl ist $\mathfrak{N}' d\eta$. Die auf ein Ion wirkende Kraft nach der x-Axe ist also:

$$\mathfrak{K}_x = \frac{e}{c} \, \frac{\partial \eta}{\partial t} \, \mathfrak{H}_z. \tag{40}$$

Wenn noch eine Magnetisirung nach der y-Axe bestände, so käme durch die Verschiebung ζ noch die Kraft hinzu:

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{e}{c} \, \frac{\partial \zeta}{\partial t} \, \mathfrak{H}_y. \tag{41}$$

Diese beiden Terme (40) und (41) sind auf der rechten Seite der Bewegungsgleichungen (6) oder (7) (S. 389) der Ionen hinzu zu addiren. Nehmen wir nur isolirende, keine Leitungs-Ionen an, wie es bei allen Körpern mit kleiner elektrischer Leitfähigkeit gestattet ist, so folgt daher

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = eX - \frac{4\pi e^2}{\vartheta} \xi - re^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \mathfrak{H}_z - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \mathfrak{H}_y \right),$$

und durch cyklische Vertauschung der Buchstaben:

$$m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = eY - \frac{4\pi e^2}{\vartheta} \eta - re^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \mathfrak{H}_x - \frac{\partial \xi}{\partial t} \mathfrak{H}_z \right),$$

$$m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = eZ - \frac{4\pi e^2}{\vartheta} \zeta - re^2 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \mathfrak{H}_y - \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathfrak{H}_x \right). \tag{42}$$

2. Herleitung der Differentialgleichungen. Die Fundamentalgleichungen (3) der S. 387 bleiben, wie immer, unverändert.

Da wir keine rotirende Ionen voraussetzen, die Ionen daher bei ihrer Bewegung keine magnetischen Kraftlinien mit sich führen, so ist die Magnetisirungszahl $\mu = 1$ zu setzen, und es gilt die frühere Beziehung (cf. S. 249):

$$4\pi s_x = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad 4\pi s_y = \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad 4\pi s_z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \tag{43}$$

Ferner ist, wie früher (S. 354):

$$\begin{aligned} 4\pi j_x &= \frac{\partial}{\partial t}(X + 4\pi \Sigma e \mathfrak{N} \xi), \\ 4\pi j_y &= \frac{\partial}{\partial t}(Y + 4\pi \Sigma e \mathfrak{N} \eta), \\ 4\pi j_z &= \frac{\partial}{\partial t}(Z + 4\pi \Sigma e \mathfrak{N} \zeta). \end{aligned} \tag{44}$$

Die Gleichungen (3), (42), (43) und (44) enthalten die vollständige Theorie.[1])

Für periodische Zustandsänderungen und Benutzung der früheren Abkürzungen

$$\frac{r\vartheta}{4\pi} = a, \quad \frac{m\vartheta}{4\pi e^2} = b, \tag{45}$$

schreibt sich (42):

$$e\xi\left(1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2}\right) - \frac{i\vartheta}{4\pi c\tau}(\eta \mathfrak{H}_z - \zeta \mathfrak{H}_y) = \frac{\vartheta}{4\pi} X. \tag{46}$$

Legt man die z-Axe in die Richtung des Magnetfeldes, sodass $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_y = 0$, $\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}$ wird, und benutzt man die Abkürzungen:

$$1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2} = \Theta, \quad \frac{\vartheta}{4\pi e c \tau e}\mathfrak{H} = \Phi, \tag{47}$$

so wird nach (46):

$$\begin{aligned} e\xi \cdot \Theta - i \cdot e\eta \cdot \Phi &= \frac{\vartheta}{4\pi} X, \\ e\eta \cdot \Theta + i \cdot e\xi \cdot \Phi &= \frac{\vartheta}{4\pi} Y, \\ e\zeta \cdot \Theta \qquad\qquad &= \frac{\vartheta}{4\pi} Z. \end{aligned} \tag{48}$$

1) Die allgemeinste Theorie ist zu erhalten aus dem oben unter A benutzten Ansatz rotirender Ionen in Verbindung mit dem System (42). Letzteres System kann streng genommen überhaupt nie fehlen, sobald bewegliche Ionen vorhanden sind und ein äusseres starkes Magnetfeld. Der Einfachheit halber ist aber hier der Ansatz A völlig getrennt vom Ansatz B.

Dies kann man nach ξ, η, ζ auflösen und erhält:

$$
\begin{aligned}
4\pi e\xi(\Theta^2-\Phi^2) &= \vartheta(\Theta X+i\Phi Y),\\
4\pi e\eta(\Theta^2-\Phi^2) &= \vartheta(\Theta Y-i\Phi X),\\
4\pi e\zeta\cdot\Theta &= \vartheta Z.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Daher wird nach (44):

$$
\begin{aligned}
4\pi j_x &= \frac{\partial X}{\partial t}\left(1+\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}\Theta}{\Theta^2-\Phi^2}\right)+i\frac{\partial Y}{\partial t}\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}\Phi}{\Theta^2-\Phi^2},\\
4\pi j_y &= \frac{\partial Y}{\partial t}\left(1+\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}\Theta}{\Theta^2-\Phi^2}\right)-i\frac{\partial X}{\partial t}\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}\Phi}{\Theta^2-\Phi^2},\\
4\pi j_z &= \frac{\partial Z}{\partial t}\left(1+\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}}{\Theta}\right).
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Wir wollen dies abkürzen in:

$$
\begin{aligned}
4\pi j_x &= \varepsilon''\frac{\partial X}{\partial t}+i\nu\frac{\partial Y}{\partial t},\\
4\pi j_y &= \varepsilon''\frac{\partial Y}{\partial t}-i\nu\frac{\partial X}{\partial t},\\
4\pi j_z &= \varepsilon'\frac{\partial Z}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

3. Lichtstrahlen parallel zur Magnetisirung. In diesem Falle hängt alles nur von z und t ab, und die Gleichungen (3), (43) und (51) ergeben:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\left(\varepsilon''\frac{\partial X}{\partial t}+i\nu\frac{\partial Y}{\partial t}\right)=-\frac{\partial\beta}{\partial z},\quad \frac{1}{c}\left(\varepsilon''\frac{\partial Y}{\partial t}-i\nu\frac{\partial X}{\partial t}\right)=\frac{\partial\alpha}{\partial z},\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z},\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t}=-\frac{\partial X}{\partial z},\quad \gamma=Z=0.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Eliminirt man α und β, so folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon''}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}-\frac{i\nu}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2},\\
\frac{\varepsilon''}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}+\frac{i\nu}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Setzt man zur Integration wie oben S. 372 u. 392:

$$
X = M e^{\frac{i}{\tau}(t-pz)},\quad Y = N e^{\frac{i}{\tau}(t-pz)},
\tag{54}
$$

so ergiebt sich aus (53):

$$
\varepsilon'' M = p^2c^2M - i\nu N,\quad \varepsilon'' N = p^2c^2N + i\nu M,
$$

d. h. die zwei Werthsysteme:

$$p^2c^2 = n'^2(1 - i\varkappa')^2 = \varepsilon'' + \nu, \quad M = iN, \tag{55}$$
$$p^2c^2 = n''^2(1 - i\varkappa'')^2 = \varepsilon'' - \nu, \quad M = -iN.$$

n', $\varkappa'$ entsprechen der links-, n'', $\varkappa''$ der rechts-circularpolarisirten Welle. Aus der Bedeutung, welche ε'' und ν nach (50) und (51) haben, folgt:

$$n'^2(1 - i\varkappa')^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta\mathfrak{N}}{\Theta - \Phi}, \tag{56}$$
$$n''^2(1 - i\varkappa'')^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta\mathfrak{N}}{\Theta + \Phi}.$$

Ist τ nicht nahe bei einer Eigenschwingung, so kann man in Θ das imaginäre Glied $i\,a/\tau$ vernachlässigen, es ist daher $\varkappa' = \varkappa'' = 0$ und es wird, da Φ stets klein gegen 1, d. h. auch gegen Θ ist:

$$n'^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta\mathfrak{N}}{\Theta}\left(1 + \frac{\Phi}{\Theta}\right), \tag{57}$$
$$n''^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta\mathfrak{N}}{\Theta}\left(1 - \frac{\Phi}{\Theta}\right).$$

Die Drehung δ der Polarisationsebene folgt nach (19) (S. 374) zu:

$$\delta = z\frac{\pi}{\lambda_0}(n'' - n') = z\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{n''^2 - n'^2}{n'' + n'}. \tag{58}$$

Setzt man das Mittel aus n'' und n' gleich n, so folgt:

$$\delta = z\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{n''^2 - n'^2}{2n}. \tag{59}$$

Daher ist nach (57):

$$\delta = -\frac{\pi}{n}\cdot\frac{z}{\lambda_0}\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}\Phi}{\Theta^2}. \tag{60}$$

Dabei ist der Brechungsindex n bis auf erste Ordnung in Φ gegeben durch

$$n^2 = 1 + \sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}}{\Theta}. \tag{61}$$

4. Die Dispersion der magnetischen Drehung der Polarisationsebene. Durch Einführung der Werthe von Θ und Φ nach (47) schreiben sich die letzten Gleichungen

$$\delta = -\frac{\pi}{2n}\frac{z}{\lambda_0{}^2}\mathfrak{H}\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}}{\left(1 - \frac{b}{\tau^2}\right)^2}\cdot\frac{\vartheta}{e}, \tag{62}$$

$$n^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N}}{1 - \frac{b}{\tau^2}}. \tag{63}$$

In erster Annäherung ist daher, wie nach der Hypothese A, δ umgekehrt proportional zu λ_0^2.

Genügt (vgl. oben S. 396) zur Darstellung des n^2 die zweiconstantige Dispersionsformel:

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_1^2}, \tag{64}$$

(es ist anstatt λ_0 die Wellenlänge λ in Luft geschrieben), so muss sich nach (62) δ durch die zweiconstantige Dispersionsformel:

$$\delta = \frac{1}{n}\left(\frac{a'}{\lambda^2} + \frac{b\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2}\right) \tag{65}$$

darstellen lassen. a' und b' müssen verschiedene Vorzeichen besitzen, wenn nur zwei verschiedene Ionenarten, eine positiv- und eine negativ-geladene, vorhanden wären. Dies wäre die einfachste Annahme, die man machen kann.

Die Formel (65) stellt die Beobachtungen an Schwefelkohlenstoff und Kreosot in folgender Weise dar:

Schwefelkohlenstoff.

$\lambda_1^2 = 0{,}0450 \quad a' = +\,0{,}1167 \quad b' = +\,0{,}2379.$

Spektr. Linie	δ ber.	δ beob.
C	0,592	0,592
D	0,760	0,760
E	0,996	1,000
F	1,225	1,234
G	1,704	1,704

Kreosot.

$\lambda_1^2 = 0{,}0340 \quad a' = -\,0{,}070 \quad b' = +\,0{,}380.$

Spektr. Linie	δ ber.	δ beob.
C	0,573	0,573
D	0,744	0,758
E	0,987	1,000
F	1,222	1,241
G	1,723	1,723

Der Anschluss der Theorie an die Beobachtungen ist fast ebenso gut, ein wenig schlechter, als der nach der Hypothese der Molecularströme erzielte Anschluss (cf. oben S. 396).

5. Die Wellenlänge liegt nahe bei einer Eigenwellenlänge. Wenn die Lichtperiode nahe bei einer Eigenschwingung liegt, so darf der Reibungsterm a/τ nicht vernachlässigt werden. Wir wollen annehmen, dass T nahe benachbart sei der Eigenperiode T_1 der Ionengattung 1, und setzen daher $\tau = \sqrt{b_1}\,(1 + g) = \tau_1\,(1 + g)$, wobei g klein gegen 1 sein soll. In den Formeln (56) kann man dann, da Φ klein ist, bei allen Gliedern der Σ, welche sich nicht auf die Ionengattung 1 beziehen, setzen:

$$\frac{1}{\Theta - \Phi} = \frac{1}{1 - \frac{b}{\tau_1^2}}\left(1 + \frac{\Phi}{1 - \frac{b}{\tau_1^2}}\right). \tag{66}$$

sodass unter Benutzung der Abkürzungen:

$$1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N}}{1 - \frac{b}{\tau_1^2}} = A, \quad \sum \frac{\Phi \vartheta \mathfrak{N}}{\left(1 - \frac{b}{\tau_1^2}\right)^2} = A',$$
$$\frac{a_1}{\tau_1} = h, \quad \frac{\vartheta_1}{4\pi c \tau_1 e_1}\,\mathfrak{H} = \varphi, \quad \vartheta_1 \mathfrak{N}_1 = B; \tag{67}$$

aus (56) entsteht, wenn man nur auf erste Ordnung in g entwickelt und $g \cdot \varphi$ vernachlässigt gegen g oder φ:

$$n'^2\,(1 - i\varkappa')^2 = A + A' + \frac{B}{2g + ih - \varphi}, \tag{68}$$

$$n''^2\,(1 - i\varkappa'')^2 = A - A' + \frac{B}{2g + ih + \varphi}. \tag{69}$$

Der imaginäre Bestandtheil der rechten Seite von (68) wird möglichst gross, d. h. es tritt für eine links-circularpolarisirte Welle maximale Absorption ein, falls ist:

$$2g = + \varphi, \text{ d. h. } \tau^2 = \tau_l^2 = \tau_1^2\,(1 + \varphi), \tag{70}$$

für eine rechts-circularpolarisirte Welle tritt dagegen maximale Absorption auf bei

$$2g = - \varphi, \text{ d. h. } \tau^2 = \tau_r^2 = \tau_1^2\,(1 - \varphi). \tag{71}$$

Durch die Magnetisirung parallel den Lichtstrahlen

wird also bei einfallendem natürlichen Licht ein ursprünglich vorhandener schmaler Absorptionsstreifen verdoppelt. In dem einen Streifen ist links-circularpolarisirtes Licht stark absorbirt, sodass das durchgehende Licht geschwächt erscheint und rechts-circularpolarisirt ist, in dem anderen Absorptionsstreifen fehlt das rechts-circularpolarisirte Licht.

Dasselbe Resultat würde sich auch nach der Hypothese A der Molecularströme ergeben.

Wenn g nicht sehr klein und der absolute Betrag von $2g$ grösser als φ ist, sodass h neben $2g \pm \varphi$ zu vernachlässigen ist, so kann man in (68), (69) $\varkappa'$ und $\varkappa'' =$ Null setzen, vorausgesetzt, dass die rechten Seiten positiv sind. Man erhält also in einiger Entfernung vom Absorptionsstreifen:

$$n'^2 = A + A' + \frac{B}{2g - \varphi}, \quad n''^2 = A - A' + \frac{B}{2g + \varphi}.$$

[Damit die rechten Seiten stets positiv seien, muss der absolute Betrag von A den absoluten Betrag von $\frac{B}{2g \pm \varphi}$ übertreffen.] Nach Formel (59) auf S. 402 ergiebt sich die Drehung δ der Polarisationsebene:

$$\delta = -\frac{\pi}{n} \cdot \frac{\varkappa}{\lambda_0}\left(A' + B\,\frac{\varphi}{4g^2 - \varphi^2}\right),$$

wobei (72)

$$n = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{A + \frac{B}{2g - \varphi}} + \sqrt{A + \frac{B}{2g + \varphi}}\right).$$

Hiernach erscheint die Drehung δ zu beiden Seiten des Absorptionsgebietes ($\tau = \tau_1$) von gleichem Vorzeichen und nahezu symmetrisch vertheilt, da δ annähernd nur von g^2 abhängt. Dasselbe Resultat ergiebt sich aus der Dispersionsformel (62). Wenn δ positiv ist, so erfolgt nach S. 393 die Drehung im Sinne der (paramagnetischen) Ampère'schen Molecularströme. Da das Vorzeichen von δ durch den kleinen Term A' nicht bestimmt wird, sondern durch das viel bedeutendere Glied $B\varphi : 4g^2 - \varphi^2$, und da der absolute Betrag von $2g$ grösser als φ sein soll, da ferner B stets positiv ist, so hängt das Vorzeichen von δ nur von φ ab, d. h. der Ladung e_1. Bei positivem e_1, d. h. $\varphi > 0$, erfolgt daher δ entgegen den Molecularströmen, ferner ist $\tau_l > \tau_r$, d. h. diejenige Welle (l),

deren Erregungsbahn im Sinne der Molecularströme durchlaufen wird, wird bei einer langsameren Periode T maximal absorbirt, als die Welle (r), deren Erregungsbahn entgegen den Molecularströmen durchlaufen wird. — Bei negativem e_1 wird die Polarisationsebene im Sinne der Molecularströme gedreht. Es ist dann $\tau_l < \tau_r$, d. h. allgemein wird diejenige Welle, deren Erregungsbahn in demselben Sinne durchlaufen wird, wie die Rotation δ der Polarisationsebene erfolgt, bei einer kürzeren Periode maximal absorbirt, als die entgegengesetzt rotirende Welle.

Alle diese Folgerungen werden nun in der That am Natriumdampf bestätigt, wie weiter unten noch näher besprochen werden soll. Für beide Absorptionslinien des Dampfes (für beide D-Linien), welche derselbe im unmagnetischen Zustande zeigt, ergiebt sich das zugehörige e negativ. Die beiden D-Linien des Natriumdampfes werden also durch negativ-geladene Ionen verursacht.

Die Absorption an der Stelle $g = o$ kann gering sein, wenn φ gross gegen h ist. Dann wird nach (68), (69):

$$n'^2 = A + A' - \frac{B}{\varphi}, \quad n''^2 = A - A' + \frac{B}{\varphi}.$$

Die rechten Seiten müssen positiv sein, wenn diese Gleichungen Sinn haben sollen, d. h. der absolute Betrag von A muss grösser sein, als der von B/φ. Die Drehung δ der Polarisationsebene ist dann proportional zu

$$\delta \backsim \frac{n''^2 - n'^2}{2} = B/\varphi - A'. \tag{73}$$

δ ist daher gross, da φ klein ist. Bei positivem e_1 erfolgt δ im Sinne der Molecularströme, d. h. in entgegengesetztem Sinne, wie in der Nachbarschaft ausserhalb des Absorptionsgebietes. Trotzdem brauchen keine Nullstellen für δ zu existiren, denn an den Stellen starker, aber verschiedener Absorption $n'\varkappa'$ und $n''\varkappa''$ hat es überhaupt keinen Sinn, von der Drehung δ der Polarisationsebene zu sprechen.

6. Lichtstrahlen senkrecht zur Magnetisirung. Als Richtung der Magnetisirung wählen wir die z-Axe, als Richtung der Wellennormale die x-Axe. Dann hängt Alles nur von x und t ab, und die Gleichungen (3), (43) und (51) ergeben:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon'' \frac{\partial X}{\partial t} + i\nu \frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \\
\frac{1}{c}\left(\varepsilon'' \frac{\partial Y}{\partial t} - i\nu \frac{\partial X}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\
\frac{\varepsilon'}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x}, \\
\alpha = 0, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.
\end{gathered} \tag{74}
$$

Eliminirt man β und γ, so folgt:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon'' X + i\nu Y = 0, \\
\frac{\varepsilon''}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + i \frac{\nu}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \\
\frac{\varepsilon'}{c^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}.
\end{gathered} \tag{75}
$$

Die beiden ersten Gleichungen ergeben durch Elimination von X:

$$
\left(\varepsilon'' - \frac{\nu^2}{\varepsilon''}\right) \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}. \tag{76}
$$

Setzt man zur Integration:

$$
X = M \, . \, e^{\frac{i}{\tau}(t - p'x)}, \quad Y = N e^{\frac{i}{\tau}(t - p'x)}, \quad Z = \Pi e^{\frac{i}{\tau}(t - px)},
$$

so folgt aus (75) und (76):

$$
\varepsilon'' - \frac{\nu^2}{\varepsilon''} = p'^2 c^2, \quad \varepsilon' = p^2 c^2, \quad M = -\frac{i\nu}{\varepsilon''} N. \tag{77}
$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Z und Y sind also verschieden, d. h. der Körper verhält sich wie ein doppelbrechendes Medium. Für Z, d. h. für eine senkrecht zur Magnetisirung polarisirte Welle, ergiebt sich Brechungsindex und Absorptionsindex aus

$$
p^2 c^2 = n^2 (1 - i\varkappa)^2 = \varepsilon' = 1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N}}{\Theta}, \tag{78}
$$

für die parallel zur Magnetisirung polarisirte Welle folgt

$$
n'^2 (1 - i\varkappa')^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N} \Theta}{\Theta^2 - \Phi^2} - \frac{\left(\sum \frac{\vartheta \mathfrak{N} \Phi}{\Theta^2 - \Phi^2}\right)^2}{1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N} \Theta}{\Theta^2 - \Phi^2}}. \tag{79}
$$

Der Unterschied von n' und n ist im Allgemeinen sehr klein, da er, wenn Θ nicht sehr klein wird, erst von zweiter Ordnung in Φ wird. Daher kann diese magnetische Doppelbrechung erst bemerklich werden in der Nähe einer Eigenwellenlänge, da dann Θ sehr klein ist.

7. Die Wellenlänge liegt nahe bei einer Eigenwellenlänge. Wir setzen wie früher $\tau = \tau_1 (1 + g) = \sqrt{b_1} (1 + g)$, und nehmen g als klein gegen 1 an.

Dann ist in jedem Gliede unter dem Summenzeichen, abgesehen von dem sich auf die Ionengattung 1 beziehenden Gliede, Θ als reelle Grösse zu betrachten, welche nicht sehr klein ist. Φ^2 ist dann neben Θ^2 zu vernachlässigen.

Verwendet man daher die Abkürzungen (67) der S. 404, so wird:

$$n'^2 (1 - i\varkappa')^2 = A + \frac{B}{(2g + ih)^2 - \varphi^2} \cdot \left\{2g + ih - \frac{B\varphi^2}{[(2g + ih)^2 - \varphi^2] A + (2g + ih) B}\right\}$$

oder

$$n'^2 (1 - i\varkappa')^2 = A + \frac{B[(2g + ih) A + B]}{A[(2g + ih)^2 - \varphi^2] + B(2g + ih)}. \tag{80}$$

Bei einem Metalldampf ist nun der Brechungsindex stets sehr nahe gleich 1, selbst wenn g ziemlich klein ist. Daraus schliesst man (vgl. z. B. die Formeln für n^2 auf S. 405), dass A nahezu gleich 1 und B sehr klein sein muss, sodass man im zweiten Gliede der rechten Seite von (80), welches den kleinen Factor B enthält, B gegen A vernachlässigen kann. Man erhält dadurch

$$n'^2 (1 - i\varkappa')^2 = A + \frac{B(2g + ih)}{(2g + ih)^2 - \varphi^2}. \tag{81}$$

Der imaginäre Bestandtheil, d. h. die Absorption, wird daher, falls h sehr klein ist, möglichst gross, wenn ist:

$$4g^2 - \varphi^2 = 0, \quad \text{d. h. } 2g = \pm\varphi. \tag{82}$$

Für die parallel zur Magnetisirung polarisirte Welle sind daher zwei Absorptionsstreifen vorhanden, welche zu beiden Seiten des in unmagnetischem Zustande vorhandenen Absorptionsstreifens liegen.

Für die senkrecht zur Magnetisirung polarisirte Welle folgt aus (78):

$$n^2 (1 - i\varkappa)^2 = A + \frac{B}{2g + ih}. \tag{83}$$

Die maximale Absorption liegt an der Stelle $g = 0$. Für die senkrecht zur Magnetisirung polarisirte Welle ändert sich also die Absorption nicht durch die Magnetisirung.

Wenn $2g$ gross gegen h und gegen φ ist, so wird $\varkappa$ und $\varkappa'$ sehr klein und näherungsweise ist:

$$n'^2 = A + \frac{B}{2g} \cdot \frac{A \cdot 4g^2 + B \cdot 2g}{A(4g^2 - \varphi^2) + B \cdot 2g}, \quad n^2 = A + \frac{B}{2g},$$

daher

$$n'^2 - n^2 = \frac{B}{2g} \cdot \frac{A\varphi^2}{4g^2 n^2 - A\varphi^2},$$

oder da $4g^2$ gross gegen φ^2 sein soll, so ist annähernd

$$n' - n = \frac{A B \varphi^2}{16\, n^3 g^3}, \tag{84}$$

d. h. positiv oder negativ je nach dem Vorzeichen von g, aber unabhängig von der Magnetisirungsrichtung und dem Vorzeichen von φ. Dieses Gesetz der magnetischen Doppelbrechung haben in der That Voigt und Wiechert am Natriumdampf zu bestätigen vermocht.[1])

8. Der Zeemann-Effect. Zeemann[2]) hat beobachtet, dass eine schmale Emissionslinie eines Metalldampfes, z. B. von Natrium oder Kadmium, in zwei bezw. drei Linien (Doublet bezw. Triplet) sehr nahe benachbarter Perioden zerfällt, wenn der Metalldampf magnetisirt wird. Das Doublet tritt ein für die Emissionsrichtung, die mit der Richtung der magnetischen Kraftlinien zusammenfällt, das Triplet für dazu senkrechte Emissionsrichtungen. Diese Erscheinungen werden durch unsere bisherigen Ueberlegungen theoretisch erklärt,[3]) wenn man den (später zu besprechenden) Satz heranzieht, dass die Emissionslinien eines Gases bei denselben

1) Ueber das Nähere dieses Versuches vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 67, S. 360, 1899.

2) P. Zeemann, Phil. Mag. (5) 43, S. 226, 44, S. 255, 1897.

3) Diese Art der Erklärung des Zeemann-Effectes rührt von W. Voigt (Wied. Ann. 67, S. 345, 1899) her. Die Differentialgleichungen, von denen Voigt ausgeht, sind dieselben, wie die hier im § 2 hergeleiteten, nur enthält sich Voigt einer physikalischen Deutung der Coefficienten dieser Differentialgleichungen.

Perioden liegen, wie die Absorptionsstreifen.[1]) Nach den angestellten Ueberlegungen müssen dann die beiden Einzellinien des Doublets rechts- und links-circularpolarisirt sein, während im Triplet die mittlere Linie senkrecht zur Magnetisirung polarisirt sein muss, die beiden äusseren Linien aber parallel zur Magnetisirung. Diese Folgerungen werden thatsächlich durch den Versuch bestätigt. — Aus der Messung der beiden Triplets, in welche die beiden Natriumlinien (D_1 und D_2) zerfallen, hat Zeemann in einem Magnetfelde der Stärke $\mathfrak{H} = 22400$ absolute Einheiten als Distanz $2g$ der beiden äusseren Linien eines Triplets den Zahlenwerth $2g = 2 : 17800$ erhalten. Nun ist nach (82) und (67)

$$2g = \varphi = \frac{\vartheta_1 \mathfrak{H}}{2\pi c \tau_1 e_1},$$

oder da $\tau_1 = \sqrt{b_1}$ ist und folglich nach (45) (S. 400) $\vartheta_1 = 4\pi\tau_1^2 e_1^2 : m_1$ ist, so folgt

$$(85) \qquad 2g = \varphi = \mathfrak{H}\tau_1 \frac{e_1}{c\, m_1} = \frac{\mathfrak{H}\, T_1}{2\pi} \cdot \frac{e_1}{c\, m_1}.$$

Setzt man hierin die Werthe für $2g$, $\mathfrak{H}$ und T_1 (Periode des Natriumlichtes) ein, so findet man:

$$\frac{e_1}{c\, m_1} = 1{,}6 \cdot 10^7.$$

Diese Zahl bedeutet das Verhältniss der elektromagnetisch gemessenen elektrischen Ladung eines Ions zu seiner (eventuell nur scheinbaren [cf. S. 353, Anm.]) Masse. — Aus Beobachtung einer Kadmiumlinie ($\lambda = 0{,}48\,\mu$) ergab sich jenes Verhältniss zu $2{,}4 \cdot 10^7$.[2])

1) Dieser Satz ergiebt sich einerseits experimentell, andererseits folgt er bei reiner Temperaturstrahlung aus dem Kirchhoff'schen Satze über Proportionalität von Emissions- und Absorptionsvermögen. Reine Temperaturstrahlung scheint nun allerdings bei den in der Bunsenflamme leuchtenden Metalldämpfen nicht vorzuliegen (vgl. dazu den III. Abschnitt), indess auch bei Luminiscenzleuchten ergeben die theoretischen Vorstellungen, dass die Emissions- und Absorptionslinien zusammenfallen müssen.

2) Es ist merkwürdig, dass aus der magnetischen Ablenkung der Kathodenstrahlen Kaufmann (Wied. Ann. 65, S. 439, 1898) eine nahezu gleiche Zahl ($1{,}86 \cdot 10^7$) abgeleitet hat für das Verhältniss der Ladung eines von der Kathode fortgeschleuderten Theilchens zu seiner Masse. — Für die bei der Elektrolyse auftretenden Ionen ist dies Verhältniss viel kleiner, z. B. $9{,}5 \cdot 10^3$ bei Wasserstoff, $4{,}1 \cdot 10^2$ bei Natrium. Man kann sich daher entweder denken, dass ein

Durch genauere Untersuchung mit Hülfe der oben S. 211 beschriebenen Methode der hohen Interferenzen hat schon Michelson[1]) gefunden, dass meist eine complicirtere magnetische Zerfällung der Emissionslinien als in Doublets bezw. Triplets eintritt. Es ist dies schon allemal dann zu erwarten, falls die Untersuchungsmethode, wie bei dem Michelson'schen Apparate, bis zu einer solchen Feinheit getrieben wird, dass die Emissionslinien auch ausserhalb des Magnetfeldes einen gewissen complicirteren Bau aufweisen, als er in den bisherigen theoretischen Annahmen enthalten ist, z. B. wenn eine Emissionslinie zwei nahe benachbarte Maxima der Emission aufweist. Ausserdem ist auch eine theoretische Erweiterung der Bewegungsgleichung (46) der Ionen möglich, wenn man nämlich den Einfluss der Bewegung benachbarter Ionen berücksichtigen würde. Es würden dann in jener Gleichung noch zweite Differentialquotienten der elektrischen Kraft nach den Coordinaten auftreten und dadurch würde eine complicirtere magnetische Zerfällung der Absorptions-, d. h. auch der Emissionslinien folgen.[2])

Der directe Nachweis der Zeemann-Effecte erfordert ein sehr stark auflösendes Gitter oder Prisma. Bequemer ist daher eine von W. König[3]) beschriebene Versuchsanordnung, nach der eine im Magnetfelde befindliche Natriumflamme durch eine andere, ausserhalb des Magnetfeldes befindliche Flamme betrachtet wird. Blickt man senkrecht zur Magnetisirung, so erscheint die erste Flamme hell und zwar polarisirt. Wegen des Kirchhoff'schen Satzes von der Gleichheit von Emission und Absorption müssen

---

elektrolytisches Ion noch mehrere positiv und negativ geladene Bestandtheile enthält, die für die Elektrolyse als starr verbunden gelten, für Lichtschwingungen aber und in hohem Vacuum frei beweglich werden, oder dass das elektrolytische Ion aus einer Verbindung einer Ladung e_1 der Masse m_1 (Elektron) mit einer grösseren ungeladenen Masse M besteht. Bei langsamen Wechseln der elektrischen Kraft oder in constanten Strömen haftet das Elektron fest an der Masse M. Bei sehr schnellen Wechseln aber, wie bei Lichtschwingungen, wird nur das Elektron bewegt. Ebenso trennt sich in hohem Vacuum das Elektron von der Masse M.

1) Vgl. Phil. Mag. 45, S. 348. — Astrophys. Journ. 7, S. 131; 8, S. 37, 1898. — Wied. Beibl. 1898, S. 797.

2) In anderer Weise erklärt Voigt (Wied. Ann. 68, S. 352) die anomalen Zeemann-Effecte, nämlich durch longitudinale magnetische Effecte. Indess fehlt bisher die physikalische Vorstellbarkeit hierfür.

3) Wied. Ann. 63, S. 268, 1897.

nämlich nur diejenigen Schwingungen der magnetisirten Natriumflamme durch die unmagnetisirte Natriumflamme absorbirt werden, deren Periode im Magnetfeld dieselbe ist, wie ausserhalb des Magnetfeldes. Vielleicht ist auch in dieser Weise (durch Absorption im Flammenmantel bei nicht völlig homogenem Magnetfeld) die von Egoroff und Georgiewsky[1]) beobachtete Erscheinung zu erklären, dass eine Natriumflamme im Magnetfelde partiell polarisirtes Licht aussendet senkrecht zur Magnetisirungsrichtung. Aber auch in völlig homogenem Magnetfelde wäre diese Erscheinung theoretisch zu erklären, da die gesammte Absorption $n'\varkappa'$ für die nach der Magnetisirungsrichtung polarisirten Wellen, nach Formel (80) für alle möglichen Werthe von g berechnet, sich etwas verschieden ergiebt von der gesammten Absorption $n\varkappa$ der senkrecht zur Magnetisirung polarisirten Wellen, wie sie aus (83) für alle möglichen Werthe von g gefunden wird.[2])

9. Die magneto-optischen Eigenschaften von Eisen, Nickel, Kobalt. Haben wir im Vorigen gesehen, dass bei Metalldämpfen die Vorstellung der Molecularströme nicht zu einer befriedigenden Darstellung der Erscheinungen führt, so muss man zur Erklärung der magneto-optischen Eigenschaften der stark magnetisirbaren Metalle an dieser Vorstellung festhalten. Am einfachsten wird dies dadurch bewiesen, dass in diesen Metallen die magneto-optischen Effecte proportional zur Magnetisirung des Metalls sind,[3]) daher auch einen endlichen Grenzwerth (bei Magnetisirung des Metalls bis zur Sättigung) erreichen, auch wenn das äussere Magnetfeld weiter gesteigert wird. Die Benutzung des Halleffectes würde dagegen einen solchen Grenzwerth nicht ergeben,[4]) da die

1) Compt. rend. 127, S. 748, 949, 1897.

2) Voigt (Wied. Ann. 69, S. 290, 1899) erhält die von Egoroff und Georgiewsky beobachtete Erscheinung, sowie wechselnde Intensitätsverhältnisse beim Zeemann-Effect durch die Annahme, dass die Reibungscoefficienten r in den Ausgangsgleichungen (42) der S. 399 von der Stärke des Magnetfeldes abhängen sollen und zwar je nach der Richtung der Schwingungen in verschiedener Weise. — Für diese Annahme fehlt allerdings zunächst die Möglichkeit einer einfachen und plausibeln physikalischen Herleitung.

3) Dies ist durch Versuche von Kundt (Wied. Ann. 27, S. 191, 1886) und H. E. I. G. du Bois (Wied. Ann. 39, S. 25, 1890) bewiesen.

4) Dies sowie verschiedene Gestalt der Dispersionsgesetze würde der einzige Unterschied zwischen beiden Theorien sein, sonst wären sie formal identisch, falls man nach der Halleffect-Hypothese nur bis auf erste Ordnung in den magneto-optischen Zusatzgliedern entwickelt, was allemal gestattet ist, da bei Metallen keine schmalen Absorptionslinien vorkommen.

magneto-optischen Effecte proportional zur magnetischen Induction im Körper sein müssen, d. h. proportional zur Dichte der gesammten magnetischen Kraftlinien. Streng genommen kann nun allerdings der Halleffect auch bei vorhandenen Molecularströmen nie ganz fehlen,[1]) indess zeigen die Erscheinungen, dass bei Eisen, Nickel, Kobalt der Einfluss der Molecularströme jedenfalls bedeutend den Einfluss des Halleffectes überwiegt, und daher wollen wir zur Einfachheit die Halleffect-Glieder jetzt gar nicht benutzen.

a) Durchgehendes Licht. Lassen wir ebene Wellen senkrecht durch eine dünne Eisenschicht fallen, welche normal zu ihrer Fläche magnetisirt ist, so gelten die Formeln des § 3, S. 391. Bezeichnen wir mit n und $\varkappa$ Brechungsindex und Absorptionsindex des unmagnetisirten Metalls, ferner mit n' und $\varkappa'$ die betreffenden Grössen für die links-circularpolarisirte Welle im magnetisirten Metall, mit n'' und $\varkappa''$ für die rechts-circularpolarisirte Welle, so ist nach (28) und (29) auf S. 392, 393 bei Entwickelung bis auf erste Ordnung in ν:

$$
\begin{aligned}
p'c &= n'(1 - i\varkappa') = \sqrt{\varepsilon'}\left(1 - \frac{\nu}{2c\tau}\right), \\
p''c &= n''(1 - i\varkappa'') = \sqrt{\varepsilon'}\left(1 + \frac{\nu}{2c\tau}\right), \qquad (86) \\
& n(1 - i\varkappa) = \sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Bringt man ν in die Form

$$\nu = a + bi, \qquad (87)$$

wobei a und b reell sind, so wird

$$n'' - n' = \frac{n}{c\tau}(a + b\varkappa), \; n''\varkappa'' - n'\varkappa' = \frac{n}{c\tau}(a\varkappa - b). \qquad (88)$$

Die letzte Formel besagt, dass rechts- und links-circularpolarisirtes Licht in verschiedener Weise absorbirt wird, die erste Formel ergiebt, falls $n''\varkappa''$ und $n'\varkappa'$ nur wenig von einander verschieden sind, sodass das austretende Licht näherungsweise linearpolarisirt bleibt, die Drehung δ der Polarisationsebene linearpolarisirten Lichtes[2]) gemäss Formel (19') auf S. 374 zu:

1) Vgl. die Anm. 1 auf S. 400.

2) Man kann von derselben nur sprechen, falls $n''\varkappa''$ und $n'\varkappa'$ nur wenig von einander verschieden sind, sodass das austretende Licht näherungsweise linearpolarisirt bleibt.

(89) $$\delta = \frac{x}{2c\tau}(n'' - n') = 2\,\frac{\pi^2}{\lambda_0^2}\,x\,n\,(a + bx),$$

wobei $\lambda_0 = cT = 2\pi c\tau$ gesetzt ist.

Die Metallschichten müssen sehr dünn sein (Bruchtheile von λ_0), damit sie überhaupt noch durchsichtig sind. Trotzdem werden merkliche Drehungen δ beobachtet, z. B. bei $x = 0{,}332\,\lambda_0$ beträgt bei Eisen, welches zur Sättigung magnetisirt ist, für rothes Licht ($\lambda_0 = 0{,}00064$ mm) $\delta = 4{,}25^0$. Daraus würde für eine Eisenschicht von 1 cm Dicke der enorme Betrag $\delta = 200000^0$ folgen! Nach diesen Beobachtungen und der Formel (89) folgt daher bei rothem Licht, wenn man als Längeneinheit das Centimeter wählt, für Eisen, das bis zur Sättigung magnetisirt ist:

(90) $$n\,(a + bx) = 0{,}758 \cdot 10^{-6}.$$

Das Vorzeichen von $a + bx$ ist positiv, da die Drehung δ im Sinne der paramagnetischen Molecularströme erfolgt (cf. S. 393).

Die Abhängigkeit der Drehung δ von der Periode τ oder Wellenlänge λ_0 ergiebt sich aus den Formeln (20), (21) der S. 391, sowie nach (87) und (89). Auffallend ist, dass δ mit abnehmenden λ_0 abnimmt.[1] Auf Grund der Formel (89) wird dies Verhalten dadurch wahrscheinlich gemacht, das n und nx thatsächlich mit abnehmendem λ_0 stark abnehmen, während aus (21) folgt, dass a und b ebenfalls mit abnehmendem λ_0 abnehmen, wenn nur eine Gattung Leitungsionen besonders wirksam ist für den magnetooptischen Effect.

b) Reflectirtes Licht (Kerr'sches Phänomen). Um die Eigenschaften des an einem Magnetspiegel reflectirten Lichtes berechnen zu können, müssen die Grenzbedingungen an der Oberfläche des Spiegels aufgestellt werden. Man kann dieselben aus den Differentialgleichungen (18) und (19) (S. 390) herleiten aus der Ueberlegung, dass die Oberfläche des Spiegels streng genommen eine sehr dünne inhomogene Uebergangsschicht ist, in welcher ebenfalls (cf. S. 391) noch jene Differentialgleichungen gelten.

Wenn die Oberfläche zur xy-Ebene genommen wird, so ergiebt sich dann nach dem schon oben S. 251 angewandten Schlussverfahren als Grenzbedingungen:

---

1) Vgl. darüber die Beobachtungen von Lobach, Wied. Ann. 39, S. 347, 1890.

Stetigkeit von:

$$\alpha,\ \beta,\ X - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nu_y Z - \nu_z Y),\quad Y - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nu_z X - \nu_x Z). \tag{91}$$

Es ergiebt sich auf diesem Wege[1]) das von Kerr entdeckte Phänomen,[2]) dass die Polarisationsebene linearpolarisirt einfallenden Lichtes, wenn dieselbe ursprünglich in oder senkrecht zur Einfallsebene lag, nach der Reflexion um einen kleinen Winkel aus ihrer Lage herausgedreht ist. Dies kann nur eine besondere Wirkung der Magnetisirung sein, da ohne dieselbe aus Symmetriegründen ein solches Verhalten unmöglich wäre.

10. Die Wirkungen des magnetischen Feldes der Lichtstrahlen. Im Vorigen haben wir gesehen, dass ein äusseres kräftiges Magnetfeld eine Aenderung der optischen Eigenschaften eines Körpers hervorbringt. Es ist nun die Frage, ob nicht bei genauer Beobachtung auch schon bei Fehlen eines äusseren kräftigen Magnetfeldes eine Wirkung des magnetischen Feldes der Lichtstrahlen zu constatiren ist.

Wenn man zunächst nur die Halleffect-Glieder in Ansatz bringt, d. h. etwa vorhandene Molecularströme (rotirende Ionen) nicht voraussetzt, so hat man die Gleichungen zu benutzen (cf. oben S. 400):

$$\frac{4\pi j_x}{c} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \text{ etc. } \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \tag{92}$$

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi \Sigma e \mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{93}$$

$$4\pi e\xi = \frac{\vartheta}{\Theta}\left(X + \frac{1}{c}\left[\gamma \frac{\partial \eta}{\partial t} - \beta \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right]\right), \tag{94}$$

falls

$$\Theta = 1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2}. \tag{95}$$

1) Diesen Weg habe ich durchgeführt in Wied. Ann. 46, S. 353, 1892. Die dort auftretende magneto-optische Constante b, die dort als reell vorausgesetzt wurde, ist als complex anzunehmen, weil nach der hier auf S. 391 gegebenen Formel (21) ν complex ist. Dadurch wird die Theorie in ihren Resultaten identisch mit der von Goldhammer in Wied. Ann. 46, S. 71, 1892 gegebenen. Die Theorie stellt fast alle, zum Theil recht complicirten Einzelheiten der Beobachtungen befriedigend dar. Ueber den Einfluss von Oberflächenschichten auf diese Erscheinungen vgl. J. Micheli, Dissertation, Leipzig, 1900; Ann. d. Phys. 1, 1900.

2) Kerr, Phil. Mag. (5) 3, S. 321, 1877; 5, S. 161, 1878.

Die Gleichung (94) ist characteristisch für unser Problem. Diese zeigt, da η und ζ annähernd proportional zu Y und Z sind, dass die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes nicht mehr linear in den Grössen $X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$ bleiben, was zur Folge hat, dass die optischen Eigenschaften von der Intensität des Lichtes abhängen müssten. Ein solches Verhalten ist nun bisher nie beobachtet worden, und man kann auch leicht taxiren, dass die Zusatzglieder in (94), welche die Abweichung von der bisher benutzten Gleichung

$$4\pi e \xi = \frac{\vartheta}{\Theta} X$$

darstellen, einen zu kleinen Effect haben müssen, als dass er beobachtbar sein könnte. Es handelt sich in (94), da die magnetische Kraft α, β, γ in den Lichtwellen gleich oder wenigstens von der Grössenordnung der elektrischen Kraft X, Y, Z ist, um Taxirung der Grössen $\frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{1}{c}\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, d. h. es handelt sich um das Verhältniss der Geschwindigkeit der Ionen zu der Lichtgeschwindigkeit. Nun ist näherungsweise nach (94):

$$\xi = \frac{\vartheta}{4\pi e \Theta} X,$$

d. h. für

$$X = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)$$

wird

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{2\pi}{cT} \cdot \frac{\vartheta}{4\pi e \Theta} A \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right). \tag{96}$$

Nun ist aber die Eigenschwingungsdauer T_0 des Ions nach S. 400 in folgender Weise bestimmt: Es ist

$$\tau_0^2 = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 = b = \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{\vartheta}{4\pi e} = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \cdot \frac{e}{m}. \tag{97}$$

Setzt man diesen Werth in (96) ein, so wird der grösste Werth, den $\frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t}$ im Laufe der Zeit annehmen kann:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{T_0^2}{2\pi T \Theta} \cdot \frac{e}{mc} A.$$

Setzt man nun hierin $\Theta = 1 - T^2/T^2$, was bei durchsichtigen Körpern gestattet ist, falls nicht T nahezu gleich T_0 ist, so folgt:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{e}{mc} \cdot \frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2} \cdot A. \tag{98}$$

$e : mc$ ist bei Natriumdampf gleich $1{,}6 \cdot 10^7$ (cf. S. 410). Diese Grössenordnung wollen wir hierfür festhalten. Ferner ist beim sichtbaren Licht etwa $T = 2 \cdot 10^{-15}$. Daher schreibt sich (98):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t} = A \cdot \frac{T_0}{T^2 - T_0^2} \cdot 5 \cdot 10^{-9}. \tag{99}$$

Man muss nun vor Allem A taxiren können, d. h. die Feldstärke in einem intensiven Lichtstrahl. Die Sonne sendet pro Secunde etwa 124 Kilogrammmeter Energie in ein Quadratmeter, d. h. $1{,}22 \cdot 10^6$ absolute Einheiten (*erg*) in die Flächeneinheit (cm^2). Nach der oben S. 253 abgeleiteten Formel (25) berechnet sich aber[1]) für ebene Wellen natürlichen Lichtes der Amplitude A der Energiefluss dE pro Zeiteinheit (1 sec) und Flächeneinheit (1 cm^2) in Luft (oder Vacuum):

$$dE \text{ (in 1 sec auf 1 cm}^2) = \frac{c}{4\pi} A^2. \tag{100}$$

Daraus berechnet sich, wenn man die halbe Energie der Sonnenstrahlung dem sichtbaren Lichte zuschreibt,[2]) für Sonnenlicht die maximale elektrische Feldstärke:

$$A = \sqrt{\frac{4\pi}{c} \cdot 0{,}61 \cdot 10^3} = 1{,}6 \cdot 10^{-2} = 0{,}016.\,^{3)} \tag{101}$$

1) Unabhängig von dieser Poynting'schen Formel kann man das Resultat (100) so ableiten: Durch 1 cm^2 muss in der Zeiteinheit diejenige elektromagnetische Energie hindurchtreten, welche enthalten ist in einem Raume von V cm^3, wo V die Lichtgeschwindigkeit ist. In Luft (Vacuum) ist $V = c$ zu setzen. Ferner ist nach S. 252 die elektromagnetische Energie der Volumeneinheit Luft bei natürlichem Licht gleich $A^2 : 4\pi$, daher ist $dE = c \,.\, A^2 : 4\pi$.

2) In Wirklichkeit ist dies Verhältniss sogar nur $1/3$.

3) Den gleichen Werth hat die maximale magnetische Feldstärke. Diese würde daher etwa der 12. Theil der Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus in Deutschland sein.

Folglich wird bei intensiver (Sonnen-)Beleuchtung:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t} = 8 \cdot 10^{-11} \frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2} \,. \tag{102}$$

Dieser Ausdruck ist also immer sehr klein, falls nicht T unmittelbar dem T_0 benachbart ist. Aber selbst wenn z. B. $T:T_0 = 60:59$ wäre (Natriumdampf belichtet mit der Wellenlänge $\lambda = 0{,}0006$ mm), so würde $T_0^2 : T^2 - T_0^2 = 30$ sein, und trotzdem wäre der Werth von (102) sehr klein.

Wenn man nun nach dem Ansatz (94) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen berechnet, so ist dieselbe, wie leicht zu ersehen ist, erst in zweiter Ordnung von den magnetischen Zusatzgliedern abhängig, d. h. es würde sich um Aenderungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V des Lichtes im Betrage von 10^{-20}. V handeln, wenn man die Intensität der Beleuchtung steigert bis zur Beleuchtung mit Sonnenlicht. Wir können daher schliessen, dass ein beobachtbarer magneto-optischer Effect des Magnetfeldes der Lichtstrahlen selbst nicht besteht. Es könnte höchstens der Fall in Frage kommen, dass die Periode des einfallenden Lichtes fast vollständig zusammenfällt mit einer Eigenschwingungsperiode (Natriumdampf belichtet mit Natriumlicht). Die dann eintretende Absorption wird aber eine genaue Prüfung, ob in diesem Falle der Brechungsindex von der Intensität der Beleuchtung abhängt, nicht zulassen.

Setzen wir jetzt Molecularströme (rotirende Ionen) voraus, so sind die Formeln (3), (4), (5) der S. 389 u. ff. zu benutzen. Wenn nur eine Gattung rotirender Ionen zu berücksichtigen wäre, so wäre nach S. 394, Formel (31), die Kraftliniendichte der Molecularströme: $\gamma_1 = (\mu - 1)\,\gamma$ zu setzen, wo μ die Magnetisirungsconstante des Körpers ist. Es ist dabei vorausgesetzt, dass die Magnetisirung des Körpers momentan den schnellen Wechseln von γ folgen kann. Sollte dies nicht der Fall sein, so müsste μ kleiner angenommen werden, als es bei constantem Magnetfeld beobachtet wird. Daher werden z. B. die Formeln (3) und (4) die Gestalt besitzen:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha + (\mu - 1)\,\gamma\,\frac{\partial \xi}{\partial x} + \cdots\right) = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \,. \tag{103}$$

Nun ist $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ von derselben Grössenordnung, wie $\frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t}$ (im Vacuum sind beide Grössen gleich). Daher sind auch in (103) die

magneto-optischen Zusatzglieder, selbst wenn $\mu - 1$, wie beim Eisen, den Werth 1000 besitzen sollte, sehr klein, nämlich (bei Eisen) von der Grössenordnung $1000 \cdot 10^{-10} = 10^{-7}$, sodass ein magneto-optischer Effect durch das Magnetfeld der Lichtstrahlen selbst nicht einmal bei Eisen zu beobachten sein wird, auch wenn die Magnetisirung des Eisens den schnellen Wechseln des Magnetfeldes der Lichtwellen momentan und voll folgen könnte. Dies erklärt auch, weshalb in einem constanten Magnetfelde die Wirkung der Molecularströme sich in einer von 1 verschiedenen Magnetisirungsconstante bemerklich macht, während trotzdem für Lichtschwingungen jeder Körper sich so verhält, als ob seine Magnetisirungsconstante gleich 1 wäre. Dies liegt aber nicht etwa an einer Art Trägheit der Magnetisirung, denn unsere Schlüsse sind unabhängig davon gezogen.

Kapitel VIII.

Bewegte Körper.

1. Allgemeine Grundlage. Wir haben im Vorigen die optischen Eigenschaften der Körper durch bewegliche Ionenladungen erklärt. Die Körper im Ganzen waren dabei aber als ruhend gedacht. Durch Bewegung der ganzen Körper entstehen nun Modificationen ihrer optischen Eigenschaften. Um eine Theorie hierfür gewinnen zu können, müssen wir eine Hypothese darüber machen, ob durch die Bewegung des Körpers nur die Ionenladungen desselben ergriffen werden, oder ob auch der zwischen ihnen lagernde Aether ganz oder theilweise mit bewegt wird. Wir machen nun die Hypothese, dass der Aether stets vollständig in Ruhe bleibt. Auf dieser Grundlage hat H. A. Lorentz[1]) eine sehr

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden, 1895.

vollständige und elegante Theorie entwickelt, welche der hier gegebenen Darstellung im Wesentlichen zu Grunde liegt. Die Vorstellung des absolut ruhenden Aethers ist an sich schon die einfachste und natürlichste, wenn man nämlich unter dem Aether nicht eine Substanz, sondern lediglich den mit gewissen physikalischen Eigenschaften ausgestatteten Raum versteht. Andererseits bietet die Erklärung der Aberration unüberwindliche Schwierigkeiten, falls man den Aether nicht als ruhend annimmt. Wie Lorentz gezeigt hat, steht die Theorie des ruhenden Aethers im Wesentlichen mit allen hier einschlägigen Beobachtungen im Einklang. Es wird davon noch weiter unten die Rede sein.

2. Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes in Bezug auf ein festes Coordinatensystem. Wir gehen aus von den stets gültigen Grundgleichungen (7) und (11) der S. 245 bezw. 247 der Maxwell'schen Theorie:

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \text{ etc.} \quad \frac{4\pi}{c} s_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \text{ etc.} \tag{1}$$

Wir hatten früher gesehen [S. 354, Formel (7)], dass, falls nur eine Gattung von Ionen vorhanden ist, deren Ladung e beträgt und von denen $\mathfrak{N}$ Ionen in der Volumeinheit vorhanden ist, die Componenten der elektrischen Stromdichte sich bestimmen aus:

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi e \mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Hierin bedeutet ξ die x-Componente der Verschiebung der Ionen relativ zu ihrer Ruhelage im Körper. Wird demselben eine constante Geschwindigkeit v ertheilt, deren Componenten v_x, v_y, v_z sind, so muss obige Gleichung verallgemeinert werden in:

$$\begin{aligned} 4\pi j_x &= \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi e \mathfrak{N} \frac{d\xi}{dt} + 4\pi e \mathfrak{N} v_x, \\ 4\pi j_y &= \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi e \mathfrak{N} \frac{d\eta}{dt} + 4\pi e \mathfrak{N} v_y, \\ 4\pi j_z &= \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi e \mathfrak{N} \frac{d\zeta}{dt} + 4\pi e \mathfrak{N} v_z. \end{aligned} \tag{2}$$

Hier sind absichtlich die Differentialquotienten nach t in zwei Formen geschrieben, als $\frac{\partial}{\partial t}$ und $\frac{d}{dt}$. Ersteres bedeutet, dass die

Aenderung einer Grösse an einer bestimmten Stelle des Raumes im Laufe der Zeit betrachtet werden soll, letzteres dagegen, dass die Aenderung einer Grösse an einer bestimmten Stelle des Körpers im Laufe der Zeit betrachtet werden soll. Hat der Körper daher die Geschwindigkeitscomponenten v_x, v_y, v_z, so rückt nach dem Zeitelement dt bei der Bildung des Differentialquotienten d/dt der betrachtete Punkt um die Coordinaten $v_x dt$, $v_y dt$, $v_z dt$ fort. Durch diese Ortsveränderung ändert sich aber die zu differencirende Grösse um $v_x dt \frac{\partial}{\partial x}$, $v_y dt \frac{\partial}{\partial y}$, $v_z dt \frac{\partial}{\partial z}$, falls sich x, y, z auf ein festes Coordinatensystem beziehen, sodass schliesslich die Relation besteht

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}. \qquad (3)$$

In den Gleichungen (2) müssen nun thatsächlich die $\frac{d\xi}{dt}$ etc. auftreten, weil die ganze Geschwindigkeit der Ionen sich zusammensetzt aus der Translation des Körpers (v_x) und der relativen Geschwindigkeit zum Körper. Letztere wird aber durch $d\xi/dt$ ausgedrückt, nicht durch $\partial\xi/\partial t$.

Für die Componenten der magnetischen Stromdichte bleiben die früheren Gleichungen (13) der S. 248 bestehen:

$$4\pi\, s_x = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad 4\pi\, s_y = \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad 4\pi\, s_z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \qquad (4)$$

da wir absehen wollen von der Einwirkung eines äusseren, kräftigen Magnetfeldes und nach S. 419 für alle Körper die Magnetisirungszahl μ gleich 1 zu setzen ist bei optischen Erscheinungen.

Wenn der Körper keine Translationsgeschwindigkeit besitzt, d. h. wenn $v_x = v_y = v_z = 0$ sind, so war die Bewegungsgleichung eines Ions nach S. 353:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + r e^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{4\pi e^2}{\vartheta} \xi = e X.$$

Durch die Bewegung des Körpers soll nun, wie wir annehmen wollen, der Einfluss des Körpers auf das Ion ungeändert bleiben. Trotzdem erfährt aber obige Differentialgleichung eine Aenderung, weil durch die Bewegung des Körpers die Ionen gemeinsam bewegt werden und bewegte Ionen äquivalent mit elektrischen Strömen

sind, deren Componenten proportional zu $e v_x$, $e v_y$, $e v_z$ sind; auf diese Ströme wirkt die magnetische Kraft α, β, γ. Die Bewegungsgleichung eines Ions wird daher[1]) (vgl. die analogen Entwickelungen der S. 399):

$$(5) \qquad m \frac{d^2\xi}{dt^2} + r e^2 \frac{d\xi}{dt} + 4\pi \frac{e^2}{\vartheta} \xi = e X + \frac{e}{c}(v_y \gamma - v_z \beta).$$

Auch hier ist darauf zu achten, dass die d/dt auftreten, nicht die $\partial/\partial t$, da es sich in (5) um die relative Bewegung der Ionen zum Körper handelt.

Für periodische Zustandsänderungen von X oder ξ kann man setzen

$$(6) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{i}{\tau'} \xi, \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{1}{\tau'^2} \xi.$$

τ' ist dann gleich der Periode T' dividiert durch 2π. Jedoch ist zu bemerken, dass diese Periode T' die relative Schwingungsdauer in Bezug auf den bewegten Körper ist, und nicht die absolute Schwingungsdauer T in Bezug auf ein festes Coordinatensystem. Beide Schwingungsdauern T' und T sind wohl zu unterscheiden, es ist z. B. $T' > T$, falls der Körper sich in Richtung der Fortpflanzung des Lichtes verschiebt. Betrachten wir ebene Wellen, bei denen alle Grössen proportional zu

$$e^{\frac{i}{\tau}\left(t - \frac{p_1 x + p_2 y + p_3 z}{\omega}\right)}$$

sind, wobei sich x, y, z auf ein festes Coordinatensystem beziehen, so ist $\tau = T : 2\pi$ proportional zur absoluten Periode T.

Nach (3) und (6) besteht nun die Relation:

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{p_1 v_x + p_2 v_y + p_3 v_z}{\omega}\right),$$

---

1) Aus den auf S. 418 entwickelten Gründen sind auf der rechten Seite von (4) die Glieder $\frac{\gamma}{c}\frac{d\eta}{dt}$ etc. nicht hingeschrieben. Diese geben viel zu kleine Effecte. Bei der Erdbewegung ist $v : c = 10^{-4}$, ist also von ganz anderer Grössenordnung, als $d\eta/dt : c$. — Auch bei dem unten behandelten Fizeau'schen Experiment mit dem strömenden Wasser, bei welchem $v : c$ kleinere Beträge besitzt, kommen trotzdem nur die von v abhängigen Glieder allein zur Geltung, da nur sie einen Einfluss erster Ordnung der Ionengeschwindigkeit auf die optischen Eigenschaften ergeben, während dies die Ionengeschwindigkeiten $d\xi/dt$ etc. nicht thun (vgl. oben S. 418).

d. h. wenn die Geschwindigkeit v klein gegen ω ist, so gilt

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{T'}{T} = 1 + \frac{p_1 v_x + p_2 v_y + p_3 v_z}{\omega} = 1 + \frac{v_n}{\omega}, \tag{7}$$

wobei unter v_n die Geschwindigkeit des Körpers in Richtung der Wellennormale verstanden ist.

Die Bewegungsgleichung (5) ergiebt unter Benutzung der schon früher (S. 355) eingeführten Abkürzungen:

$$a = \frac{r\vartheta}{4\pi}, \quad b = \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}, \tag{8}$$

$$4\pi e\xi\left(1 + i\frac{a}{\tau'} - \frac{b}{\tau'^2}\right) = \vartheta\left(X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right). \tag{9}$$

In den Gleichungen (2) hat $e\mathfrak{N}$ die Bedeutung der Ladung, welche in der Volumeneinheit vorhanden ist.

Setzt man hierfür (cf. Gl. (20) S. 250), (die Dielektricitätsconstante ε des Aethers ist gleich 1 gesetzt),

$$4\pi e\mathfrak{N} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}, \tag{10}$$

so werden die Gleichungen (2):

$$\begin{aligned} 4\pi j_x &= \frac{\partial X}{\partial t} + v_x\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \\ &+ \frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1 + i\,a/\tau' - b/\tau'^2} \cdot \frac{d\left(X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right)}{dt}. \end{aligned} \tag{11}$$

Sind mehrere Molecülgattungen vorhanden, so ist der Factor des letzten Gliedes dieser Gleichung zu schreiben, wenn man $i\,a/\tau'$ vernachlässigt, d. h. wenn der Körper nicht merklich absorbirt:

$$\sum \frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1 + i\,a/\tau' - b/\tau'^2} = n^2 - 1. \tag{12}$$

Hierin bedeutet n^2 das Quadrat des optischen Brechungsindex des ruhenden Körpers für die Periode $T' = 2\pi\tau'$. Die Relation (12) besteht auf Grund der Dispersionstheorie [S. 357, Formel (18)]. — Ersetzt man nun noch in (11) den Differentialquotienten d/dt in Rücksicht auf (3) durch $\partial/\partial t$, und setzt den so erhaltenen Werth für $4\pi j_x$ in (1) ein, so hat man eine Differentialgleichung für den bewegten Körper unter Benutzung eines

ruhenden Coordinatensystems. Dieselbe wird erheblich einfacher, wenn man nur Glieder erster Ordnung in v berücksichtigt, was durchaus gestattet ist, da selbst wenn man die Geschwindigkeit der Erde im Weltraum in Betracht zieht, v sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Man kann dann in den mit v multiplicirten Gliedern von (11) d/dt ersetzen durch $\partial/\partial t$, ferner kann man den zweiten Term in (11), der mit v_x multiplicirt ist, in **homogenen Körpern** vernachlässigen, da näherungsweise, d. h. für $v = 0$, in homogenen Körpern bei periodischen Zustandsänderungen die Relation

$$(13) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

besteht (cf. oben S. 254). Dadurch wird (11) zu:

$$(14) \qquad 4\pi j_x = n^2 \frac{\partial X}{\partial t} + (n^2 - 1) \left\{ v_x \frac{\partial X}{\partial x} + v_y \frac{\partial X}{\partial y} + v_z \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{1}{c} \left(v_y \frac{\partial \gamma}{\partial t} - v_z \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \right\}.$$

Nun ist aber nach (1) und (4)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

daher lässt sich $4\pi j_x$ in der Form schreiben:

$$4\pi j_x = n^2 \frac{\partial X}{\partial t} + (n^2 - 1) \left\{ 2 \left(v_x \frac{\partial X}{\partial x} + v_y \frac{\partial X}{\partial y} + v_z \frac{\partial X}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (v_x X + v_y Y + v_z Z) \right\}.$$

Unter Rücksicht auf (1) und (4) erhält man daher für einen **bewegten, homogenen, isotropen Körper** die für ein **festes Coordinatensystem** giltigen Differentialgleichungen:

$$\frac{n^2}{c} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{n^2 - 1}{c} \left\{ 2 \left(v_x \frac{\partial X}{\partial x} + v_y \frac{\partial X}{\partial y} + v_z \frac{\partial X}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (v_x X + v_y Y + v_z Z) \right\} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$(15) \quad \frac{n^2}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{n^2 - 1}{c} \left\{ 2 \left(v_x \frac{\partial Y}{\partial x} + v_y \frac{\partial Y}{\partial y} + v_z \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (v_x X + v_y Y + v_z Z) \right\} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$\frac{n^2}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{n^2 - 1}{c} \left\{ 2 \left(v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + v_y \frac{\partial Z}{\partial y} + v_z \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (v_x X + v_y Y + v_z Z) \right\} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{15'}$$

Differencirt man die Gleichungen (15) bezw. nach x, y, z und addirt sie, so entsteht, falls man zur Abkürzung setzt

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = F:$$

$$\frac{n^2}{c}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{n^2-1}{c}\left\{2\left(v_x\frac{\partial F}{\partial x} + v_y\frac{\partial F}{\partial y} + v_z\frac{\partial F}{\partial z}\right) - (v_x\Delta X + v_y\Delta Y + v_z\Delta Z)\right\} = 0. \tag{16}$$

In den mit v_x etc. multiplicirten Gliedern kann man die Näherungswerthe benutzen:

$$F = 0,$$

$$\Delta X = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, \quad \Delta Y = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, \quad \Delta Z = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}. \tag{17}$$

Daher ergiebt (16):

$$F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{n^2-1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(v_x X + v_y Y + v_z Z). \tag{18}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass in dem bewegten Körper die elektrische Kraft sich nicht mehr in ebenen Transversalwellen fortpflanzen kann, da F von Null verschieden ist. Dagegen kann sich die magnetische Kraft in ebenen Transversalwellen fortpflanzen, da nach (15') die Beziehung besteht:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = 0. \tag{19}$$

Man kann nun auch leicht die Differentialgleichungen (15) und (15') in solche transformiren, welche nur je eine der Grössen X, Y, Z, α, β, γ enthalten. Differencirt man z. B. die erste Gleichung (15) nach t und setzt für $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ ihre Werthe nach (15') ein, so erhält man:

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{n^2-1}{c^2}\left\{2\frac{\partial}{\partial t}\left(v_x\frac{\partial X}{\partial x} + v_y\frac{\partial X}{\partial y} + v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(v_x X + v_y Y + v_z Z)\right\}$$
$$= \Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

In Rücksicht auf (18) wird dies zu:

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\frac{n^2-1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_x\frac{\partial X}{\partial x} + v_y\frac{\partial X}{\partial y} + v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right) = \Delta X. \tag{20}$$

Für die Y, Z, α, β, γ bestehen Differentialgleichungen von genau derselben Form.

3. Die Lichtgeschwindigkeit im bewegten Körper. Die letzte Gleichung erlaubt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen im bewegten Körper in einfacher Weise zu berechnen. Setzen wir

$$X = A \cdot e^{\frac{i}{\tau}\left(t - \frac{p_1 x + p_2 y + p_3 z}{\omega}\right)}, \tag{21}$$

so wird nach (20):

$$\frac{n^2}{c^2} - \frac{2(n^2-1)}{c^2}\frac{p_1 v_x + p_2 v_y + p_3 v_z}{\omega} = \frac{1}{\omega^2},$$

oder

$$\frac{n^2}{c^2}\left(1 - \frac{2(n^2-1)}{n^2}\frac{v_n}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^2}, \tag{22}$$

wobei v_n die Translationsgeschwindigkeit der Körpers nach der Richtung der positiven Wellennormalen bedeutet. Für erste Ordnung in v_n wird daher

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2}\left(1 + \frac{2(n^2-1)}{n^2}\cdot\frac{v_n}{\omega}\right),$$

d. h.

$$\omega = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{n^2-1}{n^2}\cdot\frac{v_n}{\omega}\right).$$

Ersetzt man auf der rechten Seite in dem mit v_n behafteten Gliede ω durch seinen Näherungswerth c/n, so wird

$$\omega = \frac{c}{n} + \frac{n^2-1}{n^2}v_n. \tag{23}$$

Diese Gleichung besagt, dass die Bewegung des Körpers denselben Effect auf die Lichtgeschwindigkeit hat, als ob der Körper dem Aether einen gewissen Bruchtheil (den $\frac{n^2-1}{n^2}$ ten Theil) seiner Translationsgeschwindigkeit ertheilte.

Dieses Resultat ist schon von Fresnel aus einem von Fizeau angestellten Experimente gezogen worden, in welchem die Lichtgeschwindigkeit in strömendem Wasser gemessen wurde. Indess ist diese Interpretation der Gleichung (23) doch nicht ganz streng, denn der Einfluss der Bewegung des Körpers steckt nicht nur im zweiten Gliede der rechten Seite von (23), sondern auch schon im ersten. Es bezeichnet nämlich nach S. 423 n nicht den Brechungsindex des Körpers für die absolute Periode T, sondern für die relative Periode T'. Dabei ist nach (7)

$$T' = T\left(1 + \frac{v_n}{\omega}\right). \tag{24}$$

Nennt man daher ν den Brechungsindex des ruhenden Körpers für die absolute Periode T, so ist

$$n = \nu + \frac{\partial \nu}{\partial T} \cdot T \frac{v_n}{\omega} = \nu + \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} \lambda \frac{v_n}{\omega},$$

wenn $\lambda = cT$ die Wellenlänge des Lichtes im Vacuum bedeutet. Daher wird nach (23):

$$\omega = \frac{c}{\nu}\left(1 - \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \frac{v_n}{\omega}\right) + \frac{n^2 - 1}{n^2} v_n,$$

oder, da man in den mit v_n behafteten Gliedern die Näherungswerthe $n = \nu$, $\omega = c/\nu$ einführen kann:

$$\omega = \frac{c}{\nu} + v_n\left(\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} - \frac{\lambda}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}\right). \tag{25}$$

c/ν ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V des Lichtes für Wellen der absoluten Periode T im ruhenden Körper; der mit v_n multiplicirte Term in (25) ergiebt daher die Aenderung dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die Bewegung des Körpers. Diese ist grösser, als nach der Fresnel'schen Annahme, da $\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}$ bei normaler Dispersion negativ ist. Die Differenz gegenüber der Fresnel'schen Annahme ist indess so gering, dass sie noch innerhalb der Beobachtungsfehler des Experimentes fällt.

Das Experiment wurde zuerst von Fizeau[1]) angestellt und

1) Compt. Rend. 33, S. 349, 1851. — Pogg. Ann. Ergbd. 3, S. 457. — Ann. d. chim. et de phys. (3) 57, S. 385, 1859.

später von Michelson und Morley[1]) wiederholt. Es strömte dabei das Wasser in zwei parallelen Röhren mit entgegengesetzter Geschwindigkeit, die Lichtgeschwindigkeit in ihnen wurde mit Hülfe einer Interferenzmethode gegenseitig verglichen. Der Mitführungscoefficient, d. h. der Factor des mit v_n multiplicirten Gliedes in dem Werthe von ω bestimmte sich experimentell zu $0{,}434 \pm 0{,}02$, während die Formel (25) für Wasser und die Frauenhofer'sche Linie D ergiebt 0,451. Der Fresnel'sche Mitführungscoefficient $\nu^2 - 1 : \nu^2$ ergiebt 0,438.

4. Die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen des elektromagnetischen Feldes in Bezug auf ein bewegliches Coordinatensystem, welches mit dem bewegten Körper fest verbunden ist. Nennt man x', y', z' die relativen Coordinaten eines Punktes in Bezug auf den bewegten Körper, so ist

$$x = x' + v_x \cdot t, \quad y = y' + v_y \cdot t, \quad z = z' + v_z \cdot t. \tag{26}$$

Die partielle Differentiation nach x, y, z können wir daher, da v_x, v_y, v_z nicht von x, y, z abhängen, ersetzen durch partielle Differentiation nach x', y', z', d. h. wir können in den Gleichungen der vorigen Paragraphen die Differentialquotienten nach x, y, z auch auffassen als solche, die nach den relativen Coordinaten x', y', z' zu nehmen sind. Dies wollen wir im Folgenden thun, und unter x, y, z jetzt einfach die relativen Coordinaten in Bezug auf einen Punkt des bewegten Körpers verstehen. — An Stelle der Differentialquotienten $\partial X/\partial t$ etc. sind aber die dX/dt etc. einzuführen, da wir hier die Abhängigkeit des X nach der Zeit untersuchen wollen, wobei sich X beziehen soll auf einen relativ zum bewegten Körper festen Punkt. Der Uebergang wird durch die Relation (3) der S. 421 vermittelt, sodass z. B. entsteht

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{dX}{dt} - v_x \frac{\partial X}{\partial x} - v_y \frac{\partial X}{\partial y} - v_z \frac{\partial X}{\partial z}. \tag{27}$$

Setzt man dies in die Gleichungen (2) ein und berücksichtigt (9), (10) und (12), so wird (bei beliebig viel Ionengattungen):

$$\begin{aligned} 4\pi j_x = {} & \frac{dX}{dt} - v_x \frac{\partial X}{\partial x} - v_y \frac{\partial X}{\partial y} - v_z \frac{\partial X}{\partial z} \\ & + (n^2 - 1) \frac{d}{dt} \left(X + \frac{v_y \gamma - v_z \beta}{c} \right) + v_x \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right). \end{aligned} \tag{28}$$

---

1) Americ. Journ. of Science (3) 31, S. 377, 1886.

Die Gleichungen (1), (3), (4) und (28) ergeben daher, wenn man auf (19) Rücksicht nimmt:

$$
\begin{aligned}
\frac{n^2}{c}\frac{dX}{dt} + \frac{n^2-1}{c^2}\frac{d}{dt}(v_y\gamma - v_z\beta) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma + \frac{v_y X - v_x Y}{c}\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta + \frac{v_x Z - v_z X}{c}\right), \\
\frac{n^2}{c}\frac{dY}{dt} + \frac{n^2-1}{c^2}\frac{d}{dt}(v_z\alpha - v_x\gamma) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c}\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma + \frac{v_y X - v_x Y}{c}\right), \\
\frac{n^2}{c}\frac{dZ}{dt} + \frac{n^2-1}{c^2}\frac{d}{dt}(v_x\beta - v_y\alpha) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta + \frac{v_x Z - v_z X}{c}\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c}\right). \qquad (29) \\
\frac{1}{c}\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(Y + \frac{v_z\alpha - v_x\gamma}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(Z + \frac{v_x\beta - v_y\alpha}{c}\right), \\
\frac{1}{c}\frac{d\beta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(Z + \frac{v_x\beta - v_y\alpha}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right), \\
\frac{1}{c}\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(Y + \frac{v_z\alpha - v_x\gamma}{c}\right).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen gelten auch für inhomogene (isotrope) Körper, da die Näherungsrelation (13), welche für inhomogene Körper nicht gilt, nicht benutzt ist, sondern alle herangezogenen Gleichungen auch für inhomogene Körper gelten. Wir gewinnen daher aus (29) sofort nach den oben auf S. 251 angestellten Ueberlegungen die Grenzbedingungen beim Uebergang über die Grenze zwischen zwei verschiedenen Körpern oder zwischen einem Körper und dem Vacuum in der Form, falls die Grenze senkrecht zur z-Axe liegt:

$$
\left.\begin{aligned}
X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}, \quad Y + \frac{v_z\alpha - v_x\gamma}{c}, \\
\alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c}, \quad \beta + \frac{v_x Z - v_z X}{c},
\end{aligned}\right\} \text{ stetig an der Grenze.} \quad (30)
$$

Hieraus und aus (29) ergeben sich die dadurch mit bedingten Grenzgleichungen:

$$
n^2 Z + \frac{n^2-1}{c}(v_x\beta - v_y\alpha), \ \gamma \text{ stetig an der Grenze.} \quad (30')
$$

Da man in (30) in den mit v_x, v_y, v_z multiplicirten Gliedern die Näherungswerthe einführen kann, wie sie für $v_x = v_y = v_z = 0$ eintreten, so kann man die Grenzbedingungen auch in der Form schreiben:

$$(30'') \qquad X,\ Y,\ \alpha - \frac{v_y Z}{c},\ \beta + \frac{v_x Z}{c} \quad \text{stetig an der Grenze.}$$

Für einen homogenen Körper kann man leicht Differentialgleichungen aufstellen, welche nur je eine der Grössen $X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$ enthalten. Aus (27) folgt nämlich, wenn man bis auf erste Ordnung in v_x, v_y, v_z geht:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{d^2 X}{dt^2} - 2\frac{d}{dt}\left(v_x \frac{\partial X}{\partial x} + v_y \frac{\partial X}{\partial y} + v_z \frac{\partial X}{\partial z}\right),$$

daher wandelt sich (20) um in:

$$(31) \qquad \frac{n^2}{c^2}\frac{d^2 X}{dt^2} - \frac{2}{c^2}\frac{d}{dt}\left(v_x \frac{\partial X}{\partial x} + v_y \frac{\partial X}{\partial y} + v_z \frac{\partial X}{\partial z}\right) = \Delta X.$$

Gleichungen derselben Form bestehen für $Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$. Die früheren Gleichungen (18) und (19) gelten auch hier, d. h. die elektrische Kraft pflanzt sich nicht in transversalen Wellen fort, aber wohl die magnetische Kraft.

Setzen wir

$$X = A \cdot e^{\frac{i}{\tau}\left(t - \frac{p_1' x + p_2' y + p_3' z}{\omega'}\right)},$$

wo $p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2 = 1$ sein soll, so bedeuten p_1', p_2', p_3' die Richtungscosinus der Wellennormale, ω' die Lichtgeschwindigkeit in Bezug auf das bewegte Coordinatensystem. — Aus (31) folgt dann

$$\frac{n^2}{c^2} + \frac{2}{c^2 \omega'}(p_1' v_x + p_2' v_y + p_3' v_z) = \frac{1}{\omega'^2},$$

oder

$$\frac{n^2}{c^2}\left(1 + \frac{2(p_1' v_x + p_2' v_y + p_3' v_z)}{n^2 \omega'}\right) = \frac{1}{\omega'^2},$$

$$\omega' = \frac{c}{n}\left(1 - \frac{p_1' v_x + p_2' v_y + p_3' v_z}{n^2 \omega'}\right).$$

Schreibt man auf der rechten Seite für ω' den Näherungswerth $\omega' = c : n$, so entsteht:

$$(32) \qquad \omega' = \frac{c}{n} - \frac{p_1' v_x + p_2' v_y + p_3' v_z}{n^2}.$$

5. Die Richtung des Lichtstrahls, ermittelt nach dem Huygens'schen Princip. Die Geschwindigkeit ω' der Wellennormalen hängt von der Richtung p_1', p_2', p_3' derselben ab. Um die zu p_1', p_2', p_3' zugehörige Strahlrichtung $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ zu finden, können wir, wie es oben S. 306 bei den Krystallen geschehen ist, nach dem Huygens'schen Princip den Schnitt von drei benachbarten Wellenebenen aufsuchen, d. h. wir differenciren die Gleichung:

$$p_1'x + p_2'y + p_3'z + f(p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2) = \omega' + f \tag{33}$$

[cf. oben S. 306 Formel (59)] nach p_1', p_2', p_3'. Dadurch ergiebt sich:

$$x + 2fp_1' = \frac{\partial \omega'}{\partial p_1'}, \quad y + 2fp_2' = \frac{\partial \omega'}{\partial p_2'}, \quad z + 2fp_3' = \frac{\partial \omega'}{\partial p_3'},$$

d. h. in Rücksicht auf (32):

$$x + 2fp_1' = -\frac{v_x}{n^2}, \quad y + 2fp_2' = -\frac{v_y}{n^2}, \quad z + 2fp_3' = -\frac{v_z}{n^2}. \tag{34}$$

Durch Multiplication dieser drei Gleichungen mit bezw. p_1', p_2', p_3' und Addition folgt, da $p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2 = 1$ ist:

$$p_1'x + p_2'y + p_3'z + 2f = -\frac{p_1'v_x + p_2'v_y + p_3'v_z}{n^2}.$$

Nun ist aber nach (33) $p_1'x + p_2'y + p_3'z = \omega'$, d. h. unter Rücksicht auf (32) folgt $2f = -c/n$. Daher ergiebt sich aus (34) die Strahlrichtung aus der Proportion:

$$\mathfrak{p}_1 : \mathfrak{p}_2 : \mathfrak{p}_3 = x : y : z = \frac{cp_1'}{n} - \frac{v_x}{n^2} : \cdots\cdot,$$

oder

$$\mathfrak{p}_1 : \mathfrak{p}_2 : \mathfrak{p}_3 = p_1' - \frac{v_x}{nc} : p_2' - \frac{v_y}{nc} : p_3' - \frac{v_z}{nc}. \tag{35}$$

Der Strahl weicht also ab von den Wellennormalen.

Die Relation (35) lässt sich (abgesehen von Gliedern 2. Ordnung in v) schreiben als:

$$p_1' : p_2' : p_3' = \mathfrak{p}_1 + \frac{v_x}{nc} : \mathfrak{p}_2 + \frac{v_y}{nc} : \mathfrak{p}_3 + \frac{v_z}{nc}. \tag{35'}$$

6. Ersetzung der absoluten Zeit durch eine Art Ortszeit. An Stelle der Variabelen t, x, y, z, worin t die absolute Zeit, x, y, z

die relativen Coordinaten gegen einen Punkt des bewegten Körpers bedeuten, wollen wir x, y, z und

$$t' = t - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2} \tag{36}$$

als unabhängige Variabele einführen.

t' kann man zweckmässig als eine Art Ortszeit bezeichnen, weil t' vom Ort im Körper, d. h. von x, y, z, abhängt. Wenn diese unabhängigen Variabelen eingeführt werden, so sollen die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z durch $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)', \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)', \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)'$ bezeichnet werden, während $\frac{\partial}{\partial x}$ etc. wie früher die partiellen Differentialquotienten bedeuten, wenn x, y, z, t die unabhängigen Variabelen sind. Es folgt aus (36):

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)' - \frac{v_x}{c^2}\frac{d}{dt'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)' - \frac{v_y}{c^2}\frac{d}{dt'}, \\ \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)' - \frac{v_z}{c^2}\frac{d}{dt'}. \end{gathered} \tag{37}$$

Führt man dies ein in (29), berücksichtigt nur Glieder erster Ordnung in v, und setzt zur Abkürzung:

$$\begin{gathered} X + \frac{v_y \gamma - v_z \beta}{c} = X', \quad Y + \frac{v_z \alpha - v_x \gamma}{c} = Y', \quad Z + \frac{v_x \beta - v_y \alpha}{c} = Z', \\ \alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c} = \alpha', \quad \beta + \frac{v_x Z - v_z X}{c} = \beta', \quad \gamma + \frac{v_y X - v_x Y}{c} = \gamma', \end{gathered} \tag{38}$$

so entsteht, falls man nun die Differentiationen $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)'$ wieder einfach als $\frac{\partial}{\partial x}$ bezeichnet:

$$\begin{gathered} \frac{n^2}{c}\frac{dX'}{dt'} = \frac{\partial \gamma'}{\partial y} - \frac{\partial \beta'}{\partial z}, \quad \frac{n^2}{c}\frac{dY'}{dt'} = \frac{\partial \alpha'}{\partial z} - \frac{\partial \gamma'}{\partial x}, \quad \frac{n^2}{c}\frac{dZ'}{dt'} = \frac{\partial \beta'}{\partial x} - \frac{\partial \alpha'}{\partial y}. \\ \frac{1}{c}\frac{d\alpha'}{dt'} = \frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{d\beta'}{dt'} = \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{d\gamma'}{dt'} = \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x}. \end{gathered} \tag{39}$$

Die Grenzbedingungen lauten nach (30) und (38), falls die Grenze senkrecht zur z-Axe liegt:

(40) X', Y', α', β' stetig beim Uebergang über die Grenze.

Die Gleichungen (39) und (40) haben nun dieselbe Gestalt, wie die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen des elektromagnetischen Feldes in einem ruhenden Körper. Daraus ist der wichtige Schluss zu ziehen:

Ist für ein ruhendes System ein Zustand bekannt, in welchem $X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$ gewisse Functionen von x, y, z, t und der Periode T sind, so sind für das bewegte System $X', Y', Z', \alpha', \beta', \gamma'$ dieselben Functionen von x, y, z, $t - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2}$ und T, wobei jetzt x, y, z die relativen Coordinaten in Bezug auf einen Punkt des Körpers und T die relative Periode in Bezug auf den bewegten Körper bedeuten. Nach (7) auf S. 423 ist also im letzteren Falle als absolute Periode $T\left(1 - \frac{v_n}{\omega}\right)$ anzunehmen.

7. Die Unabhängigkeit des relativen Strahlenganges von der Bewegung. Der letzte Satz gestattet sofort, eine Anwendung auf den relativen Strahlengang zu machen. Es möge nämlich im ruhenden System der mit Licht erfüllte Raum begrenzt sein durch eine gewisse Fläche S, sodass ausserhalb S sowohl X, Y, Z, als auch α, β, γ verschwinden. Dann muss im bewegten System ausserhalb der Fläche S sowohl X' Y' Z', als α', β', γ' verschwinden, d. h. auch im bewegten System bildet die Fläche S die Grenze des mit Licht erfüllten Raumes. In einem ruhenden System kann nun z. B. S die Mantelfläche eines cylindrischen Raumes sein (Lichtbündel), falls wenigstens die Querschnittsdimensionen dieses Cylinders viel grösser als die Wellenlänge des Lichtes sind. Die Erzeugenden dieses Cylinders werden Lichtstrahlen genannt. Nach unserem Satze bleibt die Begrenzung der Lichtbündel, auch wenn sie mehrfach gebrochen oder reflectirt werden, durch die gemeinsame Bewegung des Ganzen unverändert, d. h. in dem bewegten System werden Lichtstrahlen von der relativen Schwingungsdauer T nach denselben Gesetzen gespiegelt und gebrochen, wie Strahlen von der absoluten Schwingungsdauer T im ruhenden System.

Die Gesetze für Linsen und Brennspiegel erleiden daher keine Modification durch die Bewegung. Ebensowenig hat die Bewegung Einfluss auf Interferenzerscheinungen. Denn diese zeichnen sich ja nur aus durch eine complicirte Gestalt der den Lichtraum begrenzenden Fläche S und diese Gestalt wird, wie oben gesagt wurde, durch die Bewegung nicht verändert.

Die Unabhängigkeit des Strahlenganges von der Bewegung gilt auch für Krystalle,[1]) da auch für diese die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen in einer zu (39) und (40) analogen Form gewonnen werden können, sodass man sich sofort beziehen kann auf die Brechungsgesetze ruhender Krystalle.

8. **Die Erde als bewegtes System.** Die letzten Betrachtungen sind besonders fruchtbar, wenn wir die Bewegung der Erde durch den Weltraum betrachten. Nach diesen Betrachtungen kann die Bewegung der Erde nie[2]) einen Einfluss (in erster Ordnung nach v) auf die mit terrestrischen Lichtquellen beobachtbaren Erscheinungen haben, denn bei Anwendung irdischer Lichtquellen ist die von der Lichtquelle entsandte Periode allemal gleich der in Betracht kommenden relativen Periode, d. h. ganz unabhängig von der Bewegung der Erde, daher kann auch der Strahlengang in keiner Weise durch die Erdbewegung modificirt werden. In der That haben zahlreiche Versuche (Respighi,[3]) Hoeck,[4]) Ketteler,[5]) Mascart,[6]) über Brechung und Interferenz (theilweise auch in Krystallen) die Unabhängigkeit der Erscheinungen von der Orientirung der Apparate in Bezug auf die Bewegungsrichtung der Erde dargethan. — Dagegen kann man einen Einfluss der Erdbewegung bei Benutzung ausserterrestrischer Lichtquellen dadurch erhalten, dass dann die relative Periode von der Erdbewegung abhängt. In der That erscheinen die Spectrallinien mancher Fixsterne relativ etwas verschoben. Dies ist durch eine verschiedene relative Bewegung der Erde, bezw. des ganzen Sonnensystems gegen diese Fixsterne zu erklären (oder umgekehrt, was zu demselben Resultat führt). Denn bei den Brechungs- oder Interferenzgesetzen handelt es sich um die relativen Perioden und diese sind nach Formel (7) durch $T\,(1 + v_n/\omega)$ gegeben, falls T die absolute Periode ist. Je nach dem Werthe und dem Vorzeichen von v_n variirt also T und damit etwas der durch Refraction oder

1) Ob dies auch für natürlich- oder magnetisch-active Körper eintritt, mag hier unerörtert bleiben; dies bedarf besonderer Untersuchung.

2) Es wird hier abgesehen von natürlich- oder magnetisch-activen Körpern (vgl. die vorige Anm.).

3) Mem. di Bologna (2) II, S. 279.

4) Astr. Nachr. 73, S. 193.

5) Astron. Undulat. Theorie, S. 66, 158, 166, 1873.

6) Ann. de l'école norm. (2) 1, S. 191, 1872. — 3, S. 376, 1874.

Diffraction auf der bewegten Erde gebildete Ort der Spectrallinie. Der Inhalt dieses Satzes wird das Doppler'sche Princip[1]) genannt.

Da sich die Erde um die Sonne nahezu in einem Kreise bewegt, so ist für diesen Fall $v_n = 0$ zu setzen. Daher ist, wie es auch die Experimente von Mascart[2]) ergeben, kein Einfluss der Erdbewegung auf den durch Refraction oder Diffraction gebildeten Ort der Fraunhofer'schen Sonnenlinien zu beobachten.[3])

9. Die Aberration des Lichtes. Während, wie in § 7 abgeleitet wurde, der relative Strahlengang durch die Erdbewegung nicht beeinflusst wird, so hängt doch die Richtung der Wellennormale, die zu einer bestimmten Strahlenrichtung gehört, von der Erdbewegung ab. Dies ist schon oben S. 431 bewiesen; es ist aber wohl nützlich, die oben durch Benutzung des Huygens'schen Principes gewonnene Definition des Strahles hier unabhängig davon direct abzuleiten. Betrachten wir z. B. den Fall ebener Wellen im ruhenden System: alle Grössen sind periodische Functionen von $t - \frac{p_1 x + p_2 y + p_3 z}{\omega}$. Im ruhenden System sind p_1, p_2, p_3 die Richtungscosinus der Wellennormale und zugleich des Strahles. Wir wollen uns die Richtung des Strahles dadurch physikalisch markirt denken, dass das Licht durch zwei enge Oeffnungen fällt, deren

1) Im Obigen ist angenommen, dass die Lichtquelle A ruht und der Beobachtungsort B sich bewegt. Die Betrachtungen gelten auch für den Fall, dass sich A und B bewegen, es bezeichnet dann v_n die relative Geschwindigkeit von B gegen A, in der Richtung der fortgepflanzten Lichtstrahlen gemessen. In diesem Falle ergiebt übrigens zunächst die strenge Berechnung, dass das Verhältniss der wirklichen Periode T zu der in B wahrgenommenen relativen Periode T' den Werth hat: $T : T' = \omega - v' : \omega - v$, wobei v' die absolute Geschwindigkeit von B, v die von A (in Richtung der Lichtstrahlen) ist und ω die Lichtgeschwindigkeit im Medium zwischen A und B ist. Nur wenn sowohl v als v' klein gegen ω sind, reducirt sich diese strengere Formel auf die im Text angegebene, d. h. auf die gewöhnliche Fassung des Doppler'schen Principes. Nun wissen wir thatsächlich nichts über die absolute Bewegung der Himmelskörper; daher könnte eventuell die Anwendung der gewöhnlichen Formel des Doppler'schen Principes zur Ermittelung der relativen Bewegung der Himmelskörper im Visionsradius gegen die Erde zu Fehlern führen. Auf diesen Punkt hat Moessard (Comp. Rend. 114, S. 1471, 1892) zuerst aufmerksam gemacht.

2) Ann. de l'école norm. (2) 1, S. 166, 190; 1872.

3) Wir sehen hier ab von der durch Rotation der Sonne hervorgerufenen Verschiebung der Linien, welche vom Sonnenrande uns zugesandt werden. Bei den Versuchen wurde mit dem Lichte der ganzen Sonnenscheibe gearbeitet.

Verbindungslinie die Richtungscosinus p_1, p_2, p_3 hat. — Wird nun das ganze System mit der Geschwindigkeit v_x, v_y, v_z bewegt, so ist immer noch ein (auf das bewegte System bezogener, sogenannter relativer) Strahl mit den Richtungscosinus p_1, p_2, p_3 möglich, derselbe wird aber nach S. 433 hervorgerufen durch Wellen, welche periodische Functionen von

$$t - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2} - \frac{p_1 x + p_2 y + p_3 z}{\omega} \tag{41}$$

sind. Dieser Ausdruck entspricht ebenen Wellen, bei denen die Richtungscosinus p_1', p_2', p_3' der Wellennormale proportional sind zu:

$$p_1' : p_2' : p_3' = \frac{p_1}{\omega} + \frac{v_x}{c^2} : \frac{p_2}{\omega} + \frac{v_y}{c^2} : \frac{p_3}{\omega} + \frac{v_z}{c^2}. \tag{42}$$

Diese Relation (42) lässt also im bewegten System die Richtung der Wellennormale aus der Richtung des Strahles berechnen und umgekehrt. Diese Relation ist identisch mit der oben S. 431 aus dem Huygens'schen Princip abgeleiteten Relation (35'), denn das dortige $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ entspricht hier dem p_1, p_2, p_3 und annähernd ist $c : \omega = n$ zu setzen.

Nehmen wir daher auf der bewegten Erde den Ort eines Sternes in der Richtung p_1, p_2, p_3 wahr (bezogen auf ein mit der Erde verbundenes Coordinatensystem), so wird die wahre Richtung nach dem Ort des Sternes davon abweichen, denn diese ist identisch mit der Richtung der Normale der vom Stern nach der Erde gesandten Lichtwellen, d. h. der Ort des Sternes berechnet sich aus p_1', p_2', p_3'.

Wir wollen genauer den Fall betrachten, dass der Visionsradius des Sternes und die Erdbewegung senkrecht aufeinander stehen mögen. Setzen wir z. B. $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 1$, $v_y = v_z = 0$, $v_x = v$; dann wird nach (42), wenn wir die Lichtgeschwindigkeit ω in der Luft identificiren mit c, was hier durchaus gestattet ist, der Ort des Sternes gegeben durch

$$p_1' : p_2' : p_3' = v : 0 : c, \tag{43}$$

d. h. der Ort des Sternes weicht um den Aberrationswinkel ζ vom scheinbaren Ort ab, wobei $tg\,\zeta = v : c$ ist. Dieser Aberrationswinkel ändert sich auch nicht, wenn wir den scheinbaren Ort des Sternes

in einem mit Wasser gefüllten Fernrohr beobachten,[1]) da wir abgeleitet haben, dass der relative Strahlengang in irgend einem Systeme brechender Körper durch die Bewegung nicht beeinflusst wird. Direct kann man dies Resultat hier auch noch in folgender Weise zeigen: Wenn ω merklich von c verschieden ist, wie z. B. bei Beobachtung in Wasser, so ist die zugehörige Wellennormale im Wasser nicht mehr durch (43) gegeben, sondern nach (42) durch:

$$p_1' : p_2' : p_3' = v : 0 : \frac{c^2}{\omega} = v : 0 : cn, \tag{44}$$

woraus sich ein Aberrationswinkel $tg\,\zeta' = v : cn$ ergiebt. Die zugehörige Wellennormale in Luft oder im Vacuum macht aber einen anderen Winkel ζ mit der z-Axe, und zwar ist, da die Grenze zwischen Luft und Wasser senkrecht zur Strahlrichtung, d. h. zur z-Axe, anzunehmen ist, nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz: $sin\,\zeta : sin\,\zeta' = n$. Da nun bei der Kleinheit von ζ und ζ' die sin mit den tg zu identificiren sind, so folgt $tg\,\zeta = v : c$, d. h. es ergiebt sich derselbe Werth für den Aberrationswinkel, als ob der Ort des Sternes direct in Luft beobachtet wäre.

10. Der Polarisationsversuch von Fizeau. Während, abgesehen von der Aberration und der Aenderung der Schwingungsdauer nach dem Doppler'schen Principe, nach der entwickelten Theorie ein Einfluss der Erdbewegung auf die auf der Erde zu beobachtenden optischen Erscheinungen nicht zu erwarten ist und thatsächlich auch im Allgemeinen nicht beobachtet ist, glaubte Fizeau[2]) doch in einem Falle die Wirkung der Erdbewegung constatirt zu haben.

Beim schiefen Durchgange eines polarisirten Lichtbündels durch eine Glasplatte ändert sich das Azimuth der Polarisation (vgl. oben S. 265). Der benutzte Apparat bestand aus einem polarisirenden Prisma, einer Anzahl hintereinander gestellter Glassäulen und einem Analysator. Zur Zeit der Sonnenwende, meist um die Mittagsstunde, wurde durch geeignet gestellte Spiegel ein Bündel Sonnenstrahlen durch den Apparat von Ost nach West und dann von West nach Ost geschickt. Es sollte dadurch sich im Mittel eine kleine Differenz in der Analysatoreinstellung ergeben.

Nach der hier gegebenen Theorie kann eine solche Differenz nicht bestehen. Denn wenn in irgend einer Stellung des Apparates

1) Vgl. oben S. 109.

2) Ann. de chim. et de phys. (3) 58, S. 129, 1860. — Pogg. Ann. 114, S. 554, 1861.

der Analysator auf Dunkelheit eingestellt ist, so heisst das, dass die Lichtbewegung beschränkt ist auf einen Raum, der sich hinter den Analysator nicht mehr fortsetzt. Dieser Raum ändert, wie wir oben S. 433 erörterten, durch die Bewegung der Erde seine Begrenzung nicht, falls der Strahlengang relativ zum Apparat unverändert gehalten wird, auch wenn krystallinische Medien zur Erzeugung der Begrenzungsfläche S des Lichtraumes benutzt werden. Daher müsste die Dunkelstellung des Analysators unabhängig sein von der Orientirung des Apparates gegen die Erdbewegung. Es ist jedenfalls wünschenswerth, dass dieser Versuch Fizeau's noch einmal wiederholt wird; vorläufig können wir es wohl noch als zweifelhaft hinstellen, ob wirklich in diesem Punkte ein Widerspruch mit der hier gegebenen Theorie und der Erfahrung besteht.

11. Der Interferenzversuch Michelson's. Die Zeit, welche das Licht gebraucht, um sich zwischen zwei in Ruhe befindlichen Punkten A und B fortzupflanzen, die den Abstand l besitzen sollen, beträgt $t_1 = l/c$, falls c die Lichtgeschwindigkeit ist. Wir wollen uns den Vorgang im Vacuum, oder, was hier gleichbedeutend ist, in Luft denken. Wenn beide Punkte A und B eine gemeinsame Geschwindigkeit v in Richtung der Lichtstrahlen besitzen, so ändert sich die Uebergangszeit t_1' des Lichtes zwischen A und B. Nämlich nach der Zeit t_1' muss das Licht nicht nur die Strecke l durchlaufen haben, sondern auch diejenige Strecke, welche der Punkt B in der Zeit t_1' zurückgelegt hat, d. h. im Ganzen die Strecke $l + vt_1'$, sodass die Relation besteht:

$$t_1'c = l + vt_1'. \tag{45}$$

Wenn das Licht bei B reflectirt wird, so braucht es, um wieder nach A zurückzugelangen, die Zeit t_2', wobei

$$t_2'c = l - vt_2' \tag{46}$$

ist. Denn dieser Fall unterscheidet sich vom Vorigen nur dadurch, dass A sich den reflectirten Lichtstrahlen entgegen bewegt. Daher ist die ganze Zeit t', in welcher das Licht zwischen den beiden Punkten A und B hin und zurückgeht, nach (45) und (46):

$$t' = t_1' + t_2' = \frac{l}{c}\left(\frac{1}{1 - v/c} + \frac{1}{1 + v/c}\right),$$

oder

$$t' = \frac{2l}{c}\left(1 + \left[\frac{v}{c}\right]^2\right), \tag{47}$$

falls wir bis auf 2. Ordnung in v/c entwickeln. Die Uebergangszeit t' wird also erst in 2. Ordnung durch die gemeinsame Bewegung von A und B beeinflusst, immerhin müsste dieser Einfluss durch eine empfindliche Interferenzmethode nachweisbar sein.

Der Versuch wurde im Jahre 1881 von Michelson[1]) ausgeführt, indem er eine Art Interferentialrefractor verwendete, welcher zwei gleich lange, horizontale, zu einander senkrechte Arme P und Q besass (vgl. Figur 57 auf S. 140). Es kamen zwei Lichtbündel zur Interferenz, von denen das eine längs P hin und her ging, das andere längs Q. Der ganze Apparat konnte um eine verticale Axe gedreht werden, und es wurden ihm die beiden Lagen gegeben, in denen einerseits P, andererseits Q möglichst in die Richtung der Erdbewegung fiel. Man hätte eine Verschiebung der Interferenzstreifen bei der Drehung des Apparates von der einen Lage in die andere erwarten sollen.

Wir wollen zunächst diese Verschiebung genauer berechnen. Es möge der Arm P in der Richtung der Erdbewegung v liegen, der Arm Q senkrecht dagegen. A sei der Kreuzungspunkt der Arme P und Q. Die Zeit t', in welcher das Licht längs P hin und zurückgeht, ist durch (47) gegeben. Die Zeit t'', in welcher das Licht längs des Armes Q hin und zurückgeht, ist nun aber nicht etwa einfach durch $t'' = 2l : c$ gegeben, falls auch der Arm Q die Länge l hat, sondern es ist zu berücksichtigen, dass der Kreuzungspunkt A der beiden Arme P und Q, von denen das Licht ausgeht und nach dem es zur Zeit t' durch Reflexion in P zurückkehrt, verschiedene Lagen im Raum einnimmt. Dieser Kreuzungspunkt A hat sich nämlich um vt' verschoben (vgl. Figur 107). Wir wollen die Anfangslage des Kreuzungspunktes A durch A_1, die Endlage durch A_2 bezeichnen. Damit das Licht daher von A_1 ausgehend durch Reflexion am Ende des Armes Q zum Punkte A_2 geworfen wird, muss der reflectirende Spiegel in Q etwas schief gegen die Wellennormale stehen, das Licht hat den Weg $2s$ zu durchlaufen, wobei ist:

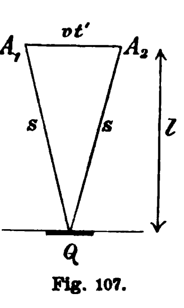


Fig. 107.

$$s^2 = l^2 + \left(\frac{vt'}{2}\right)^2,$$

1) Americ. Journ. of Science (3) 22, S. 120, 1881.

und $t'' = 2s : c$ bezeichnet die Zeit, welche das Licht zum Durcheilen des Armes Q hin und zurück gebraucht. Unter Rücksicht auf (47) ist nun mit Entwickelung bis auf Glieder 2. Ordnung in v:

$$t'' = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{8l^2} t'^2\right) = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right), \tag{48}$$

sodass entsteht

$$t' - t'' = \frac{l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}. \tag{49}$$

Wenn diese Zeitdifferenz gleich einer ganzen Periode T wäre, so würden die Interferenzfransen um eine ganze Fransenbreite verschoben sein gegenüber ihrer Lage, die ohne Erdbewegung vorhanden wäre, d. h. für $v = o$. Drückt man daher die Verschiebung δ der Interferenzfransen in Bruchtheilen von Streifenbreiten aus, so folgt aus (49):

$$\delta = \frac{t' - t''}{T} = \frac{l}{cT} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{l}{\lambda} \zeta^2, \tag{50}$$

wobei ζ der Aberrationswinkel ist. Nach S. 108 beträgt $\zeta = 20{,}5''$ $= 20{,}5 \,.\, \pi : 180 \,.\, 60^2 = 0{,}995 \,.\, 10^{-4}$ in Bogenmaass.

Die Verschiebung der Interferenzfransen, wenn einmal P in Richtung der Erdbewegung liegt, das anderemal aber Q in dieser Richtung, müsste das Doppelte von δ betragen.

Nun war aber keine Verschiebung der Interferenzfransen zu beobachten. Da indess bei diesem Versuch die Empfindlichkeit der Methode noch nicht genügend war, so wurde dieselbe später von Michelson und Morley[1]) dadurch gesteigert, dass jedes Lichtbündel durch Spiegel mehrfach hin und herreflectirt wurde. Dadurch wurde derselbe Effect erzielt, als ob die Arme P und Q viel länger gewesen wären. Jedes Lichtbündel hatte so einen Weg von 22 Metern im Ganzen zu durchlaufen (d. h. es ist $l = 11$ m zu setzen). Der Apparat war auf einer schweren Steinplatte montirt, welche auf Quecksilber schwamm, und konnte so leicht um eine verticale Axe gedreht werden. Bei dieser Drehung hätte man nach Formel (50) eine Verschiebung der Interferenzfransen von $2\delta = 0{,}4$ Streifenbreite erwarten sollen, es ergaben sich aber Verschiebungen von höchstens 0,02 der Streifendistanz; dieselben dürften wohl von Beobachtungsfehlern herrühren.

1) Amer. Journ. of Science (3) 34, S. 333, 1887. — Phil. Mag. (5) 24, S. 449, 1887.

Um diesen Widerspruch zu erklären,[1] kann man versucht sein, die Theorie umzustossen, d. h. den Aether nicht in absoluter Ruhe anzunehmen, sondern zu schliessen, dass der Aether an der Erdbewegung Theil nimmt. Die Erklärung der Aberration stösst dann aber auf unüberwindliche Schwierigkeiten. — Einen anderen Weg zur Erklärung des negativen Resultates beim Michelson'schen Interferenzversuch bietet die von Lorentz und Fitzgerald gemachte Hypothese, dass **die Länge eines festen Körpers abhängig ist von der absoluten Bewegung desselben im Raume.**

In der That, wenn der in Richtung der Erdbewegung liegende Arm l um $l\frac{v^2}{2c^2}$ kürzer ist, als der andere, so würde hierdurch die Zeitdifferenz $t'-t''$, wie sie in (49) berechnet ist, gerade compensirt werden, d. h. dann würde, dem Versuch entsprechend, sich keine Verschiebung der Interferenzfransen ergeben.

So befremdend die Hypothese auf den ersten Blick erscheinen mag, dass die Dimensionen eines Körpers von seiner absoluten Bewegung als abhängig erscheinen, so liegt sie doch schliesslich gar nicht so fern, sobald man annimmt, dass auch die zwischen den Molecülen des Körpers wirkenden sogenannten Molecularkräfte gerade so wie die elektrischen und magnetischen Kräfte durch den Aether vermittelt werden, und dass daher eine Translation im Aether die Molecularkräfte beeinflussen kann, gerade so, wie die dargelegte Theorie die Anziehung oder Abstossung zwischen elektrisch geladenen Theilchen als modificirt ergiebt durch eine Translation der Theilchen im Aether. Da v^2/c^2 den Werth 10^{-8} besitzt, so würde z. B. der mit der Erdbewegung zusammenfallende Durchmesser der Erde nur um 6,5 cm verkürzt werden.

---

1) Sutherland (Phil. Mag. (5) 45, S. 23, 1898) erklärt das negative Resultat Michelson's durch eine nicht genügend genaue Justirung des Apparates. Indess ist dieser Einwand (nach einer mir brieflich gemachten Mittheilung von H. A. Lorentz) nicht stichhaltig, wenn man, wie es stets der Fall ist, mit dem Fernrohr auf grösste Deutlichkeit der Interferenzfransen einstellt.

III. Abschnitt.

Die Strahlung der Körper.

Kapitel I.

Die Strahlung in energetischer Deutung.

1. Das Emissionsvermögen. Wir haben früher (S. 72) photometrische Grundsätze mit Hülfe gewisser Definitionen abgeleitet, deren Berechtigung sich dadurch erwies, dass die so berechneten Beleuchtungsstärken oder Helligkeiten in Uebereinstimmung mit den durch das Auge wahrnehmbaren Thatsachen standen. Wir können nun aber an Stelle dieses physiologischen, subjectiven Maasses uns leicht ein physikalisches, objectives Maass für die Wirkung einer Lichtquelle verschaffen, indem wir die Wärmeentwickelung beobachten in irgend einem Körper, welcher die Strahlen der Lichtquelle absorbirt. Hierdurch kommt nun allerdings ein neuer Begriff in die photometrischen Definitionen hinein, welcher bei der physiologischen Messung mit Hülfe des Auges nicht eingeführt zu werden brauchte, nämlich der Begriff der Zeit, da die Wärme, welche in einem absorbirenden Körper entwickelt wird, proportional der Zeit ist. Die Wärme muss nach energetischem Grundsatz entstanden sein durch ein gewisses Energiequantum, welches die Lichtquelle in den absorbirenden Körper hineingesandt hat. Wir definiren demgemäss als die Gesammt-Emission E einer Lichtquelle Q die von Q in der Zeiteinheit durch Strahlung in die Umgebung entsandte Energie.

Die strahlende Energie besteht nun im Allgemeinen aus Schwingungen sehr verschiedener Wellenlängen λ. Betrachten wir das Energiequantum, welches im Gebiete zwischen den Wellenlängen

λ und $\lambda + d\lambda$ liegt, so muss dasselbe in der Form $E_\lambda \cdot d\lambda$ zu schreiben sein. Den Factor E_λ wollen wir die Emission für die Wellenlänge λ nennen.

Die Emission zwischen den Wellenlängen λ_1 und λ_2 ist danach

$$E_{12} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda \cdot d\lambda, \tag{1}$$

und die Gesammtemission

$$E = \int_0^\infty E_\lambda \cdot d\lambda. \tag{2}$$

Die Emission eines Körpers hängt, abgesehen von seiner Natur, auch von der Grösse und Gestalt seiner Oberfläche ab. Ein Begriff, der von diesen Nebenumständen frei ist, ist das Emissionsvermögen eines Körpers. Darunter wird die (nach aussen gehende) Emission der Einheit der Oberfläche des Körpers verstanden.

2. Die Strahlungsintensität einer Fläche. Der früher (S. 72) ausgesprochene Grundsatz, dass die Lichtmenge constant bleibt für jeden Querschnitt einer Lichtröhre, d. h. einer Röhre, deren Seiten von Lichtstrahlen gebildet werden, erscheint vom energetischen Standpunkte nothwendig, da man die Lichtmenge als Energiefluss in der Zeiteinheit interpretirt. Denn, wie wir oben S. 252 ableiteten, bilden die Lichtstrahlen die Bahnen des Energieflusses, d. h. durch die Seitenflächen einer Lichtröhre tritt weder Energie ein noch aus. Folglich muss der Energiefluss durch jeden Querschnitt einer Lichtröhre derselbe sein, da in jeden Raumtheil gleich viel Energie ein- wie ausströmen muss, falls derselbe nicht eine Strahlungsquelle enthält, oder die Energie der Strahlung absorbirt.

Wir können daher den Energiefluss, den ein kleines Flächenelement ds innerhalb eines Elementarkegels vom räumlichen Oeffnungswinkel $d\Omega$ durch Strahlung entsendet, in der Form schreiben (vgl. die frühere Formel (69) der S. 77):

$$dL = i\, ds \cos \varphi\, d\Omega, \tag{3}$$

wobei φ den Neigungswinkel des Flächenstückes ds gegen die Axe des Elementarkegels, d. h. gegen die betrachtete Strahlenrichtung von ds, bezeichnet. i soll die Strahlungsintensität der Fläche ds genannt werden.

Wenn dem Auge eine gekrümmte strahlende Fläche an allen Stellen gleich hell erscheint, so muss, wie wir S. 76 ableiteten, i constant, d. h. unabhängig von der Neigung φ sein. Ob i nach energetischen Grundsätzen constant ist, oder nicht, wollen wir später discutiren. Wenn wir mal voraussetzen, dass i constant wäre, so berechnet sich aus (3) der Energiefluss, den ds innerhalb eines endlichen Kreiskegels entsendet, dessen Mantelstrahlen den Winkel U mit der Normale auf ds bilden, nach der auf S. 77 abgeleiteten Formel (73) zu:

$$L = \pi i ds \sin^2 U. \tag{4}$$

Setzen wir daher $U = \pi/2$ und dividiren durch ds, so erhalten wir das Emissionsvermögen e von ds in der Form:

$$e = \pi i. \tag{5}$$

Man kann auch hier i als Gesammtstrahlungsintensität unterscheiden von i_λ, der Strahlungsintensität für eine Wellenlänge λ. Bezeichnet man mit e_λ das Emissionsvermögen für die Wellenlänge λ, so ist auch

$$e_\lambda = \pi i_\lambda. \tag{6}$$

3. Das mechanische Aequivalent der Lichteinheit. Als Lichteinheit haben wir oben S. 75 das Hefnerlicht genannt. Die Gesammtemission derselben hat Tumlirz[1]) innerhalb eines horizontal liegenden Kegels vom räumlichen Oeffnungswinkel 1 gefunden zu 0,1483 Grammkalorien pro Secunde, Angström[2]) zu 0,22 Grammkalorien pro Secunde. Benutzt man die Zahl von Tumlirz, so würde sich, falls die Hefnerlampe nach allen Richtungen gleichmässig strahlte, die Gesammtemission derselben, d. h. die Energie, welche sie ringsherum (in einem vollen Oeffnungswinkel 4π) aussendet, berechnen zu

$$E = 4\pi \cdot 0{,}1483 \frac{g \cdot cal}{sec} = 1{,}86 \frac{g \cdot cal}{sec},$$

oder, da 1 Grammkalorie gleich $419 \cdot 10^5$ erg, d. h. absolute mechanische Arbeitseinheit ist (mechanisches Wärmeäquivalent), so wäre E in absolutem cgs-Maass:

1) Wied. Ann. 38, S. 650, 1889.
2) Wied. Ann. 67, S. 648, 1899.

$$E = 78 \cdot 10^6 \frac{erg}{sec}. \tag{7}$$

Von dieser Energie kommt nur 2,4 % auf das sichtbare Licht.[1]) Die Emission für Licht beträgt daher

$$E' = 1{,}9 \cdot 10^6 \frac{erg}{sec}. \tag{8}$$

Wenn wir daher unter der Lichteinheit die Energie verstehen, welche die Lichtstrahlen der Hefnerlampe in horizontaler Richtung innerhalb eines Kegels vom räumlichen Oeffnungswinkel 1 (d. h. auf 1 cm^2 in 1 cm Entfernung) pro sec. entsenden, so ist:

$$1 \text{ Lichteinheit} = 1{,}51 \cdot 10^5 \frac{erg}{sec}. \tag{9}$$

Diese Zahl ist also das mechanische Aequivalent der Lichteinheit.

Die Einheit der Beleuchtungsstärke bildete die Meterkerze (cf. oben S. 75), d. h. die Lichtmenge, welche die Hefnerlampe in 1 m Entfernung auf die Flächeneinheit (1 cm^2) sendet. Der räumliche Oeffnungswinkel beträgt in diesem Falle $1 : 100 \cdot 100$, es ist daher nach (9)

$$1 \text{ Meterkerze} = 15 \cdot \frac{erg}{sec}. \tag{10}$$

Das Auge empfängt daher bei der Beleuchtungsstärke von 1 Meterkerze, d. h. wenn es sich in einem Abstand von 1 m von der Kerze befindet, und falls die Pupillenöffnung 3 mm beträgt, etwa die Energie von *1 erg* in der *sec.*, dieser Energiefluss könnte erst in einer Zeit von 1 Jahr und 89 Tagen 1 gr. Wasser um 1° Celsius erwärmen; hierdurch gewinnt man eine Vorstellung von der ungeheueren Empfindlichkeit des Auges. Wenn dasselbe noch einen Stern 6. Grösse wahrnimmt, so reagirt das Auge sogar noch auf eine Beleuchtungsstärke von etwa $1 \cdot 10^{-8}$ Meterkerzen, da ein Stern 6. Grösse etwa dieselbe Helligkeit hat, wie die Hefnerlampe in 11 km Entfernung. In diesem Falle erhält das Auge (bei

1) Experimentell wurde diese Zahl dadurch ermittelt, dass die Wärmestrahlen durch eine Wasserschicht absorbirt und so von den Lichtstrahlen getrennt wurden.

3 mm Pupillenöffnung) also einen Energiefluss von $1 \cdot 10^{-8}$ *erg* pro *sec.*

Die sogenannte Normalkerze (Paraffinkerze von 2 cm Durchmesser, Flammenhöhe 50 mm) hat etwa eine 1,24 mal stärkere Emission als die Hefnerlampe.

4. Die Sonnenstrahlung. Nach Langley wird etwa $1/3$ der Energie der Sonnenstrahlung in der Erdatmosphäre absorbirt, falls die Sonne im Zenith steht. Nach seinen Messungen würde die Sonne pro Minute dem Quadratcentimeter der Erde bei senkrechter Incidenz etwa 3 gr. *cal* (Genauer 2,84 gr. *cal*) zustrahlen (Solarconstante), falls die Atmosphäre nicht absorbirte. (Angström erhält 4 gr. *cal* pro Minute.) Der Energiefluss auf der Erdoberfläche mit Rücksicht auf die Absorption in der Atmosphäre wäre daher nach Langley etwa 2 gr. *cal* pro Minute $= 1{,}3 \cdot 10^{6}$ *erg/sec*. Die oben S. 417 benutzte (Pouillet'sche) Zahl hierfür ist etwas kleiner. — Die Energie des sichtbaren Lichtes zwischen den Fraunhofer-schen Linien A und H_2 beträgt etwa 35 % der Gesammtstrahlung, d. h. es ist die sogenannte Beleuchtungsstärke B der Sonne (ohne Absorption in der Luft) nach Langley's Messungen:

$$B = 6{,}9 \cdot 10^{5} \frac{erg}{sec} = 46300 \text{ Meterkerzen.} \tag{11}$$

Rechnet man als mittlere Entfernung der Sonne von der Erde $149 \cdot 10^{9}$ m, so beträgt demnach die Lichtstärke der Sonne $1{,}02 \cdot 10^{27}$ Kerzen.

5. Der Wirkungsgrad einer Lichtquelle. Unter dem Wirkungsgrad g einer Lichtquelle versteht man das Verhältniss der Energie der ausgesandten Lichtstrahlen zu der Energie, welche die Lichtquelle zur Unterhaltung ihres Leuchtens in der gleichen Zeit verbraucht.

So verbraucht etwa eine Oellampe (Carcel-Lampe) von 9,4 Kerzenstärke pro Stunde 42 gr. Oel, d. h. in der sec. $1{,}16 \cdot 10^{-2}$ gr. Oel. Die Verbrennungswärme des Oels beträgt 9500 cal pro gr., d. h. $39{,}7 \cdot 10^{10}$ erg. Nun ist in Formel (8) die Lichtemission der Kerzeneinheit gegeben, daher ist für die Oellampe der Wirkungsgrad:

$$g = \frac{9{,}4 \,.\, 1{,}9 \,.\, 10^{6}}{1{,}16 \,.\, 10^{-2} \,.\, 39{,}7 \,.\, 10^{10}} = 0{,}4 \cdot 10^{-2} = 0{,}4\,\% .$$

Der Wirkungsgrad ist also sehr gering, d. h. nur 0,4% der im Oel enthaltenen Energie wird zur Beleuchtung ausgenutzt.

Wesentlich günstiger steht es mit der elektrischen Beleuchtung. Im elektrischen Bogenlichte kann man eine Kerzenstärke mit dem Effectverbrauch von ½ Watt, d. h. $5 \cdot 10^6$ *erg/sec* erzielen. Daher würde für Bogenlicht sein

$$g = \frac{1{,}9 \, . \, 10^6}{5 \, . \, 10^6} = 0{,}38 = 38\% \, .$$

(Bei Glühlampen würde g etwa 5,5% sein.)

Danach muss es praktischer sein, anstatt das Oel direct als Lichtquelle zu verwenden, seine Verbrennungswärme zum Treiben eines Motors zu benutzen, welcher eine Dynamomaschine in Gang erhält, die einen elektrischen Lichtbogen erzeugt. Im Diesel-Motor kann 70% der Energie des Oels in mechanische Energie umgesetzt werden, durch die Dynamomaschine kann etwa 90% davon in elektrische Energie verwandelt werden, welche zur Speisung des Lichtbogens zur Verfügung steht; danach würde der Wirkungsgrad der elektrischen Beleuchtung, berechnet auf den Oelverbrauch, sich treiben lassen auf

$$g = 0{,}38 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 24\% \, .$$

Es ist hierbei allerdings nicht berücksichtigt, dass auch die Kohlen des Lichtbogens abbrennen. Für eine Glühlampe gewöhnlicher Construction, welche etwa 3½ Watt pro Kerze erfordert, würde $g = 3{,}4\%$ sein, berechnet auf den Verbrauch an Heizmaterial des Motors. Für eine Nernst'sche Glühlampe, welche 1 Watt pro Kerze erfordert,[1]) würde sich g steigern auf 12%.

6. Der Druck der Strahlung. Wir wollen den Fall betrachten, dass ebene Wellen von einer constanten Lichtquelle aus senkrecht auf einen absolut schwarzen Körper fallen. Ein solcher Körper ist dadurch definirt, dass er keine Lichtstrahlen reflectirt und alle in ihn eindringenden Strahlen vollkommen absorbirt, d. h. keine hindurchlässt.[2]) Nach der früher gegebenen Theorie

---

1) Je nach der Beanspruchung schwankt der Energieverbrauch zwischen ½ bis 1,8 Watt.

2) Ein vollkommen schwarzer Körper kann leuchten, falls seine Temperatur genügend hoch ist. An Stelle der Bezeichnung „vollkommen schwarz" wäre daher die Bezeichnung „vollkommen absorbirend" zutreffender.

der Reflexion des Lichtes muss ein idealer schwarzer Körper denselben Brechungsindex wie seine Umgebung haben,[1]) damit keine Reflexion eintritt. Ferner muss er einen Absorptionsindex besitzen, derselbe darf aber nur unendlich klein sein, da sonst ebenfalls Reflexion eintreten würde (vgl. das Kapitel über Metallreflexion), auch wenn der Brechungsindex gleich dem der Umgebung wäre. Damit dann kein Licht durch den Körper hindurchdringt, müsste derselbe daher unendlich dick sein. Näherungsweise kann man sich einen schwarzen Körper durch Ueberziehen mit Russ oder, da Russ für Wärmestrahlen durchlässig ist, besser mit Platinmoor herstellen, ferner sind Pech oder Obsidian in Wasserumgebung (nicht in Luft) nahezu schwarze Körper. Am vollkommensten wird eine schwarze Fläche erreicht durch ein enges Loch in einem Hohlkörper. Die in das Loch gelangende Strahlung wird an den Wänden des Hohlkörpers vielfach hin- und herreflectirt und dadurch vollkommen absorbirt, auch wenn die Wände des Hohlkörpers nicht vollkommen schwarz sind. Nur ein kleiner Theil der Strahlung wird aus dem Loch wieder herausreflectirt. Dieser Theil ist um so geringer, je kleiner das Loch im Vergleich zur Oberfläche des Hohlkörpers ist.

Aus den ebenen Wellen, welche auf den schwarzen Körper $\mathfrak{K}$ fallen und welche sich parallel der positiven z-Axe fortpflanzen sollen, wollen wir uns eine Lichtröhre, einen parallel zur z-Axe verlaufenden Cylinder vom Querschnitt q ausgeschnitten denken. Bei $z = 0$ möge Energie einströmen, dieselbe wird im schwarzen Körper, der sich von $z = a$ bis $z + \infty$ erstrecke, vollkommen absorbirt, d. h. in Wärme verwandelt. Dieselbe hat innerhalb der (beliebig grossen) Zeit t den Betrag $\mathrm{E} \cdot q \cdot V \cdot t$, falls E die Energie der Strahlung bezeichnet, welche in der Volumeneinheit des vor $\mathfrak{K}$ befindlichen Mediums vorhanden ist und V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in diesem Medium bedeutet.

Wenn wir nun den schwarzen Körper um die Strecke dz in Richtung der Fortpflanzung des Lichtes verschieben, so fällt auf den Körper innerhalb der Zeit t weniger Energie, als vorhin, nämlich die in dem Volumen $q \cdot dz$ enthaltene Energie des Mediums, d. h. $q \cdot dz \cdot \mathrm{E}$. Die innerhalb der Zeit t im Körper entwickelte Wärme ist daher auch um diesen Betrag (in mechanischem Maass

1) Hiermit ist ausgesprochen, dass die Definition eines schwarzen Körpers von der Natur seiner Umgebung abhängt.

gemessen) geringer, als vorhin. Nun tritt aber in die Lichtröhre durch Strahlung stets die gleiche Energie ein, unabhängig davon, ob $\mathfrak{K}$ verschoben wird oder nicht. Ferner ist in dem Volumen $q \cdot dz$, welches der Körper $\mathfrak{K}$ bei seiner Verschiebung geräumt hat, stets die gleiche elektromagnetische Energie der Strahlung enthalten, d. h. sie ist unabhängig davon, ob dieses Volumen von $\mathfrak{K}$ eingenommen ist oder nicht, da der Brechungsindex, d. h. auch die Dielektricitätsconstante von $\mathfrak{K}$ mit der der Umgebung identisch sein sollte und Reflexion nicht eintritt, d. h. die elektrischen und magnetischen Kräfte an der Oberfläche des Körpers im Medium und in $\mathfrak{K}$ die gleichen sind. Wenn daher bei der Verschiebung von $\mathfrak{K}$ um dz die gleiche innerhalb t in die Lichtröhre eintretende Energie weniger Wärme entwickelt, als wenn $\mathfrak{K}$ nicht verschoben wird, so muss nach dem Princip der Erhaltung der Energie die Differenz compensirt werden durch eine Arbeitsleistung, die mit der Verschiebung von $\mathfrak{K}$ gewonnen ist. Schreiben wir dieselbe in der Form $p \cdot q \cdot dz$, so bezeichnet p den Druck, der auf $\mathfrak{K}$ durch die Strahlung ausgeübt wird. Es muss also nach dieser Ueberlegung sein

$$p \cdot q \cdot dz = q \cdot dz \cdot \mathrm{E},$$

d. h.

$$p = \mathrm{E}. \tag{12}$$

Der Strahlungsdruck, den ebene Wellen bei senkrechter Incidenz auf einen absolut schwarzen Körper ausüben, ist also gleich der in der Volumeneinheit seiner Umgebung enthaltenen Energie der einfallenden Wellen.

Da nach § 4 der Energiefluss der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche $1{,}3 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{sec}}$ pro cm^2 beträgt, so ist also dieser Energiebetrag in $3 . 10^{10}$ cm^3 durchstrahlter Luft enthalten. Folglich ist die Energie in 1 cm^3:

$$\mathrm{E} = \frac{1{,}3 . 10^6}{3 . 10^{10}} = 4 \cdot 10^{-5}.$$

Diesen Druck üben also die Sonnenstrahlen auf ein Quadratcentimeter eines schwarzen Körpers aus. Der Druck ist etwa gleich dem Gewicht von $4 \cdot 10^{-5}$ Milligramm, also so klein, dass er experimentell nicht zu constatiren ist. Dieser im Princip existirende Strahlungsdruck hat aber eine grosse theoretische Bedeutung, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden.

7. Prevost's Theorie des Wärmeaustausches. Jeder Körper strahlt, auch wenn er nicht leuchtet, eine gewisse Energiemenge aus, die um so grösser wird und um so mehr Wellen kurzer Periode enthält, je höher die Temperatur des Körpers wird. Wenn daher zwei Körper A und B von verschiedener Temperatur gegenübergestellt werden, so strahlen beide Körper Energie aus und auch der heissere empfängt strahlende Energie vom kälteren. Die Temperaturen beider Körper gleichen sich dadurch aus, dass der heissere mehr Energie ausstrahlt, als er vom kälteren empfängt und absorbirt, während umgekehrt der kältere mehr Energie empfängt, als ausstrahlt. Diese Auffassung der Strahlungserscheinungen hat zuerst Prevost ausgesprochen.

Wenn daher zur Bestimmung der Emission eines Körpers A die Temperaturerhöhung in einem schwarzen Körper B, welcher die Strahlen von A absorbirt, gemessen wird, so hängt das Resultat von der Temperaturdifferenz der beiden Körper A und B ab. Man würde um so genauer durch die Temperaturerhöhung in B die volle Emission von A messen, je weniger Energie B selber ausstrahlt. Wenn es sich daher z. B. um die Energie der Lichtstrahlen einer Quelle A handelt, deren Wärmestrahlen durch Absorption in einem Wassergefäss vernichtet werden, so kann man diese Leuchtenergie in vollem Betrage durch Absorption in einem schwarzen Körper B messen, welcher gleiche Temperatur wie das Wassergefäss hat. Denn bei Zimmertemperatur sendet B nicht Lichtstrahlen von merklichem Energiebetrage aus, sondern nur Wärmestrahlen, und diese empfängt B in gleichem Betrage vom Wassergefäss zurück. — Dagegen ist die Gesammtemission einer Lichtquelle etwas höher, als sie durch Absorption in einem schwarzen Körper B von Zimmertemperatur gemessen wird, indess ist in Anbetracht der viel höheren Temperatur der Lichtquelle, z. B. der Sonne oder einer Flamme, diese Correction zu vernachlässigen und das Resultat der Messung ist practisch unabhängig von Schwankungen der Temperatur des Körpers B. — Dagegen ist die Temperatur von B sehr wohl zu berücksichtigen, wenn die Emission eines nicht sehr viel heisseren Körper A gemessen werden soll. Hiervon soll im nächsten Kapitel noch mehr die Rede sein.

Kapitel II.

Anwendung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik auf reine Temperaturstrahlung.

1. Die beiden Hauptsätze der Thermodynamik. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ist das Energieprincip, nach welchem mechanische Arbeit nur durch Aufwendung eines gewissen Energiequantums zu gewinnen ist, d. h. durch Zustandsveränderungen der die Arbeitsmaschine speisenden Körper. Obgleich nach diesem Satze ein perpetuum mobile unmöglich ist, d. h. eine Maschine, welche beliebig viel Arbeit erzeugt, ohne dass dabei die sie speisenden Körper eine dauernde Veränderung erlitten, so wäre doch noch eine kostenlos arbeitende Maschine denkbar. Energie nämlich steht genug und kostenlos zur Verfügung, man braucht z. B. nur an das ungeheure Energiequantum, welches als Wärme im Meerwasser enthalten ist, zu denken. Nach dem ersten Hauptsatze wäre nun eine (kostenlos arbeitende) Maschine denkbar, welche dadurch fortwährend nutzbare mechanische Energie schafft, dass sie, in das Meerwasser eingesenkt, demselben beständig Wärme entzieht und dadurch Arbeit leistet. Man hat die Ueberzeugung, dass eine solche Maschine, die in practischer Hinsicht ebenfalls ein perpetuum mobile darstellen würde, unmöglich ist; bei allen Motoren, welche, wie z. B. die Dampfmaschine, Wärme in Arbeit umsetzen, müssen mindestens zwei Wärmereservoire verschiedener Temperaturen zu Gebote stehen: die Kesselfeuerung und die kältere Temperatur der umgebenden Luft oder des Wasserdampfcondensators. Es kann nur allgemein dann Wärme in Arbeit verwandelt werden, wenn ein gewisses Quantum Q einem Reservoir höherer Temperatur entnommen und ein kleineres Wärmequantum Q' an ein kälteres Reservoir abgeliefert wird.

Wir stellen daher als einen allgemeinen Erfahrungssatz auf, dass man nie fortdauernd auf Kosten von Wärme mechanische Arbeit erzeugen kann, wenn nur ein Wärmereservoir von überall gleicher Temperatur zur Verfügung steht. Dieser Gedanke bildet den Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Wir wollen hier zunächst nur eine Folgerung desselben benutzen: Wenn ein nach aussen gegen Wärme- und Arbeits-

abgabe geschütztes (nach aussen abgeschlossenes) System von Körpern zu irgend einer Zeit überall die gleiche Temperatur hat, so kann, falls man das System sich selbst überlässt **und falls keine Veränderungen in der Natur der Körper eintreten,** niemals eine Temperaturdifferenz im System entstehen. Denn man könnte eine solche Temperaturdifferenz zum Treiben einer Arbeitsmaschine benutzen. Wenn dann durch ihre Wirkung sich die Temperaturdifferenz ausgeglichen haben sollte, so würde wieder von selbst eine solche im System entstehen. Dann könnte man wiederum Arbeit daraus gewinnen und so in infinitum, obgleich ursprünglich nur Wärme von überall derselben Temperatur zu Gebote gestanden hat. Dies würde gegen den zweiten Hauptsatz verstossen. — Es ist wichtig, zu bemerken, dass man auf diesem Wege Wärme von ursprünglich einerlei Temperatur nur dann fortdauernd zum Arbeitsgewinn benutzen könnte, falls dabei die Natur der Körper des Systems ungeändert bleibt. Denn wenn diese sich verändern, z. B. chemische Verbindungen gebildet werden, so hört die Arbeitsfähigkeit des Systems schliesslich auf. Durch Eintreten chemischer Veränderungen kann also wohl eine ursprünglich vorhandene Temperaturgleichheit gestört werden; dies steht nicht im Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz; wir können diese Erscheinung ja auch an jedem Verbrennungsprocess beobachten.

2. Temperaturstrahlung und Luminiscenz. Jeder Körper strahlt Energie aus, mindestens in der Form langwelliger Wärmestrahlen. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder verändert sich der Körper seiner Natur nach bei diesem Strahlungsvorgange nicht, er würde fortdauernd in gleicher Weise strahlen, falls man durch Zufuhr von Wärme seine Temperatur constant hält. Diesen Vorgang wollen wir als reine Temperaturstrahlung bezeichnen. Oder der Körper verändert sich bei der Strahlung, es würde, allgemein gesprochen, nicht fortdauernd dieselbe Strahlung bestehen bleiben, auch wenn die Temperatur constant gehalten würde. Diesen Vorgang bezeichnet man als Luminiscenz. Die Ursache der Strahlung liegt in diesem Falle nicht in der Temperatur des Systemes, sondern in einer anderen Energiequelle, z. B. bezeichnet man als Chemi-Luminiscenz die durch chemische Veränderungen veranlasste Strahlung, wie sie z. B. beim Phosphor oder faulenden Holze durch langsame Oxydation bewirkt wird. Die bei anderen Körpern beobachtete Erscheinung des sogenannten Phos-

phorescirens, d. h. des Nachleuchtens von Körpern nach der Belichtung, wird als Photo-Luminiscenz bezeichnet. Hier ist die Energiequelle der Strahlung das ursprünglich in den Körper von aussen eingestrahlte Licht, welches vielleicht irgend welche Veränderungen in der Natur, z. B. dem Molecülbau, des Körpers bewirkt hat, die nun bei der Phosphorescenz wieder rückgängig werden. Das Leuchten von Geissler'schen Röhren im hochgespannten elektrischen Strome nennt man Elektro-Luminiscenz etc.

Es ist nach dem in § 1 Gesagten klar, dass der zweite Hauptsatz der Thermodynamik nur Folgerungen für reine Temperaturstrahlungen ziehen lässt. Nach der oben S. 450 genannten Vorstellung des Wärmeaustausches folgt z. B., dass ein einmal vorhandenes Temperaturgleichgewicht in einem nach aussen abgeschlossenen System von Körpern durch reine Temperaturstrahlung derselben niemals gestört werden kann; aber wohl könnte durch Luminiscenz der Körper eine Störung des Temperaturgleichgewichts eintreten.

Im Folgenden wird immer nur reine Temperaturstrahlung vorausgesetzt.

3. Das Emissions-Vermögen eines vollkommen spiegelnden oder vollkommen durchsichtigen Körpers ist Null. Denken wir uns eine sehr grosse Platte eines beliebigen Körpers K eingeschlossen zwischen zwei Platten SS von vollkommenen Spiegeln. Unter solchen soll ein Körper verstanden werden, welcher die ganze, auf ihn von aussen fallende Strahlungsenergie reflectirt. — Ursprünglich sollen K und SS gleiche Temperaturen haben. Man kann K und SS denken als Theile eines grösseren, nach aussen abgeschlossenen Körpersystems von constanter Temperatur. Wenn nun K Energie emittirt, so empfängt K dieselbe durch Reflexion an SS in vollem Betrage zurück. K soll ein von Null verschiedenes Absorptionsvermögen besitzen. Unter dem Absorptionsvermögen[1] a eines Körpers oder einer Fläche soll verstanden werden das Verhältniss der absorbirten Energie zu der von aussen zugestrahlten Energie. Wenn daher die Energiemenge 1 zugestrahlt wird, so wird die Energiemenge a absorbirt, die Energiemenge

1) Das Absorptionsvermögen a ist wohl zu unterscheiden von dem oben S. 333 eingeführten Absorptionsindex $\varkappa$. Ein Metall, z. B. Silber, hat einen sehr grossen Absorptionsindex $\varkappa$, aber ein äusserst kleines Absorptionsvermögen a, da das Silber nahezu alle einfallende Energie reflectirt.

$1-a$ reflectirt, falls der Körper keine Energie durchlässt. Diese Grösse $1-a$ ist daher das Reflexionsvermögen $r=1-a$, falls der Körper so dick ist, dass keine Energie ihn durchdringt, sonst ist $r<1-a$.

Die von den Spiegeln *SS* nach *K* reflectirte Energie wird nun in *K* theilweise absorbirt, theilweise aber wiederum nach *SS* reflectirt. Diese Energie wird aber wieder vollkommen an *SS* nach *K* zurückreflectirt u. s. w. Man erkennt leicht, dass der Körper *K* jedenfalls im stationären Zustande seine ganze ausgesandte Energie durch wiederholte Reflexion an den vollkommenen Spiegeln *SS* in vollem Betrage wieder absorbiren muss, da *SS* selber nichts von dieser Energie absorbiren. Wenn daher die Spiegel *SS* ebenfalls Energie ausstrahlen würden, so würde die Temperatur des Körpers *K* erhöht werden, da dann *K* ausser der von ihm selbst ausgesandten Energie noch einen Theil[1]) der von *SS* emittirten Energie absorbirt. Dagegen die Temperatur der Spiegel würde sinken, da sie emittiren, aber nichts absorbiren. Da nun durch eine Temperaturstrahlung nach dem zweiten Hauptsatze nicht die ursprünglich vorhandene Temperaturgleichheit gestört werden kann, so schliessen wir, dass das Emissionsvermögen eines vollkommenen Spiegels gleich Null ist. — Wenn daher irgend ein Körpersystem von einer nach aussen vollkommen spiegelnden Fläche umgeben ist, so ist es gegen Strahlung nach aussen vollkommen abgeschlossen. In gleicher Weise kann man schliessen, dass das Emissionsvermögen eines vollkommen durchsichtigen Körpers gleich Null ist. Denn denken wir uns einen beliebigen absorbirenden Körpers *K* von einem durchsichtigen Körper umgeben, und das Ganze in eine, nach Aussen und Innen spiegelnde Hülle eingeschlossen, so musste sich der durchsichtige Körper abkühlen, wenn er emittirte, da er nichts absorbirt.

4. Kirchhoff's Gesetz über den Zusammenhang der Emission mit der Absorption. Wir denken uns ein sehr kleines Flächenelement ds aus einer absorbirenden Substanz im Centrum einer spiegelnden Hohlkugel vom Radius 1, welche an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen zwei gleiche, kleine Oeffnungen $d\Omega$ besitzt (vgl. Figur 108).

ds soll klein gegen $d\Omega$ sein. Die von ds durch je eine

1) Nämlich den von *SS* nach dem Körper *K* hingesandten Theil der ganzen Strahlungsmenge.

Oeffnung $d\Omega$ ausgestrahlte Energie schreiben wir nach Formel (3) auf S. 443:

$$dL = i ds \cos \varphi \, d\Omega, \tag{1}$$

wobei φ den Neigungswinkel der Normale auf ds gegen den mittleren, durch $d\Omega$ und ds gelegten Strahl bezeichnet. i wird die Strahlungsintensität von ds in der Richtung φ genannt. Ob i von φ abhängt, lassen wir zunächst dahingestellt. Alle Energie, welche ds in anderer Richtung entsendet, erhält es durch Reflexion an der Hohlkugel zurück und absorbirt diese Energie (nach wiederholter Hin- und Herreflexion) schliesslich vollständig. Die Hohlkugel sei nun rings umgeben von einem schwarzen Körper K', dessen äussere Oberfläche vollkommen spiegelnd sei. K' strahlt daher nur nach Innen. Ein Theil (dE') der von K' entsandten Energie gelangt durch die beiden Oeffnungen $d\Omega$ auf das Element ds und wird dort theilweise absorbirt. Von einem Flächenelement ds' der schwarzen Hülle aus gesehen, erscheint das Flächenelement ds unter dem räumlichen Winkel

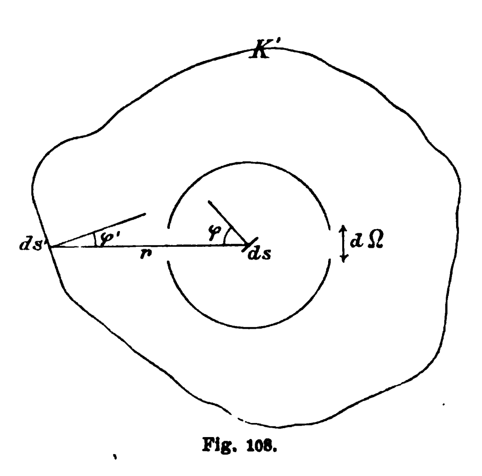


Fig. 108.

$$d\Omega' = \frac{ds}{r^2} \cos \varphi, \tag{2}$$

falls r die Entfernung von ds' und dem Orte von ds bezeichnet. Die von ds' nach ds ausgestrahlte Energie ist also

$$dL' = i' \, ds' \cos \varphi' \, d\Omega', \tag{3}$$

falls i' die Strahlungsintensität der schwarzen Fläche in der Neigung φ' gegen die Normalenrichtung bedeutet. Die Gesammtheit aller auf ds strahlenden Flächenelemente ds' hat nun die Grösse:

$$\Sigma ds' = r^2 \, d\Omega : \cos \varphi', \tag{4}$$

wobei r und φ' für die einzelnen Flächenelemente ds' als constant

angenommen ist. Daher schreibt sich die ganze von K' durch eine Oeffnung $d\Omega$ auf das Flächenstück ds zugestrahlte Energie

(5) $$dE' = \Sigma dL' = i' \cdot r^2 \cdot d\Omega d\Omega',$$

oder nach (2):

(6) $$dE' = i' d\Omega \, ds \cos\varphi .$$

Ebenso wird von der anderen Seite dem ds die Energie zugesandt:

(7) $$dE'' = i'' \cdot d\Omega \, ds \cos\varphi ,$$

wobei i'' von i' unterschieden ist, falls nämlich diese Grösse von dem Winkel φ' abhängen sollte und falls φ' auf beiden Seiten der Hülle verschieden ist.

Wenn nun ursprünglich Temperaturgleichgewicht herrscht, so darf dieses durch die Strahlung nicht gestört werden. Die von ds nach beiden Seiten durch die beiden Oeffnungen $d\Omega$ emittirte Energie $2dL$ muss also compensirt werden durch die absorbirte Energie $a\,(dE' + dE'')$, falls a das Absorptionsvermögen von ds für die Strahlungsrichtung φ bezeichnet. Nach dem zweiten Hauptsatze ist also nach (1), (6) und (7):

(8) $$2i = a\,(i' + i'').$$

Diese Gleichung muss unverändert bleiben, falls die schwarze Hülle K' ihre Gestalt ändert, wodurch φ' variirt. Daher muss $i' = i''$ unabhängig von φ' sein, d. h. die Strahlungsintensität i' einer schwarzen Fläche ist unabhängig von der Richtung der Strahlung. — Aus (8) folgt daher

(9) $$i = a \cdot i'.$$

Wenn man als Fläche ds' verschiedene schwarze Körper wählt, während die Substanz von ds unverändert bleibt, so muss daher nach (9) allemal auch i' constant bleiben, d. h. die Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers hängt von seiner speciellen Natur nicht ab, sondern ist eine universelle Function p der Temperatur.[1]) Die Beziehung (9) kann man daher so aussprechen:

1) Diese Function kann noch durch den Brechungsindex des durchstrahlten Raumes beeinflusst werden. Davon soll weiter unten die Rede sein. Hier ist zunächst dieser Brechungsindex $= 1$ angenommen, d. h. der durchstrahlte Raum soll das Vacuum sein.

Das Verhältniss zwischen der Strahlungsintensität und dem für gleiche Strahlneigung geltenden Absorptionsvermögen eines beliebigen Körpers hängt nur von seiner Temperatur ab; dies Verhältniss ist nämlich gleich der Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers von gleicher Temperatur. Diese Sätze rühren von Kirchhoff[1]) her. Die aufgestellten Sätze gelten nicht nur für die Gesammtstrahlungsintensität, sondern auch für die Strahlungsintensität jeder beliebigen Wellenlänge λ gilt das Kirchhoff'sche Gesetz:

$$i_\lambda = a_\lambda \cdot i_\lambda'. \tag{9'}$$

Bringen wir nämlich hinter einer Oeffnung $d\Omega$ des Hohlspiegels (S. 455) ein dispergirendes, vollkommen durchsichtiges Prisma an, so können wir eine ganz bestimmte Wellenlänge der vom Flächenstück ds nach aussen gesandten Strahlen auf einen schwarzen Körper fallen lassen, während alle anderen Strahlengattungen durch vollkommene Spiegel wieder durch das Prisma und die Oeffnung $d\Omega$ auf ds zurückgeworfen werden. Also auch allein innerhalb eines schmalen Bereiches von Wellenlängen, die zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, muss die vorige Betrachtung gelten, welche zur Gleichung (9) führte.

Die Gleichung (9) oder (9') muss sogar für jede bestimmte Polarisationsrichtung der Strahlen einzeln gelten. Denkt man sich nämlich hinter $d\Omega$ ein Prisma eines durchsichtigen, doppelbrechenden Krystalles aufgestellt, so werden die Wellen verschiedener Polarisationsrichtung räumlich getrennt in zwei Wellenzüge. Den einen Wellenzug kann man nun wiederum allein auf einen schwarzen Körper fallen lassen, während der andere durch Spiegelung nach ds zurück gelangt. Die oben angestellten Betrachtungen führen dann zur Gleichung (9'), welche also auch für irgend eine beliebige Polarisationsrichtung giltig ist.

5. Folgerungen aus dem Kirchhoff'schen Gesetz. Wenn man einen schwarzen Körper allmählich erhitzt, so sendet er von einer gewissen Temperatur an, die etwa bei 525^0 Cels. liegt, sichtbares Licht aus. Dasselbe hat zunächst grosse Wellenlängen[2])

---

1) Siehe Ostwald's Klassiker, No. 100.

2) Das erste ausgesandte Licht wird bei subtiler Beobachtung nicht roth, sondern gespenstergrau gesehen. Dies erklärt sich dadurch, dass die Netzhaut des menschlichen Auges zwei lichtempfindliche Organe, die Stäbchen und Zapfen,

(Rothglut), bei weiterer Temperatursteigerung treten auch kleinere Wellenlängen in merkbarer Menge hinzu (bei 1000° beginnt die Gelbgluth, bei 1200° die Weissgluth). Die Gleichung (9') besagt nun, dass kein Körper bei niedrigerer Temperatur zu leuchten beginnen kann, als ein schwarzer Körper, sondern dass alle Körper bei gleicher Temperatur (etwa bei 525°) anfangen, (roth) zu leuchten (Draper's Gesetz).[1] Die Intensität des Leuchtens hängt allerdings vom Absorptionsvermögen a_i des Körpers bei der betreffenden Temperatur ab. Blanke Metalle z. B., die auch bei hoher Temperatur ihre grosse Reflexionsfähigkeit bewahren, leuchten viel weniger, als Russ. Ein Russstreifen auf der Oberfläche eines Metalls tritt daher beim Glühen als heller Streifen auf dunkelem Grunde hervor. — Ebenso leuchtet ein durchsichtiger Glasstab bei Glühtemperatur sehr wenig, weil sein Absorptionsvermögen sehr klein ist. — Bildet man aus irgend einem Metall einen Hohlkörper mit einem kleinen Loch, so verhält sich dieses wie ein nahezu idealer schwarzer Körper (cf. oben S. 448). Das Loch muss also beim Glühen sich hell abzeichnen auf der äusseren Fläche der Hohlkugel, da diese nur geringeres Absorptionsvermögen hat.

Bei allen nicht schwarzen Körpern mit glatter Oberfläche nimmt das Reflexionsvermögen zu, wenn der Einfallswinkel der Strahlung wächst, daher muss das Absorptionsvermögen abnehmen. Nach (9') ist daher bei allen nicht schwarzen Flächen die Strahlungsintensität i für senkrecht aus der Fläche austretende Strahlung grösser, als für schiefe Strahlung. Das *cos*-Gesetz der Strahlung gilt daher streng nur für schwarze Flächen.

Bei schiefer Incidenz hängt, wie wir oben S. 262 berechneten, das Reflexionsvermögen, und daher das Absorptionsvermögen eines Körpers vom Polarisationszustande der einfallenden Strahlen ab.

---

besitzt. Erstere sind die lichtempfindlichsten, sie sind aber farbenblind. Der gelbe Fleck, d. h. der Ort des deutlichsten Sehens der Netzhaut, besitzt nun viel Zapfen, aber wenig Stäbchen. Daher findet der erste Lichteindruck (grau) in peripheren Netzhautstellen statt. Sowie der Gegenstand fixirt wird, d. h. sein optisches Bild auf den gelben Fleck gebracht wird, verschwindet der Lichteindruck wieder. Daher erklärt sich das Gespensterartige der Erscheinung.

1) Jede Ausnahme vom Draper'schen Gesetz, wie z. B. die Phosphorescenz bei niedriger Temperatur, besagt, dass es sich um keine reine Temperaturstrahlung handelt, sondern dass bei der Strahlung, auch wenn die Temperatur constant bleibt, irgend welche Energieveränderungen eintreten.

Daher sendet ein Körper in schiefer Richtung partiell polarisirte Strahlung aus, und zwar muss diejenige Componente des Lichtes stärker sein, welche senkrecht zu der durch den Strahl und die Normale gehende Ebene polarisirt ist, weil diese schwächer reflectirt, also (wenn der Körper nicht vollkommen durchsichtig ist) stärker absorbirt wird. — Bei Krystallen, z. B. dem Turmalin, hängt auch bei senkrechter Incidenz das Absorptionsvermögen vom Polarisationszustande des einfallenden Lichtes ab. Wenn daher diese Eigenschaft der Turmalin auch bei Glühhitze behält, so muss eine glühende Turmalinplatte partiell polarisirtes Licht auch in der Richtung ihrer Normale emittiren. Diese Folgerung hat Kirchhoff experimentell bestätigt. In der Glühhitze ist allerdings beim Turmalin die Abhängigkeit der Absorption vom Polarisationszustande des Lichtes wesentlich geringer, als bei Zimmertemperatur.

Eine wichtige Anwendung seines Gesetzes machte Kirchhoff selbst zur Erklärung der Umkehrung der Spectrallinien und der Fraunhofer'schen Linien im Sonnenspectrum. Wenn nämlich das von einem weissglühenden Körper (z. B. elektrischem Bogenlicht) ausgehende Licht durch eine Natriumflamme von niedrigerer Temperatur hindurchtritt, so zeigt das Spectrum eine dunkele D-Linie auf hellerem Grunde. Denn Natriumdampf hat bei genügender Erhitzung nur eine starke Emission für die D-Linie, folglich muss er auch Licht von nur dieser Wellenlänge stark absorbiren. Die Natriumflamme absorbirt daher das vom Bogenlicht ausgesandte Licht der der D-Linie entsprechenden Wellenlänge, sie emittirt allerdings auch die gleiche Wellenlänge, aber, falls die Natriumflamme kühler ist, als das Bogenlicht, in schwächerer Intensität, als letzteres. Daher muss im Spectrum an der Stelle der D-Linie die Intensität geringer sein, als an den Stellen anderer Wellenlängen, welche die Natriumflamme ungeschwächt hindurch lässt.[1]) Nach dieser Auffassung erklären sich die Fraunhofer'schen Linien im Sonnenspectrum durch die Absorption des aus dem heissen Sonnenkerne kommenden Lichtes durch kühlere Metalldämpfe und Gase an der Oberfläche der Sonne. Indess setzt diese Anwendung des Kirchhoff-schen Gesetzes voraus, dass das Leuchten der Gase und Dämpfe eine reine Temperaturstrahlung ist. Das scheint nun nach Versuchen

1) Weiteres zur Demonstration der Umkehr der Spectrallinien vgl. bei Müller-Pouillet (Lummer), Optik 1897, S. 333 u. ff.

von Pringsheim meist nicht der Fall zu sein. Auf diesen Punkt soll im § 1 des Kapitels III näher eingegangen werden.

6. Die Abhängigkeit der Strahlungsintensität vom Brechungsindex der Umgebung. Wir wollen uns zwei unendlich grosse Platten PP' zweier schwarzer Körper parallel gegenüber gestellt denken. Die äusseren Seiten von PP' seien durch spiegelnde Belegungen SS' gegen Strahlung nach aussen und von aussen geschützt. Bisher haben wir nun immer vorausgesetzt, dass der Raum, in welchem die Strahlung stattfinden soll, absolut leer sei, oder mit einem homogenen, vollkommen durchsichtigen Körper, z. B. Luft, gefüllt sei. Wir wollen jetzt diese Voraussetzung fallen lassen, und annehmen, dass P an den leeren Raum, dagegen P' an einen vollkommen durchsichtigen Körper vom Brechungsindex n für eine beliebige Wellenlänge λ anstosse.[1]) Die Begrenzung dieses Mediums bilde die unendlich grosse Ebene E (vgl. Figur 109), welche den Platten PP' parallel anzunehmen ist, damit P überall im Vacuum liege.

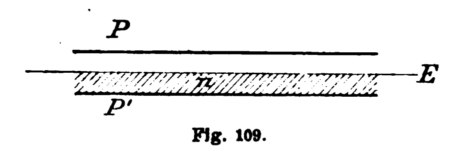


Fig. 109.

Ein Flächenelement ds von P strahlt nun innerhalb eines ringförmigen Elementarkegels, dessen Erzeugende die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$ mit der Normale auf ds bilden, nach S. 77 die Energiemenge aus:

$$dL = 2\pi i \, ds \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi. \tag{10}$$

Hierin bezeichnet i die Strahlungsintensität von P. Die emittirte Energie dL wird zum Theil an der Ebene E reflectirt und auf P dann wieder absorbirt, ihr Betrag sei

$$dL_r = 2\pi i \, ds \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \cdot r_\varphi, \tag{11}$$

wobei r_φ den Reflexionsfactor an der Grenze E für den Einfallswinkel φ der Strahlen bezeichnet. Der Rest der Energie $dL - dL_r$ gelangt nach P' und wird dort absorbirt.

Analog ist die von einem Flächenelemente ds auf P' entsandte Energie innerhalb eines ringförmigen Elementarkegels, dessen Er-

1) Damit P und P' beide ideal-schwarze Körper sind, dürfen sie in diesem Falle nicht aus derselben Substanz bestehen, da ein schwarzer Körper den Brechungsindex seiner Umgebung haben muss (cf. oben S. 448).

zeugende die Winkel χ und $\chi + d\chi$ mit der Normale auf P' bilden:

$$dL' = 2\pi i' \, ds \sin\chi \cos\chi \, d\chi ,$$

wobei i' die Strahlungsintensität von P' bedeutet. Durch Reflexion an E gelangt nach P' zurück:

$$dL_r' = 2\pi i' \, ds \sin\chi \cos\chi \, d\chi \cdot r_\chi ,$$

die Energie

$$dL'' = dL' - dL_r' = 2\pi i' \, ds \sin\chi \cos\chi \, d\chi \, (1 - r_\chi) \tag{12}$$

gelangt nach P und wird dort absorbirt.

Die Constanz der Temperatur von P verlangt:

$$\int dL = \int dL_r + \int dL'',$$

d. h. nach (10), (11) und (12), da die Strahlungsintensitäten i, i' nach S. 456 vom Winkel φ, bezw. χ der Strahlung unabhängig sind:

$$i \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \, (1 - r_\varphi) = i' \int_0^{\pi/2} \sin\chi \cos\chi \, d\chi \, (1 - r_\chi) . \tag{13}$$

Nun ist zu berücksichtigen, dass $r_\chi = 1$ ist für Winkel χ, deren $\sin\chi > 1/n$ ist, da dann Totalreflexion an der Ebene E eintritt. Das Integral auf der rechten Seite von (13) braucht daher nur von $\chi = 0$ bis $\chi = \overline{\chi}$ erstreckt zu werden, wo $\sin \overline{\chi} = 1/n$ ist; wir wollen zunächst n für alle Wellenlängen als constant annehmen. Man kann daher in (13) φ und χ als ein zusammengehöriges Paar eines Einfalls- und eines Brechungswinkels auffassen, die durch das Brechungsgesetz:

$$\sin\varphi : \sin\chi = n \tag{14}$$

mit einander verbunden sind, und kann dann die Integration nach φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi/2$ erstrecken. Aus (14) folgt nun

$$\sin\chi \cos\chi \, d\chi = \frac{1}{n^2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi , \tag{15}$$

ferner ist nach den früher auf S. 262 gegebenen Formeln (24) für jegliche Polarisationsrichtung und daher auch für natürliches Licht

$r_\varphi = r_\chi$. Denn die reflectirte Amplitude beträgt nach jenen Formeln (abgesehen vom Vorzeichen, auf das es hier nicht ankommt) stets denselben Bruchtheil der einfallenden Amplitude, wobei es gleichgiltig ist, ob φ der Einfalls- und χ der Brechungswinkel ist, oder ob umgekehrt φ der Brechungs- und χ der Einfallswinkel ist, d. h. die Reflexionsfactoren sind dieselben, falls das Licht von oben auf die Ebene E unter dem Winkel φ einfällt, oder von unten unter dem Winkel χ, falls $\sin\varphi : \sin\chi = n$ ist. Daher folgt aus (13) und (15), falls man $r_\chi = r_\varphi$ setzt:

$$(16)\quad i\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,(1 - r_\varphi)\,d\varphi = \frac{i'}{n^2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,(1 - r_\varphi)\,d\varphi.$$

Da nun das auf beiden Seiten auftretende Integral nicht Null ist, so ergiebt die Division mit demselben die Beziehung:

$$(17)\qquad i' : i = n^2,$$

d. h. die Strahlungsintensitäten zweier **schwarzen** Flächen verhalten sich wie die Quadrate der Brechungsindices der sie umgebenden Medien.[1])

Dieser Satz bezieht sich zunächst nur auf die Gesammtstrahlung, und der Brechungsindex n war für alle Wellenlängen oder Schwingungsperioden T constant gesetzt. Der Satz (17) gilt aber auch für die Theilstrahlungen einer bestimmten Strahlungssorte der Periode T. Die Strahlungsintensität von P für Strahlen, deren Periode zwischen T und $T + dT$ liegt, sei bezeichnet durch $i_T \cdot dT$. Analog sei die Strahlungsintensität von P' für diese Strahlengattung: $i_T' \cdot dT$. Dann ergiebt die Formel (16):

$$(18)\qquad \sum dT\left(i_T - \frac{i_T'}{n^2}\right)\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,(1 - r_\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Die Σ ist über alle Perioden von $T = 0$ bis $T = \infty$ zu erstrecken.

---

1) Auch dieser Satz rührt von Kirchhoff her (cf. Ostwald's Klassiker No. 100, S. 33). Irrthümlicher Weise wird der Satz oft Clausius zu geschrieben, der ihn aber erst einige Jahre nach der Publication von Kirchhoff ausgesprochen hat. — Experimentell ist dieser Satz annähernd bestätigt durch Smolochowski de Smolan (Compt. Rend. 123, S. 230, 1896, Wied. Beibl. 20, S. 974, 1896), welcher die Strahlung in Luft und in Schwefelkohlenstoff mit einander verglich.

Man kann sich nun auch zwischen beide Körper P und P' eine durchsichtige Lamelle eingeschaltet denken, welche vorzugsweise gewisse Wellenlängen λ hindurch lässt, dagegen andere reflectirt. Stets muss die Gleichung (18) bestehen, je nach der Dicke und Natur der Lamelle ist aber r_φ eine verschiedene Function von T. Damit nun (18) bestehen kann für beliebig zu variirendes r_φ, muss jedes einzelne Glied der Σ in (18) verschwinden, d. h. es muss für jedes T die Beziehung bestehen[1]):

$$i_T' : i_T = n^2. \tag{19}$$

Für einen nicht-schwarzen Körper muss nach dem Kirchhoff'schen Gesetz (9') das Verhältniss der Strahlungsintensität i_λ zum Absorptionsvermögen a_λ proportional zum Quadrat des Brechungsindex n des umgebenden Mediums sein. Da man die Veränderung von a_λ mit n an der Hand der Reflexionsformeln berechnen kann, so ergiebt sich daraus die Abhängigkeit des i_λ von n. Jedenfalls ist also bei nicht-schwarzen Körpern die Strahlungsintensität nicht streng proportional zu n^2.

7. Der Sinussatz bei der optischen Abbildung von Flächenelementen. Wenn ein Flächenelement ds durch ein symmetrisch zu seiner Normale liegendes Strahlenbündel vom Oeffnungswinkel u optisch abgebildet wird in ein Flächenelement ds', wobei der Oeffnungswinkel des Bildstrahlenbündels den Werth u' besitze, so muss die ganze von ds innerhalb des betrachteten Strahlenbündels ausgestrahlte Energie dem Stück ds' zugestrahlt werden und umgekehrt muss ds' auf ds strahlen, da die Lichtstrahlen die Wege der Energieströmung bezeichnen. Denken wir uns daher ds und ds' als schwarze Flächen gleicher Temperatur, welche auf ihren abgewandten Seiten spiegelnd belegt sind, so muss, da sich keine Temperaturdifferenz zwischen ds und ds' durch die Strahlung ausbilden darf, die von ds entsandte Energie dL gleich sein der von ds' ihm zugesandten und in ds absorbirten Energie dL'. Wenn nun

---

1) Auch auf dem auf S. 455 eingeschlagenen Wege kann man das Gesetz (17) erhalten, wenn man den Raum ausserhalb der Hohlkugel mit einem anderen Medium erfüllt denkt, als den Raum innerhalb der Hohlkugel, nur ist die Rechnung etwas complicirter. Da man bei jener Anordnung dann durch Brechung oder Beugung die Wellen der verschiedenen Perioden T räumlich von einander trennen kann, so ergiebt sich dann nach den Schlüssen der S. 455 aus (17) sofort das Gesetz (19).

ds in einem Medium vom Brechungsindex n liegt, ds' im Brechungsindex n', und falls mit i_0 die Strahlungsintensität einer schwarzen Fläche im Vacuum bezeichnet wird, so ist die Strahlungsintensität von ds nach (17) $i = n^2 \cdot i_0$, diejenige von ds': $i' = n'^2 \cdot i_0$. Ferner ist nach (4) S. 444

$$dL = \pi \cdot ds \cdot i \cdot \sin^2 u, \quad dL' = \pi \cdot ds' \cdot i' \cdot \sin^2 u'.$$

Daher folgt aus $dL = dL'$:

$$\pi \, ds \, n^2 \, i_0 \sin^2 u = \pi \, ds' \, n'^2 \, i_0 \sin^2 u',$$

d. h.

$$ds \, n^2 \sin^2 u = ds' \, n'^2 \sin^2 u'. \tag{20}$$

Dies ist der oben auf S. 58, Formel (46) abgeleitete Sinussatz. Die dortige Ableitung, welche rein geometrisch verfährt, ist complicirter als die hier gegebene, welche auf energetischer Grundlage basirt.

8. Die absolute Temperatur. Wie wir oben S. 451 an der Dampfmaschine erläuterten, kann mit Hülfe einer geeigneten Vorrichtung (Maschine) dadurch Arbeit erzeugt werden, dass eine gewisse Wärmemenge W_1 einem Reservoir 1 entnommen wird, und eine andere (kleinere) Wärmemenge W_2 an ein Reservoir 2, welches kälter als das Reservoir 1 ist, abgegeben wird. Die Maschine kann dabei in ihren Anfangszustand vollkommen zurückkehren, sie kann einen sogenannten Kreisprocess durchmachen. Das Princip der Erhaltung der Energie erfordert dann, dass die erzeugte Arbeit A gleich der Differenz der (mechanisch gemessenen) Wärmemengen W_1 und W_2 ist:

$$A = W_1 - W_2. \tag{21}$$

Nun denke man sich zwei Maschinen M und M' mit einander verglichen, welche beide bei einem einmaligen Kreisprocess die gleiche Wärmemenge W_1 dem Reservoir 1 entziehen. Sie können aber eventuell verschiedene Wärmemengen W_2 und W_2' an das Reservoir 2 abliefern. Dann sind auch die von ihnen geleisteten Arbeiten A und A' verschieden, es ist nach (21):

$$A = W_1 - W_2, \quad A' = W_1 - W_2'.$$

Die Maschine M soll nun so construirt sein, dass man sie auch in umgekehrter Richtung laufen lassen kann, (sie soll einen um-

kehrbaren Kreisprocess beschreiben), wobei sie die Wärmemenge W_2 aufnimmt vom Reservoir 2, die Menge W_1 abgiebt an Reservoir 1, und dementsprechend die Arbeit $-A$ leistet. Wenn wir nun einen Kreisprocess der Maschine M' combiniren mit einem solchen umgekehrten Kreisprocess der Maschine M, so wird im Ganzen die Arbeit geleistet:

$$A' - A = W_2 - W_2'. \tag{22}$$

Diesen Vorgang können wir uns beliebig oft wiederholt denken. Je nach dem Vorzeichen von $W_2 - W_2'$ wird dann dem Reservoir 2 dauernd Wärme entzogen oder zugeführt, während dem Reservoir 1 in Summa weder Wärme zugeführt, noch entzogen wird. Wir können daher in diesem Falle das Reservoir 1 als endlich voraussetzen und mit als einen Theil der Maschine betrachten, welche Kreisprocesse beschreibt, und können das Reservoir 2 als die Umgebung der Maschine, z. B. als das Meerwasser, dessen Wärme-Inhalt praktisch als unendlich gross zu betrachten ist, ansehen. Wenn nun $A' - A > 0$ wäre, so würde daher eine Vorrichtung construirt sein, welche durch Benutzung nur eines unendlich grossen Wärmereservoirs beliebig viel Arbeit schafft. Dies ist nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik (cf. S. 451) unmöglich. Es kann daher nur sein[1]):

$$A' - A < 0, \quad \text{d. h.} \quad A > A', \tag{23}$$

in Worten: von allen Maschinen, welche eine bestimmte Wärmemenge W_1 bei einer bestimmten Temperatur aufnehmen und Wärme an ein kälteres Reservoir abliefern, und welche ferner in einem Kreisprocess arbeiten, leistet diejenige Maschine die grösste Arbeit, welche einen **umkehrbaren** Kreisprocess beschreibt. Für eine solche Maschine ist die Arbeit A, welche aus einer bestimmten aufgenommenen Wärmemenge W_1 gewonnen wird, daher eine ganz bestimmte, da es ein endliches Maximum ist, d. h. diese Arbeit A bestimmt sich nur aus der aufgenommenen Wärme W_1 und den Temperaturen der beiden Reservoire, ist dagegen von den besonderen Einrichtungen der Maschine unabhängig. Offenbar muss A proportional sein zu W_1, sodass die Beziehung besteht:

$$A = W_1 \, f(\tau_1, \tau_2), \tag{24}$$

1) Dass im Allgemeinen das Gleichheitszeichen ($A = A'$) nicht bestehen kann, sieht man aus Betrachtung vieler nicht umkehrbarer Vorgänge, z. B. der Reibung. Sobald nutzlos Wärme erzeugt wird, muss $A' < A$ sein.

wobei f eine universelle Function der nach irgend einer Scala. z.B. nach Celsius, gemessenen Temperaturen τ_1, τ_2 der beiden Reservoire bezeichnet. Die Combination von (21) und (24) liefert nun

$$W_2 = W_1 (1 - f[\tau_1, \tau_2]), \text{ oder}$$

$$W_1 : W_2 = \varphi(\tau_1, \tau_2), \tag{25}$$

worin φ wiederum eine universelle, d. h. von Special-Einrichtungen der Maschine unabhängige Function bedeutet.

Nun lässt sich leicht zeigen, dass diese Function φ das Product zweier Functionen sein muss, von denen die eine nur von τ_1, die andere nur von τ_2 abhängt. Betrachten wir nämlich noch eine andere Maschine, welche umkehrbar zwischen den Temperaturen τ_2 und τ_3 arbeitet, und die Wärme W_2 aufnimmt, W_3 abliefert, so ist nach (25):

$$W_2 : W_3 = \varphi(\tau_2, \tau_3). \tag{26}$$

Combiniren wir jetzt einen Kreisprocess der ersten Maschine, die zwischen τ_1 und τ_2 arbeitet, mit einem Kreisprocess der letzten Maschine, so wird die Wärmemenge W_1 bei der Temperatur τ_1 aufgenommen, W_3 bei der Temperatur τ_3 abgeliefert, dagegen das Reservoir der Temperatur τ_2 kann ausser Betracht bleiben, da ihm ebensoviel Wärme W_2 von der ersteren Maschine zugeführt wird, wie ihm von der letzteren Maschine entnommen wird. Daher ist

$$W_1 : W_3 = \varphi(\tau_1, \tau_3). \tag{27}$$

Die Multiplication der beiden Gleichungen (25) und (26) mit einander liefert aber

$$W_1 : W_3 = \varphi(\tau_1, \tau_2) \cdot \varphi(\tau_2, \tau_3). \tag{28}$$

Die Vergleichung beider Formeln (27) und (28) ergiebt daher

$$\varphi(\tau_1, \tau_3) = \varphi(\tau_1, \tau_2) \cdot \varphi(\tau_2, \tau_3). \tag{29}$$

Man kann in dieser Gleichung τ_2 als irgend einen Parameter ansehen, auf dessen Werth es gar nicht ankommt. Dann stellt die rechte Seite von (29) das Product zweier Factoren dar, von denen der eine nur von τ_1, der andere nur von τ_3 abhängt. Wir wollen

diese Factoren schreiben als ϑ_1 und $1/\vartheta_3$,[1]) sodass nach (29) ist:

$$\varphi(\tau_1, \tau_3) = \vartheta_1 : \vartheta_3 . \tag{30}$$

Es ist daher auch in (25) $\varphi(\tau_1, \tau_2) = \vartheta_1 : \vartheta_2$ zu setzen, und man erhält:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} . \tag{31}$$

ϑ_1 und ϑ_2 sind Functionen der nach irgend einer Scala gemessenen Temperaturen τ_1, τ_2 der beiden Reservoire. Man nennt ϑ_1 und ϑ_2 die absoluten Temperaturen der Reservoire. Das Verhältniss der absoluten Temperaturen irgend zweier Körper bezeichnet also das Verhältniss der Wärmemengen, welche eine in einem umkehrbaren Kreisprocess arbeitende Maschine diesen Körpern entziehen bezw. zuführen würde, falls dabei diese Körper als sehr gross betrachtet werden können (sodass sich ihre Temperatur durch die entzogene, bezw. zugeführte Wärme nur unmerklich ändert).

Da hiernach nur das Verhältniss der absoluten Temperaturen zweier Körper definirt ist, so bedarf es noch zur Festlegung der Scala einer zweiten Relation. Diese liegt in folgendem Satze: Die Differenz der absoluten Temperaturen schmelzenden Eises und (unter Atmosphärendruck) siedenden Wassers soll 100 betragen. Es wird in der Wärmelehre gezeigt, dass sehr annähernd die absolute Temperatur erhalten wird, wenn man die Zahl 273 zu der mit einem Luftthermometer gemessenen Temperatur nach Celsius-Graden addirt.

9. Die Entropie. Wir betrachten wieder eine Maschine M, welche einen umkehrbaren Kreisprocess durchmacht und dabei Wärme W_1 von der absoluten Temperatur ϑ_1 aufnimmt, Wärme W_2 von der Temperatur ϑ_2 abgiebt. Rechnet man consequent eine Wärmemenge positiv, wenn sie von der Maschine abgegeben wird, so folgt aus (31):

$$\frac{W_1}{\vartheta_1} + \frac{W_2}{\vartheta_2} = 0 . \tag{32}$$

Wenn nun hiermit eine ähnliche Maschine combinirt wird,

---

1) Dass man als zweiten Factor $1/\vartheta_3$ und nicht ϑ_3 schreibt, ist desshalb geboten, weil dadurch der Werth des Parameters τ_2 aus der Gleichung (29) herausfällt, wie man sich sofort überzeugt, wenn man $\varphi(\tau_1, \tau_2) = \vartheta_1 : \vartheta_2$ und $\varphi(\tau_2, \tau_3) = \vartheta_2 : \vartheta_3$ schreibt.

welche bei den Temperaturen ϑ_3 und ϑ_4 die Wärmemengen W_3, W_4 abgiebt, so müsste auch nach (32) sein:

$$\frac{W_1}{\vartheta_1} + \frac{W_2}{\vartheta_2} + \frac{W_3}{\vartheta_3} + \frac{W_4}{\vartheta_4} = 0. \tag{33}$$

Wir können allgemein sagen: Wird irgend ein umkehrbarer Kreisprocess beschrieben, bei dem bei einer beliebigen absoluten Temperatur ϑ die Wärmemenge δW an die Umgebung abgeliefert wird, so muss sein

$$\sum \frac{\delta W}{\vartheta} = \int \frac{\delta W}{\vartheta} = 0, \tag{34}$$

wobei die Summe oder das Integral über alle abgegebenen Wärmemengen zu erstrecken ist, und ϑ immer die zugehörigen absoluten Temperaturen der Maschine (oder der Umgebung)[1]) bezeichnen.

Wenn wir daher einen umkehrbaren Process zwischen zwei verschiedenen Zuständen 1 und 2 eines Körpers betrachten, so können wir nach (34) setzen:

$$\frac{\delta W}{\vartheta} = - dS, \tag{35}$$

$$\int_1^2 \frac{\delta W}{\vartheta} = S_1 - S_2, \tag{35'}$$

worin S eine eindeutige Function des Zustandes des Körpers bedeutet, und dS das Differential dieser Function. Denn dann erhalten wir, wie es nach (34) sein muss, auf der rechten Seite von (35') allemal den Werth Null, sobald ein Kreisprocess beschrieben wird, bei welchem der Anfangszustand 1 des Körpers gleich seinem Endzustande 2 ist. Diese Zustandsfunction S wird die Entropie des Körpers oder Körpersystems genannt.

Auch die Energie E ist eine Zustandsfunction des Körpers. Sie ist dadurch definirt (nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik), dass die bei irgend einer Veränderung des Körpers nach aussen abgegebene Arbeit δA vermehrt um die nach aussen ab-

1) Die Temperatur der Maschine muss bei einem umkehrbaren Process immer gleich der Temperatur der Umgebung sein, sowie ein Wärmeaustausch zwischen Maschine und Umgebung stattfindet.

gegebene Wärmemenge δW (nach mechanischem Maass) gleich der Abnahme $-d\mathrm{E}$ der Energie des Körpers ist:

$$\delta A + \delta W = -d\mathrm{E}. \tag{36}$$

10. Allgemeine Formeln der Thermodynamik. Als unabhängige Variabele, welche den Zustand eines Körpers oder Systems bestimmen, wollen wir benutzen seine absolute Temperatur ϑ, sowie eine (oder mehrere) Variabele x, deren Bedeutung zunächst unbestimmt gelassen werden kann. Die x sollen so gewählt sein, dass bei einer Temperaturänderung des Körpers, bei welcher die x constant bleiben, keine Arbeit vom Körper geleistet wird. Dann ist, wenn wir die Formeln nur für den Fall einer einzigen Variabeln x hinschreiben, zu setzen:

$$\delta A = M\,\delta x\,,\quad \delta W = X\,\delta x + Y\,\delta\vartheta. \tag{37}$$

δx, $\delta\vartheta$ bezeichnen irgend welche Veränderungen der Grössen x und ϑ, δA und δW die dabei vom Körper geleistete Arbeit und abgegebene Wärme. Der Vorgang soll umkehrbar sein, d. h. die Gleichungen (37) sollen für jedes Vorzeichen von δx und $\delta\vartheta$ gelten. Nach (35), (36) und (37) wird nun:

$$-dS = \frac{X}{\vartheta}\,\delta x + \frac{Y}{\vartheta}\,\delta\vartheta\,,\quad -d\mathrm{E} = (M+X)\,\delta x + Y\,\delta\vartheta. \tag{38}$$

Hieraus folgt, da allgemein ist

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial S}{\partial\vartheta}\,\delta\vartheta:$$

$$\frac{X}{\vartheta} = -\frac{\partial S}{\partial x}\,,\quad \frac{Y}{\vartheta} = -\frac{\partial S}{\partial\vartheta}\,, \tag{39}$$

$$M + X = -\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}\,,\quad Y = -\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial\vartheta}. \tag{40}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Differentiation:

$$\frac{\partial\,(X/\vartheta)}{\partial\vartheta} = \frac{\partial\,(Y/\vartheta)}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial\,(M+X)}{\partial\vartheta} = \frac{\partial Y}{\partial x}\,, \tag{41}$$

oder, wie man nach einiger Umformung erhält:

$$\frac{X}{\vartheta} = -\frac{\partial M}{\partial\vartheta}\,,\quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\vartheta\,\frac{\partial^2 M}{\partial\vartheta^2}. \tag{42}$$

11. Die Abhängigkeit der Gesammtstrahlung eines schwarzen Körpers von seiner absoluten Temperatur. Wir denken uns einen Cylinder vom Querschnitt 1 und der Länge x, dessen Wände aus vollkommen schwarzen Körpern gebildet sind. Dieselben sollen nach aussen nicht strahlen, d. h. durch vollkommene Spiegel abgeschlossen sein. Im Innern des Cylinders stellt sich bei einer bestimmten Temperatur ϑ der Cylinderwände ein Strahlungsgleichgewicht her, demzufolge die Volumeneinheit die Energie ψ (ϑ) besitzen möge. Diese strahlende Energie übt einen bestimmten Druck auf die Cylinderwände aus. Wir sahen oben S. 449, dass ebene normaleinfallende Wellen einen Druck p auf eine schwarze Fläche ausüben, der gleich der in der Volumeinheit enthaltenen Energie ist. Wenn eine unregelmässige Strahlung nach allen Richtungen vorhanden ist, so kann man sich die Strahlenrichtungen der einzelnen Wellenzüge nach drei zu einander senkrechten Componenten zerlegt denken, von denen die eine senkrecht auf einer Fläche s der Cylinderwand stehen möge. Nur diese Strahlencomponente drückt auf s, die beiden anderen Componenten aber nicht. In Folge dessen wird der ganze, auf s ausgeübte Druck, nicht ψ (ϑ), sondern nur $^1/_3$ ψ (ϑ) sein.[1])

Wenn sich daher der Querschnitt 1 des Cylinders um δx nach aussen verschiebt, so wird die Arbeit geleistet

$$\delta A = \tfrac{1}{3}\, \psi\, (\vartheta)\, \delta x. \tag{43}$$

Wenn ferner die Temperatur des ganzen Cylinders um $\delta\vartheta$ gesteigert wird, während x constant bleibt, so wächst dadurch die Energie um

$$dE = \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\, \delta\vartheta \cdot x, \tag{44}$$

da das Volumen des Cylinders x ist. Arbeit wird nicht geleistet, falls x constant bleibt.

Ein Vergleich der Formeln (43) und (37), sowie (44) mit (38) lehrt, da nach (38) für $\delta x = 0$ wird

$$dE = -\,Y\delta\vartheta,$$

dass hier zu setzen ist:

$$M = \tfrac{1}{3}\, \psi, \quad Y = -\,x\, \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}. \tag{45}$$

1) Ueber präcisere Herleitung dieses Factors $^1/_3$ vgl. **Boltzmann**, Wied. Ann. 22, S. 291, 1884, oder **Galitzine**, Wied. Ann. 47, S. 488, 1892.

Nach (42) ergiebt sich daher, da ψ nur von ϑ und nicht von x abhängt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \tfrac{1}{3}\, \vartheta\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} = \tfrac{1}{3}\, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} - \psi \right).$$

Diese Gleichung kann man sofort nach ϑ integriren und erhält:

$$3\psi = \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} - \psi. \qquad (46)$$

Eine Integrationsconstante ist nicht hinzuzufügen, weil für $\vartheta = 0$ der Körper keinen Wärmeinhalt besitzt und daher auch keine Strahlung entsenden kann. Aus (46) folgt

$$4\psi = \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \text{ d. h. } 4 \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{d\psi}{\psi},$$

folglich

$$4 \lg \vartheta = \lg \psi + Const.,$$

oder

$$\psi(\vartheta) = C \cdot \vartheta^4. \qquad (47)$$

Wenn nun in die Wand des Cylinders ein enges Loch gemacht wird, so strahlt dieses wie eine ideale schwarze Fläche nach aussen[1]) (cf. oben S. 448). Die Strahlungsintensität i muss offenbar proportional zur Energiedichte ψ (ϑ) im Innern des Cylinders sein. Es folgt also auch für die Strahlungsintensität i einer schwarzen Fläche das Gesetz

$$i = a \cdot \vartheta^4, \qquad (48)$$

d. h. die Gesammtstrahlungsintensität eines schwarzen Körpers ist proportional zur vierten Potenz seiner absoluten Temperatur.

---

1) Dies tritt auch ein, wenn die Cylinderwände nicht vollkommen schwarz sind. Daher ist auch in diesem Falle ψ (ϑ) die Energiedichte des Strahlungsgleichgewichtes und $^1/_3\,\psi$ ist der Druck auf die Cylinderwände. Nur falls die Cylinderwände überall aus vollkommenen Spiegeln beständen und ursprünglich keine Strahlung in den Cylinder hineingelangt wäre, würde die Energiedichte $\psi = 0$ sein. Die normale Energiedichte ψ würde sich aber durch ein beliebig kleines, nicht vollkommen spiegelndes Stück in der Cylinderwand wiederherstellen. Ist dieses Stück vollkommen schwarz, so wird nach dem oben S. 449 geführten Beweise der Druck $^1/_3\,\psi$ auf dasselbe ausgeübt. Dann muss aber auch auf jedes Stück der Cylinderwand, z. B. auch auf die vollkommen spiegelnden Stücke, der gleiche Druck ausgeübt werden, weil sonst der Cylinder in fortdauernde Translation oder Rotation kommen würde.

Dieses Gesetz, welches Stefan[1]) empirisch aus Beobachtungen zuerst erschlossen hatte und Boltzmann (l. c.) theoretisch (auf ähnlichem Wege wie hier) abgeleitet hatte, ist mehrfach experimentell bestätigt worden, am genauesten durch Lummer und Pringsheim,[2]) welche durch bolometrische Messung fanden, dass innerhalb des Temperaturintervalls von 100° Cels. bis 1300° Cels. das Loch eines Hohlraums (ideale schwarze Fläche) das Stefan-Boltzmann'sche Strahlungsgesetz befolgte. Es ist bei den Versuchen natürlich auch auf die Temperatur des Bolometers Rücksicht zu nehmen (cf. oben S. 450). Die Zustrahlung der kleinen Fläche ds gegen die Fläche ds' in der gegenseitigen Entfernung r beträgt, falls ds und ds' senkrecht gegen r stehen, nach der Definition der Strahlungsintensität [oben S. 443 Formel (3)]:

$$dL = i\,\frac{ds\,ds'}{r^2}.$$

Die Zustrahlung der Fläche ds' gegen ds beträgt, falls i' die Strahlungsintensität von ds' bezeichnet:

$$dL' = i'\,\frac{ds\,ds'}{r^2}.$$

Daher ist, falls i und i' das Gesetz (48) befolgen, die im Ganzen in der Zeiteinheit dem Element ds' zugeführte Wärmemenge

$$dW = dL - dL' = a\,\frac{ds\,ds'}{r^2}\,(\vartheta^4 - \vartheta'^4)\,, \tag{49}$$

falls ϑ' die absolute Temperatur von ds' bezeichnet.

Die Constante a ist neuerdings von F. Kurlbaum[3]) in absolutem Maasse durch bolometrische Messung bestimmt worden; das Princip der Messung war dabei, dass das Bolometer durch einen elektrischen Strom gemessener Stärke bei verhinderter Zustrahlung auf die gleiche Temperaturerhöhung gebracht wurde, wie durch die Zustrahlung allein ohne Strom. Die Zustrahlung wird daher durch die Joule'sche Stromwärme in absolutem Maasse bestimmt. Es ergiebt sich, dass, wenn man mit e_t das Emissionsvermögen der

---

1) Wien. Ber. 79 (2), S. 391, 1879. Stefan glaubte, dass dies Strahlungsgesetz für beliebige Körper Geltung hätte. Es gilt aber streng nur für vollkommen schwarze Körper.

2) Wied. Ann. 63, S. 395, 1897.

3) Wied. Ann. 65, S. 746, 1898.

Flächeneinheit eines schwarzen Körpers bei t^0 Cels. bezeichnet, d. h. die nach allen Richtungen ausgestrahlte Energie, die Differenz der Emissionsvermögen zweier auf 100° Cels. und 0° Cels. temperirten schwarzen Einheitsflächen beträgt:

$$e_{100} - e_0 = 0{,}01763 \frac{\text{gr. cal}}{\text{sec}}. \tag{50}$$

Nun ist [cf. oben S. 444 Formel (5)] $e = \pi i$, falls i die Strahlungsintensität ist. Ferner ist 1 gr. cal $= 419 \cdot 10^5$ erg., daher folgt

$$i_{100} - i_0 = a\,(373^4 - 273^4) = \frac{0{,}01763 \,.\, 419 \,.\, 10^5}{\pi},$$

d. h. es ergiebt sich die Constante a für die Strahlungsintensität einer schwarzen Fläche in absolutem *cgs*-Maass zu

$$a = 1{,}71 \cdot 10^{-5} \cdot {}^{\text{erg}}/_{\text{sec}} \tag{51}$$

oder ausgedrückt in gr. cal:

$$a = 0{,}408 \cdot 10^{-12}\ {}^{\text{gr. cal}}/_{\text{sec}}. \tag{51'}$$

12. Die Sonnentemperatur, erschlossen aus ihrer Gesammtstrahlung. Wenn die Sonne ein vollständig absorbirender (d. h. schwarzer) Körper wäre, welcher eine reine Temperaturstrahlung besässe, so könnten wir ihre Temperatur [1]) aus der Solarconstante (S. 446) und dem absoluten Werthe der Constante a im Strahlungsgesetz berechnen. Nennt man ϑ die absolute Sonnentemperatur, ϑ' die Temperatur auf der Erde, so wäre nach (49) und (51') die Solarconstante, d. h. die pro Minute der Flächeneinheit der Erde zugestrahlte Energie:

$$dW = 0{,}408 \cdot 10^{-12} \cdot 60 \frac{ds}{r^2} (\vartheta^4 - \vartheta'^4). \tag{52}$$

Nun ist aber

$$ds : r^2 = \pi \cdot (1/_2\, \varphi)^2,$$

wobei φ die scheinbare Grösse des Sonnendurchmessers $= 32'$ bezeichnet.

1) Dieselbe wird als die effective Sonnentemperatur bezeichnet. Ihre wirkliche Temperatur könnte höher sein, falls ihr Absorptionsvermögen kleiner als 1 ist, dagegen tiefer, falls auch Luminiscenz, z. B. Chemi-Luminiscenz, bei der Sonnenstrahlung wirkt.

Setzt man daher die Solarconstante (mit Langley) $dW = 3$ gr. cal/Minute, so wird[1]) die effective Sonnentemperatur $\vartheta = 6500^0$ d. h. etwa 6200^0 Cels. Nimmt man die Sonnenconstante (mit Angström) zu 4 gr. cal/Minute an, so würde die effective Sonnentemperatur etwa 6700^0 Cels. betragen.

13. Die Veränderung des Spectrums eines schwarzen Körpers mit der Temperatur. Unter dem Spectrum eines schwarzen Körpers verstehen wir die Vertheilung der von ihm ausgesandten strahlenden Energie auf die verschiedenen Wellenlängen. Wir knüpfen die Untersuchung an an das Strahlungsgleichgewicht innerhalb eines geschlossenen Hohlkörpers. Die Strahlungsintensität einer schwarzen Fläche ergiebt sich dann, falls man sich ein kleines Loch in der Wand des Hohlkörpers denkt, als proportional zu der im Hohlkörper stattfindenden Energiedichte. Nach diesem schon oben S. 471 benutzten Verfahren ergiebt sich auch (cf. die dortige Anm. 1), dass für das Strahlungsgleichgewicht die Natur der Wände des Hohlkörpers gleichgiltig ist, wofern sie nur nicht ganz aus vollkommenen Spiegeln bestehen.

Die Veränderung des Spectrums eines schwarzen Körpers mit seiner Temperatur kann man nun nach einem von W. Wien[2]) erdachten Verfahren in folgender Weise bestimmen.

Wir denken uns einen Cylinder vom Querschnitt 1, in welchem zwei Stempel S und S' verschiebbar sind, welche mit lichtdichten Klappen versehen sein sollen. K und K' seien zwei schwarze Körper der absoluten Temperaturen ϑ und $\vartheta + \delta\vartheta$. Die Seitenwände des Cylinders, sowie die Stempel S, S' sollen vollkommen spiegeln. Ebenfalls seien die Aussenseiten von K und K' mit vollkommenen Spiegeln belegt. Der Innenraum des Cylinders sei frei von Materie.

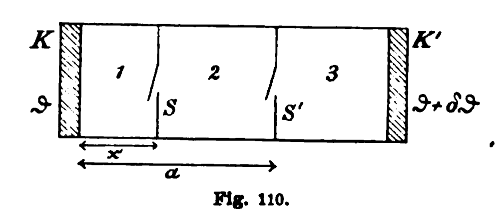


Fig. 110.

Es sei nun zunächst S' geschlossen, S offen. Es strahlt dann K in die Räume 1 und 2, K' in den Raum 3. Die Dichtigkeit der Energie in 3 ist grösser, als in 2, weil die Temperatur von K'

1) Auf den Werth von ϑ' kommt es nicht an, da in (52) ϑ'^4 zu vernachlässigen ist neben ϑ^4.

2) Berl. Ber. 1893, Sitzung vom 9. Febr.

um $\delta\vartheta$ höher ist, als von K. Es werde jetzt S geschlossen und gegen S' hin um δx vorgeschoben, bis die Energiedichte in 2 gleich der Energiedichte in 3 ist. Wir wollen zunächst berechnen, wie gross wir δx wählen müssen. Wenn man die ursprünglich im Raume 2 vorhandene strahlende Energie mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet, so ist die ursprüngliche Energiedichte dort

$$\psi(\vartheta) = \frac{\mathfrak{E}}{a - x}.$$

Daher ist die Veränderung der Energiedichte bei Aenderung von x:

$$d\psi = \frac{d\mathfrak{E}}{a - x} + \mathfrak{E}\frac{\delta x}{(a - x)^2}.$$

Nun ist $d\mathfrak{E}$ gleich der Arbeit, welche beim Vorschieben des Stempels S zu leisten ist. Nach S. 470 ist daher $d\mathfrak{E} = {}^1/_3\,\psi\,\delta x$. Daher wird $d\psi$:

$$d\psi = \frac{\delta x}{a - x}\left({}^1/_3\,\psi + \frac{\mathfrak{E}}{a - x}\right) = \frac{\delta x}{a - x}\cdot {}^4/_3\,\psi. \tag{53}$$

Andererseits ist nach (47) ψ proportional zur vierten Potenz von ϑ, d. h. man erhält

$$d\psi = 4\psi\frac{\delta\vartheta}{\vartheta}. \tag{54}$$

Wenn daher die Energiedichte im Raume 2 durch Verschieben des Stempels A um δx gleich werden soll der Energiedichte in 3, so ergiebt die Vergleichung von (53) und (54):

$${}^1/_3\,\frac{\delta x}{a - x} = \frac{\delta\vartheta}{\vartheta}. \tag{55}$$

Man kann nun aus dem zweiten Hauptsatze der Thermodynamik schliessen, dass, wenn die Dichte der gesammten strahlenden Energie in den Räumen 2 und 3 dieselbe ist, dann auch die Energievertheilung im Spectrum in beiden Räumen dieselbe sein muss.

Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so müsste es Strahlen einer bestimmten Wellenlänge geben, welche in 3 eine grössere Energiedichte besitzen, als in 2. Wir können dann vor die Klappe von S' eine dünne durchsichtige Lamelle legen, welche die Strahlen der betrachteten Wellenlänge vorzugsweise hindurchlässt, die anderen vorzugsweise reflectirt, und dann die Klappe öffnen. Es muss dann

mehr Energie von 3 nach 2 gehen, als umgekehrt, und die Dichtigkeit der Energie wird in 2 grösser werden, als in 3. Jetzt schliessen wir S', entfernen die Lamelle und lassen den Stempel S' von dem in 2 herrschenden Ueberdrucke bewegt werden und Arbeit leisten, bis die Dichtigkeit der Energie in beiden Räumen wieder die gleiche ist. Die hierbei gewonnene Arbeit sei A. Dann wird S' wieder geöffnet und in seine Anfangslage zurückgeführt, was keine Arbeit erfordert. Dann gehen wir bei geschlossenem S' mit S auf seine Anfangslage zurück, wobei wir die Arbeit wieder gewinnen, welche bei dem Verschieben von S um δx aufgewendet wurde. Wird schliesslich die Klappe von S wieder geöffnet, so ist der Anfangszustand völlig erreicht, dem Körper K ist in Summa keine Wärme entzogen oder zugeführt, dagegen dem Körper K' eine gewisse Wärme entzogen (bei der Strahlung durch die Lamelle, welche auf die Klappe von S' gesetzt wurde). Ausserdem ist eine gewisse Arbeit A gewonnen.

Nach dem zweiten Hauptsatze kann man aber nie Arbeit A durch einen Kreisprocess gewinnen, falls dabei nur einem Wärmereservoir K' Wärme entzogen wird, sodass diese Wärme vollständig in Arbeit verwandelt wäre. — Wir schliessen daher, dass bei gleicher Gesammtdichte der Energie in den Räumen 2 und 3 auch die Energievertheilung im Spectrum die gleiche ist.

Nun wird aber durch die Bewegung des Stempels S die Energievertheilung im Spectrum nach dem Doppler'schen Princip geändert. Sei ursprünglich im Raume 2 die gesammte Energiedichte gegeben durch

$$\psi(\vartheta) = \int_0^\infty \varphi(\lambda, \vartheta)\, d\lambda, \tag{56}$$

so giebt die Grösse $\varphi(\lambda, \vartheta) \cdot d\lambda$ die zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ enthaltene Energiedichte an.

Wenn wir nun ebene Wellen betrachten, welche im Raume 2 senkrecht gegen die Stempel S, S' hin und her reflectirt werden, so wird ihre Wellenlänge durch die Bewegung von S geändert. Betrachten wir zunächst einen Strahl, welcher von einem Punkte P ausgehend nur einmal an S reflectirt wird. Wenn im Punkte P der einfallende Strahl eine Zustandsänderung von der Periode T hervorruft, so ruft der an S reflectirte Strahl eine Zustandsänderung

von anderer Periode T' hervor. Wenn nämlich von P eine Erschütterung zur Zeit $t = 0$ ausgeht, so gelangt sie durch Reflexion an S nach P zurück zu einer Zeit $t' = 2b_1 : c$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Raume 2 (im Vacuum) ist und b_1 den Abstand bezeichnet, den P vom Spiegel gerade zu der Zeit t_1 besass, als die von P ausgehende Erschütterung auf S anlangte.

Wenn zur Zeit $t = 0$ der Abstand zwischen P und S den Werth b hat, so muss offenbar $b = b_1 + s_1$ sein, wobei s_1 den vom Spiegel S in der Zeit t_1 zurückgelegten Weg bezeichnet. Bewegt sich S mit der Geschwindigkeit v gegen P hin, so ist $s_1 = v \cdot t_1$ und $b_1 = c \, . \, t_1$, daher folgt aus $b = (c + v)\, t_1$, dass $t_1 = b : c + v$, d. h. es folgt:

$$b_1 = b \frac{c}{c+v}, \quad t' = 2 \frac{b_1}{c} = \frac{2b}{c+v}.$$

Nach der Zeit T hat sich der Abstand zwischen P und S verringert auf $b' = b - v\,T$. Daher gelangt eine von P zur Zeit $t = T$ ausgehende Erschütterung nach P durch Reflexion zurück zu der Zeit $T + t''$, wobei ist:

$$t'' = \frac{2b'}{c+v} = \frac{2(b - v\,T)}{c+v}.$$

Der reflectirte Strahl ruft daher in P eine Erschütterung der Periode T' hervor, wobei ist:

$$T' = T + t'' - t' = T - \frac{2v\,T}{c+v} = T \frac{c-v}{c+v}.$$

Ein zweimal an S reflectirter Strahl ruft die Periode T'' hervor, wobei ist

$$T'' = T' \frac{c-v}{c+v} = T \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^2,$$

ein n-mal reflectirter Strahl ruft die Periode hervor

$$T^{(n)} = T \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^n. \tag{57}$$

Wir haben nun n aufzufassen als die Zahl, welche angiebt, wie oft die im Raume 2 normal zu S, S' verlaufenden Strahlen bei ihrem Hin- und Hergehen an S reflectirt werden, während S eine bestimmte Wegstrecke δx durchläuft. Wenn der Abstand

zwischen S und S' constant den Werth $a - x$ besässe, so würde zu einer n-maligen Reflexion an S die Zeit δt erforderlich sein, wobei ist:

$$\delta t = n \frac{2(a-x)}{c}. \tag{58}$$

Wir wollen voraussetzen, dass die Bewegung δx so klein gegen $a - x$ ist, dass wir wirklich $a - x$ als constant annehmen können. In dieser Zeit δt macht nun S den Weg $\delta x = v \cdot \delta t$; daher folgt aus (58):

$$\delta x = vn \frac{2(a-x)}{c},$$

d. h.

$$n = \frac{\delta x}{2(a-x)} \cdot \frac{c}{v}. \tag{59}$$

Wir wollen nun annehmen, dass v sehr klein gegen c ist. Dann liefert (57), wenn man sich auf die niedrigsten Potenzen in $v:c$ beschränkt:

$$T^{(n)} = T\left(1 - 2n \frac{v}{c}\right),$$

d. h. mit Rücksicht auf (59):

$$T^{(n)} = T\left(1 - \frac{\delta x}{a-x}\right).$$

Die Aenderung der Periode durch die Bewegung des Stempels S beträgt also:

$$\delta T = T^{(n)} - T = -T \frac{\delta x}{a-x},$$

und ebenso ist die Aenderung $\delta_1 \lambda$ der Wellenlänge λ, welche durch die Bewegung von S entsteht:

$$\delta_1 \lambda = -\lambda \frac{\delta x}{a-x}. \tag{60}$$

Bei positivem δx ist also $\delta_1 \lambda$ negativ, d. h. die Wellenlängen werden verkürzt.

Es ist nun weiter zu berücksichtigen, dass nur $^1/_3$ des der Wellenlänge λ zugehörigen Energieantheils in (56) aufgefasst werden kann als von Strahlen herrührend, welche senkrecht gegen S ge-

richtet sind (cf. oben S. 470). Die Strahlen, welche parallel mit S verlaufen, erfahren durch die Bewegung von S keine Aenderung ihrer Wellenlänge. Wenn daher im Raume 2 zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ ursprünglich die Energie vorhanden ist:

$$dL = \varphi(\lambda, \vartheta)\, d\lambda, \tag{61}$$

so würde nach der Bewegung des Stempels, falls man zunächst von der dadurch gleichzeitig bewirkten Energieverdichtung (oben S. 475) absieht, die zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ liegende Energie dL' aus zwei Drittel von dL bestehen und aus einem Drittel des Antheiles $\varphi(\lambda - \delta_1\lambda, \vartheta)\, d\lambda$, der ursprünglich zu der Wellenlänge $\lambda - \delta_1\lambda$ gehörte, falls $\delta_1\lambda$ die in (60) berechnete, durch die Bewegung des Stempels bewirkte Wellenlängenvergrösserung bedeutet. Daher ist

$$dL' = [{}^2\!/_3\, \varphi(\lambda, \vartheta) + {}^1\!/_3\, \varphi(\lambda - \delta_1\lambda, \vartheta)]\, d\lambda.$$

Nun kann man nach dem Taylor'schen Lehrsatze schreiben:

$$\varphi(\lambda - \delta_1\lambda, \vartheta) = \varphi(\lambda, \vartheta) - \delta_1\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}.$$

Daher wird

$$dL' = \varphi(\lambda, \vartheta) - \frac{\delta_1\lambda}{3} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda},$$

oder (wiederum nach dem Taylor'schen Satze) falls man ${}^1\!/_3\, \delta_1\lambda = \delta\lambda$ setzt:

$$dL' = \varphi(\lambda - \delta\lambda, \vartheta)\, d\lambda. \tag{62}$$

Die bei der Wellenlänge λ nach Einschieben des Stempels, d. h. von der höheren Temperatur $\vartheta + \delta\vartheta$, liegende Energie ist also dieselbe, wie die bei der Wellenlänge $\lambda - \delta\lambda$ liegende Energie bei der Temperatur ϑ. Nun ist aber nach (60) und (55):

$$\delta\lambda = {}^1\!/_3\, \delta_1\lambda = -\frac{\lambda}{3} \frac{\delta x}{a - x}, \quad \delta\vartheta = \frac{\vartheta}{3} \frac{\delta x}{a - x},$$

d. h. es gilt die Beziehung:

$$\frac{\delta\vartheta}{\vartheta} + \frac{\delta\lambda}{\lambda} = 0, \tag{63}$$

welche wir schreiben können als $\delta(\vartheta\lambda) = 0$, d. h.

$$\vartheta\lambda = const. \tag{64}$$

Wenn man daher zunächst absieht von der beim Einschieben des Stempels bewirkten Energieverdichtung, d. h. wenn man absieht von der mit Steigerung der Temperatur bewirkten Energieverdichtung, so besteht für höhere Temperatur ϑ bei der Wellenlänge λ dieselbe Energiedichte, als für die tiefere Temperatur ϑ' bei der Wellenlänge λ', falls $\lambda\vartheta = \lambda'\vartheta'$ ist.

Berücksichtigt man nun aber auch die Steigerung der ganzen Energiedichte, welche mit ϑ^4 proportional ist, so können wir den soeben ausgesprochenen Satz aufrecht erhalten, wenn wir die Energievertheilung anstatt von ψ in dem Ausdruck $\psi : \vartheta^4$ untersuchen.

Unser Satz besagt dann, dass für einen schwarzen Körper bei einer beliebigen Temperatur ϑ der Verlauf von $\psi : \vartheta^4$ ein und dieselbe Function des Argumentes $\lambda\vartheta$ sein muss. Nach (56) ist nun:

$$\frac{\psi(\vartheta)}{\vartheta^4} = \int_0^\infty \frac{\varphi(\lambda, \vartheta)}{\vartheta^5}\, d(\lambda\vartheta). \tag{65}$$

Es muss daher $\varphi(\lambda, \vartheta) : \vartheta^5$ eine Function des Argumentes $\lambda\vartheta$ sein:

$$\frac{\varphi(\lambda, \vartheta)}{\vartheta^5} = f(\lambda\vartheta). \tag{66}$$

Wenn wir daher für irgend eine Temperatur ϑ die Energievertheilung in der Weise auftragen, dass die Abscissen die Grössen $\lambda\vartheta$ sind, die Ordinaten die Grössen $\varphi(\lambda, \vartheta) : \vartheta^5$, so gilt diese Zeichnung für jede Temperatur ϑ, d. h. man kann dann aus dieser Zeichnung auch leicht für andere Temperaturen die eigentliche Energievertheilung construiren, bei der λ und φ die Abscissen und Ordinaten sind. — Hieraus folgt sofort der Satz:

Wenn bei der Temperatur ϑ das Strahlungsmaximum des schwarzen Körpers bei der Wellenlänge λ_m liegt, so liegt es bei der Temperatur ϑ' bei derjenigen Wellenlänge λ_m', welche der Gleichung genügt:

$$\lambda_m \cdot \vartheta = \lambda_m' \cdot \vartheta'. \tag{67}$$

Aus (66) und (67) folgt ferner, falls man die Function φ, welche der Wellenlänge λ_m zugehört, mit φ_m bezeichnet:

$$\varphi_m : \varphi_m' = \vartheta^5 : \vartheta'^5, \qquad (68)$$

d.h. die Strahlungsintensitäten zweier verschieden temperirter schwarzer Körper, welche sie bei denjenigen Wellenlängen besitzen, bei welchen ihre Strahlungsintensität ein Maximum ist, verhalten sich wie die fünften Potenzen ihrer absoluten Temperaturen.

14. Die Sonnentemperatur, erschlossen aus der Energievertheilung des Sonnenspectrums. Das Gesetz (67) ist mehrfach experimentell bestätigt worden.[1]) Als Mittel der unter einander gut stimmenden Beobachtungen ergiebt sich die Zahl $\lambda_m \cdot \vartheta = 2887$, falls Einheit der Wellenlänge 0,001 mm ist. Da nun nach Langley die maximale Energie der Sonnenstrahlung bei $\lambda_m' = 0{,}0005$ mm liegt, so würde für die Sonnentemperatur folgen:

$$\vartheta' = 5774^0 = 5501^0 \text{ Cels.}$$

Dieses Resultat stimmt der Grössenordnung nach mit dem oben auf S. 474 berechneten. Es ist aber immer die Frage, ob die Sonne ein vollständig absorbirender (schwarzer) Körper ist, der eine reine Temperaturstrahlung besitzt. Falls die Sonne ein chemiluminiscirender Körper ist, so könnte ihre Temperatur eine ganz andere sein.

15. Die Vertheilung der Energie im Spectrum eines schwarzen Körpers. Die bisherigen Betrachtungen ergeben wohl

1) Vgl. darüber F. Paschen und H. Wanner, Berl. Ber. 1899, 12. Jan. — F. Paschen, ibid. April. — O. Lummer und E. Pringsheim, Verhdl. d. deutsch. phys. Ges. 1899, S. 23. — Für sehr tiefe Temperaturen ist die Strahlung von Langley (Ann. de chim. et de phys. (6) 9, p. 433, 1886) untersucht worden. Er fand mit Hülfe eines Bolometers, das auf -20^0 Cels. abgekühlt war, das Strahlungsmaximum einer geschwärzten Kupferplatte der Temperatur -2^0 Cels. bei der Wellenlänge $\lambda_m = 0{,}0122$ mm. Aus der Zahl $\lambda_m \cdot \vartheta = 2887$ würde bei -2^0 Cels. folgen $\lambda_m = 0{,}0107$ mm. — Bei den Langley'schen Versuchen handelt es sich allerdings nicht um die Strahlung einer ideal-schwarzen Fläche. Ausserdem wird nur das relative Strahlungsmaximum der Kupferplatte von -2^0 Cels. gegen das Bolometer von -20^0 Cels. gemessen. Dieses relative Maximum liegt, wie man sich aus der Zeichnung der Strahlungscurven sofort überzeugen kann, bei einem etwas kleineren λ als das absolute Strahlungsmaximum.

die Aenderung der Vertheilung der Energie im Spectrum eines schwarzen Körpers mit der Temperatur, sie sagen aber nichts aus über die Vertheilung der Energie bei einer bestimmten Temperatur. Um dieses Gesetz zu erschliessen, macht W. Wien[1]) folgende Hypothesen:

Nimmt man als strahlenden schwarzen Körper ein Gas an, so gilt, falls man sich auf den Boden der kinetischen Gastheorie stellt, das Maxwell'sche Gesetz der Vertheilung der Geschwindigkeiten der Gasmolecüle, demzufolge die Anzahl der Molecüle, deren Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ liegt, proportional ist der Grösse

$$v^2 \cdot e^{-v^2/\beta^2}\, dv, \tag{69}$$

worin β eine Constante ist, die sich durch die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ vermittelst der Gleichung

$$\bar{v}^2 = {}^3/_2\, \beta^2 \tag{70}$$

ausdrücken lässt. Die absolute Temperatur ϑ ist nach der kinetischen Gastheorie proportional der mittleren lebendigen Kraft der Gasmolecüle, d. h. es ist

$$\vartheta \sim \bar{v}^2 \sim \beta^2. \tag{71}$$

Wien macht nun die Hypothesen:

1) Dass jedes Molecül Schwingungen einer Wellenlänge λ aussendet, die nur von der Geschwindigkeit v des Molecüls abhängt. Es ist also auch v eine Function von λ.

2) Die Intensität der Strahlung, deren Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt, ist proportional der Anzahl der Molecüle, die Schwingungen dieser Periode aussenden, d. h. proportional zu dem Ausdruck (69). Schreibt man daher diese Strahlungsintensität in der Form

$$\varphi(\lambda, \vartheta)\, d\lambda,$$

so muss nach (69), (70) und (71), da v eine Function von λ ist, sein

$$\varphi(\lambda, \vartheta) = F(\lambda) \cdot e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}}. \tag{72}$$ [2])

1) Wied. Ann. 58, S. 662, 1896.

2) Zu derselben Form des Strahlungsgesetzes gelangt M. Planck (Berl. Ber. 1899, Mai, Ann. de Phys. 1, 1900) auf speciellerer elektromagnetischer Grundlage.

Da nun nach (66) $\varphi : \vartheta^5$ eine Function des Argumentes $\lambda \vartheta$ sein muss, so folgt $F(\lambda) = c_1 : \lambda^5$ und $f(\lambda) = c_2 : \lambda$, sodass das Strahlungsgesetz entsteht:

$$\varphi(\lambda, \vartheta) = \frac{c_1 \cdot e^{-c_2 : \lambda \vartheta}}{\lambda^5}, \tag{73}$$

und die Gesammtstrahlung sich ergiebt zu

$$i = c_1 \int_0^\infty \frac{e^{-c_2 : \lambda \vartheta}}{\lambda^5} d\lambda. \tag{74}$$

Diese Strahlungsgesetze müssen nun für jeden schwarzen Körper gelten, auch wenn derselbe nicht ein Gas ist, da, wie wir oben S. 456 sahen, das Strahlungsgesetz eines schwarzen Körpers nicht von seiner speciellen Natur abhängt.

Dieses Strahlungsgesetz ist nun in der That mehrfach experimentell bestätigt worden.[1]) Diejenige Wellenlänge λ_m, bei welcher die Maximalstrahlung liegt, bestimmt sich aus der Gleichung $\partial\varphi/\partial\lambda = 0$. Nun ist nach (73)

$$lg\,\varphi = lg\,c_1 - \frac{c_2}{\lambda \vartheta} - 5\,lg\,\lambda,$$

daher

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{c_2}{\lambda^2 \vartheta} - \frac{5}{\lambda}.$$

Es besteht daher die Beziehung:

$$\lambda_m \cdot \vartheta = c_2 : 5. \tag{75}$$

Da nun nach S. 481 $\lambda_m \vartheta$ den Werth 2887 hat, so folgt:

$$c_2 = 14435, \tag{76}$$

wenn die Einheit der Wellenlänge 0,001 mm ist.[2]) Hält man consequent als Längeneinheit auch für λ das cm fest, so wäre

$$c_2 = 1,4435. \tag{76'}$$

1) Literatur siehe in Anm. 1 auf S. 481. — Jedoch sind in neueren Arbeiten (O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhdl. deutsch. phys. Ges. 1, S. 23, 215, 1899; H. Beckmann, Diss. Tübingen 1898; H. Rubens, Wied. Ann. 69, S. 582, 1899) gewisse Abweichungen vom Wien'schen Gesetz gefunden worden.

2) Nach H. Beckmann (Inaug.-Dissertat. Tübingen 1898) und H. Rubens

Setzt man $1/\lambda = y$, $c_2/\vartheta = c'$, so wird nach (74)

$$i = - c_1 \int_{\infty}^{0} y^3 \cdot e^{-c'y} dy.$$

Nun ist

$$\int y^3 \cdot e^{-c'y} dy = -\left(\frac{1}{c'} y^3 + \frac{3}{c'^2} y^2 + \frac{6}{c'^3} y + \frac{6}{c'^4}\right) e^{-c'y}.$$

Daher folgt

$$\int_{\infty}^{0} y^3 \cdot e^{-c'y} dy = -\frac{6}{c'^4},$$

und

(77) $$i = \frac{6c_1}{c'^4} = \frac{6c_1}{c_2^4} \vartheta^4.$$

Vergleicht man diese Formel mit dem Strahlungsgesetze (48) (S. 471), so folgt, dass ist:

(78) $$a = 6c_1 : c_2^4,$$

wobei a die Constante des Boltzmann-Stefan'schen Strahlungsgesetzes ist. Nun ist nach S. 473 Formel (51):

$$a = 1{,}71 \cdot 10^{-5} \text{ erg/sec}.$$

Daher folgt die Constante c_1 unter Rücksicht auf (76') in absolutem cgs-Maass:

(79) $$c_1 = \frac{1}{6} a c_2^4, \text{ d. h. } c_1 = 1{,}24 \cdot 10^{-5}.$$

Das Strahlungsgesetz (73), welches ein ganz universelles ist, giebt uns die Mittel in die Hand,[1]) ein wirklich absolutes Maasssystem für die Länge, Masse, Zeit und Temperatur aufzustellen, welches nur auf universelle Eigenschaften des Vacuums (Aethers) begründet ist und von keinen besonderen Eigenschaften bestimmt gewählter Materie abhängt. Wir finden nämlich auch in der

---

(Wied. Ann. 69, S. 576, 1899) soll die Constante c_2 wesentlich grösser ausfallen, wenn man sie aus der Emission sehr grosser Wellenlängen berechnet. Es würde demnach das Wien'sche Gesetz doch nicht streng richtig sein.

1) M. Planck, Berl. Ber. 1899, S. 479.

allgemeinen Gravitation und in der Lichtgeschwindigkeit im Aether zwei universelle Gesetze. Ein solches absolutes Maasssystem wird durch die Festsetzung gewonnen, dass die Gravitationsconstante, die Lichtgeschwindigkeit im Aether, und die beiden Constanten c_1 und c_2 des Strahlungsgesetzes den Werth 1 erhalten sollen.[1])

Kapitel III.

Das Leuchten der Gase und Dämpfe.

1. Unterscheidung der Luminiscenz und Temperaturstrahlung. Der principielle Unterschied zwischen Luminiscenz und Temperaturstrahlung ist schon oben S. 452 genannt. Welche Kriterien haben wir nun, um bei irgend einem leuchtenden Körper zu entscheiden, ob er luminiscirt oder eine reine Temperaturstrahlung besitzt (ob er allactin oder thermactin ist)?

Auf Luminiscenzerscheinungen ist der Kirchhoff'sche Satz der Proportionalität zwischen Emissions- und Absorptionsvermögen nicht anwendbar; trotzdem wird auch bei Luminiscenzerscheinungen die Emission scharfer Spectrallinien von auswählender Absorption derselben Spectrallinien begleitet sein, da beide geknüpft sind an das Bestehen von wenig gedämpften Eigenschwingungen der Ionen.

Durch Messung der absoluten Grösse des Emissionsvermögens oder der Strahlungsintensität kann man aber ein Kriterium dafür gewinnen, wann sicher Luminiscenz vorliegt: Sowie die Strahlungsintensität eines Körpers grösser ist, als die eines schwarzen Körpers gleicher Temperatur im gleichen Wellenlängenintervall, so muss Luminiscenz mindestens neben der Temperaturstrahlung bestehen. Durch dieses Kriterium haben E. Wiedemann,[2]) F. Paschen[3])

1) Die numerischen Werthe dieser absoluten Einheiten sind bei Planck, l. c. zu finden.

2) Wied. Ann. 37, S. 215, 1889.

3) Wied. Ann. 51, S. 42, 1894.

und E. Pringsheim[1]) gezeigt, dass z. B. das gelbe Licht, welches eine in einen Bunsenbrenner eingeführte Kochsalzperle ausstrahlt, mindestens theilweise der Chemi-Luminiscenz (Reduction des Natriums aus dem Salz nach Pringsheim) seine Entstehung verdankt. Letzterer schliesst (nach Anstellung weiterer Versuche) allgemein, dass bei allen Methoden, welche man zur Erzeugung der Gasspectren verwendet, das Leuchten eine Folge elektrischer[2]) oder chemischer[3]) Vorgänge ist. Trotzdem müssen alle Gase und Dämpfe bei genügender Erhitzung auch eine dem Kirchhoff'schen Satze entsprechende Temperaturstrahlung entsenden,[4]) weil sonst ein Widerspruch zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik bestehen würde. Es ist allerdings möglich, dass die Absorption und daher auch die Temperaturstrahlung bei Ausschliessung aller chemischen Processe gering ist und vielleicht keine scharfen Spectrallinien ergiebt, weil das Absorptionsvermögen eventuell erst durch chemische Processe zu bedeutender Grösse gebracht wird. Es wäre z. B. denkbar, dass erst durch Aenderungen im Molecülbau die Ioneneigenschwingungen möglich werden, welche starke auswählende Absorption veranlassen.

2. Die Ionenhypothese. Nach elektromagnetischer Auffassung werden durch die Schwingungen der Ionen elektromagnetische Wellen gleicher Periode, d. h. Licht bestimmter Farbe, entsendet. Wir wollen prüfen, ob diese Hypothese ohne Widerspruch mit anderen Daten, welche aus der kinetischen Gastheorie entnommen sind, durchführbar ist.

---

1) Wied. Ann. 45, S. 428, 1892. — 49, S. 347, 1893.

2) Die niedrige Temperatur in Geissler'schen Röhren hat E. Wiedemann (Wied. Ann. 6, S. 298, 1879) constatirt.

3) Pringsheim (Wied. Ann. 45, S. 440) hat von einer 150° C. kalten CS_2-Flamme eine photographische Wirkung erhalten. Reine Temperaturstrahlung hätte in diesem Falle gar kein photographisch wirksames Licht entsenden können. — Nebenbei mag hier bemerkt werden, dass die Wirksamkeit des Auer-Brenners nach E. St. John (Wied. Ann. 56, S. 433, 1895) nicht auf Luminiscenz beruht, sondern in der Anwendung eines feuerbeständigen thermactinen Glühkörpers von kleiner Masse, kleiner Wärmeleitung, grosser Oberfläche und grossem Emissionsvermögen liegt. — Nach H. Rubens (Wied. Ann. 69, S. 588, 1899) ist aber der Auer'sche Glühkörper wahrscheinlich allactin für grosse Wellenlängen.

4) Nach Paschen (Wied. Ann. 50, S. 409, 1893) zeigt Kohlensäure und Wasserdampf eine reine Temperaturstrahlung. In der That sind ja auch ihre Absorptionsvermögen für gewisse Wellenlängenbereiche bedeutend.

Wir fassen einen stationären Zustand ins Auge, in welchem die Ionenladungen Schwingungen constanter Amplitude besitzen, wobei sie beständig eine gewisse Energiezufuhr erfahren, die nothwendig ist, um ihre Amplituden, die sich sonst wegen Strahlungs- und eventuell Reibungsverlusten vermindern würden, constant zu erhalten. Bei reiner Temperaturstrahlung besteht diese Energiezufuhr in den gegenseitigen Stössen der Molecüle, bei Luminiscenzerscheinungen ist sie in Form von chemischer, elektrischer etc. Energie enthalten.

Wenn die relative Entfernung einer elektrischen Ladung e (nach elektrostatischem Maass) gegen eine gleiche, entgegengesetzte Ladung (die man in Ruhe oder in Bewegung annehmen kann) eine Schwingung der Amplitude l und der Periode T ausführt, so ist nach Hertz[1]) die in einer halben Periode entsandte elektromagnetische Energie:

$$L' = \frac{8\pi^4}{3\lambda^3} e^2 l^2, \tag{1}$$

wobei λ die Wellenlänge im Vacuum ($\lambda = cT$) bedeutet.

In der Zeiteinheit wird daher von zwei entgegengesetzt geladenen Ionen die Energiemenge ausgestrahlt:

$$L = \frac{16}{3} \pi^4 \frac{e^2 l^2}{\lambda^3 T} = \frac{16}{3} \pi^4 c \frac{e^2 l^2}{\lambda^4}. \tag{2}$$

Nun hat E. Wiedemann[2]) gemessen, dass die von einem gr. Natrium in den beiden D-Linien pro Secunde entsendete Energie beträgt

$$L_1 = 3210 \text{ gr. cal} = 13{,}45 \cdot 10^{10} \text{ erg.} \tag{3}$$

Das Atomgewicht des Natriums ist 23. Zunächst müssen wir das absolute Gewicht eines Atoms Natrium berechnen. Nach Avogadro's Regel sind in jedem Gase und Dampfe in einem bestimmten Volumen bei bestimmtem Druck und bestimmter Temperatur gleich viel Molecüle enthalten. Aus der kinetischen Gastheorie berechnet sich[3]) die Anzahl der Molecüle in 1 cm^3 bei 1 Atmosphäre Druck und 0^0 Cels. zu $N = 10^{20}$. Nach Regnault wiegt 1 cm^3 Luft bei

---

1) Wied. Ann. 36, S. 12, 1889. — Dort tritt ein anderer Zahlenfactor auf, weil T anders als hier definirt ist.

2) Wied. Ann. 37, S. 213, 1889.

3) Vgl. F. Richarz, Wied. Ann. 52, S. 395, 1894.

0^0 Cels. und 1 Atmosphäre Druck: 0,001293 gr. Wasserstoff ist 14,4 mal leichter als Luft, daher ist das Gewicht g von einem Molecül Wasserstoff zu berechnen aus:

$$g \cdot 10^{20} = \frac{0{,}001293}{14{,}4}$$

$$g = 9 \cdot 10^{-25} \text{ gr.}$$

Da ein Molecül Wasserstoff (H_2) aus 2 Atomen besteht, so ist das Gewicht eines Atoms Wasserstoff $4{,}5 \cdot 10^{-25}$ gr. Ein Atom Natrium ist 23 mal schwerer, es wiegt also $1{,}03 \cdot 10^{-23}$ gr.

Natrium ist ein einwerthiges Atom. An jede Valenzstelle knüpft sich ein Ion, dessen Ladung mit e bezeichnet sei. Wenn sich daher je 2 Atome betheiligen an einer Schwingung der Ladungen $\pm e$, so sind in 1 gr. Natrium $\frac{1}{2} : 1{,}03 \cdot 10^{-23} = 4{,}85 \cdot 10^{22}$ solcher Erregungsquellen vorhanden. Es muss daher sein nach (2) und (3)

$$(4) \qquad \frac{16}{3} \pi^4 c \frac{e^2 l^2}{\lambda^4} \cdot 4{,}85 \cdot 10^{22} = 13{,}45 \cdot 10^{10}.$$

Nun ist e eine universelle Constante, da sie die elektrische Ladung bezeichnet, welche sich an ein einwerthiges Atom kettet (die Ladung einer Valenzstelle). Da nämlich nach dem Faraday'schen Gesetz durch einen bestimmten elektrischen Strom in der Zeiteinheit stets die gleiche Anzahl Valenzen durch Elektrolyse abgeschieden werden, so muss die Ladung einer Valenzstelle eine universelle Constante sein, welche von der speciellen Natur des Atoms nicht abhängt. Nun scheidet der elektrische Strom von 1 Ampère Stärke in 1 sec. 0,1160 cm^3 Wasserstoff von 0^0 und Atmosphärendruck ab. Die in 1 sec. von der Intensität 1 Ampère durch einen Querschnitt des Stromes transportirte Elektricitätsmenge ist gleich $\frac{1}{10}$ elektromagnetischen, d. h. gleich $3 \cdot 10^9$ elektrostatischen Einheiten. Davon fliesst die Hälfte als positive Elektricität in der einen, die Hälfte als negative in der anderen Richtung. Daher beträgt in 0,116 cm^3 Wasserstoffgas von 0^0 Temperatur und Atmosphärendruck die gesammte Ladung der positiven bez. der negativen Valenzstellen $1{,}5 \cdot 10^9$ elektrostatische Einheiten. In 1 cm^3 wären daher $1{,}29 \cdot 10^{10}$ Einheiten vorhanden. Da nun nach S. 487 die Molecülzahl im cm^3 $N = 10^{20}$ beträgt und jedes Molecül eine positiv und eine negativ

geladene Valenzstelle besitzt, so ist die Ladung e einer Valenzstelle, d. h. die Ladung einwerthiger Ionen (das elektrische Elementarquantum):

$$e = 1,29 \cdot 10^{-10}.\text{[1]} \tag{5}$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in (4) erhält man, da $c = 3 \cdot 10^{10}$ und $\lambda = 0,000059$ cm ist, für l den Werth:

$$l = 1,13 \cdot 10^{-11} \text{ cm.} \tag{6}$$

Der Durchmesser eines Molecüls berechnet sich aus der kinetischen Gastheorie zu etwa $d = 2 \cdot 10^{-8}$ cm.[2]) Da nach (6) l wesentlich kleiner, als d ist, so kann also die verhältnissmässig starke Emission des Natriumdampfes thatsächlich quantitativ erklärt werden aus einer Oscillation der elektrischen Ionen (Valenzladungen) innerhalb des Molecüls (der molecularen Wirkungssphäre).

Wir haben oben S. 410 aus dem Zeemann'schen Phänomen das Verhältniss der Ladung e zur Masse m des negativen Ions im Natriumdampf berechnet zu:

$$e : m = c \cdot 1,6 \cdot 10^{7}.$$

Daraus folgt

$$m = 2,7 \cdot 10^{-28} \text{ gr.,} \tag{7}$$

d. h. die Masse des Ions ist der 38000te Theil der Masse eines Atoms Natrium (cf. oben S. 488).

Wir haben früher (S. 353) die Bewegungsgleichung für ein unter dem Einfluss einer elektrischen Kraft X schwingendes Ion in der Form geschrieben[3]):

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + r e^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{4 \pi e^2}{\vartheta} \xi = e X. \tag{8}$$

ξ bedeutet die Entfernung des Ions aus der Ruhelage. Bei kleinem

1) J. J. Thomson (Phil. Mag. (5) 46, S. 29, 1898) hat aus gewissen Beobachtungen e berechnet zu 6 bis $7 \cdot 10^{-10}$, was in guter Uebereinstimmung steht mit der hier aus der kinetischen Gastheorie berechneten Zahl.

2) Vgl. F. Richarz, Wied. Ann. 52, S. 395, 1894.

3) Hier bedeutet ϑ nicht mehr die absolute Temperatur.

r ist die Periode T' der Eigenschwingung des Ions gegeben durch

$$(9) \qquad T'^2 = \frac{\pi m \vartheta}{e^2}.$$

Da für Natriumdampf $T' = 2 \cdot 10^{-15}$ etwa beträgt, so folgt aus (5) und (7):

$$(10) \qquad \vartheta = 7{,}6 \cdot 10^{-28}.$$

Um schliesslich auch die Constante r in (8) zu ermitteln, kann man das Resultat der S. 357 benutzen, dass in der Nähe einer Eigenschwingung der Brechungsindex n und Absorptionsindex $\varkappa$ sich bestimmt aus der Gleichung:

$$(11) \qquad n^2(1 - i\varkappa)^2 = 1 + \frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2}},$$

wobei $\mathfrak{N}$ die Anzahl der Ionen in 1 cm^3 bedeutet, und ferner gesetzt ist

$$(12) \qquad \tau = T : 2\pi, \quad a = \frac{r\vartheta}{4\pi}, \quad b = \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}.$$

Aus beobachtetem $\varkappa$ könnte man daher r gewinnen. Solche Messungen von $\varkappa$ liegen beim Natriumdampf nicht vor und würden auch sehr schwierig sein, weil bei ihm die Absorption in der Nähe der Eigenschwingung ungemein schnell mit der Periode T variirt.

Wir können aber in anderer Weise zur Schätzung von r gelangen: Zunächst muss bei den scharfen Absorptionslinien des Natriumdampfes die Grösse a/τ sehr klein sein. Für $\tau = T' : 2\pi$ folgt aber

$$(13) \qquad \frac{a}{\tau} = r \cdot e \sqrt{\frac{\vartheta}{4\pi m}} = r \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-8}.$$

r muss also jedenfalls unter der Grössenordnung 10^4 bleiben. Auch auf anderem Wege können wir eine obere Grenze für r gewinnen.

Wenn die Ionen, nachdem sie einmal in Schwingung versetzt sind, einem äusseren Einfluss entzogen werden, so führen sie gedämpfte Eigenschwingungen aus von der Form

$$(14) \qquad \xi = l \cdot e^{-\gamma \frac{t}{T}} \cdot e^{i 2\pi \frac{t}{T}}.$$

Nach (8) muss dann bei kleinem r sein:

$$\gamma = \frac{re^2}{2m} T' = r \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-7}, \tag{15}$$

wobei T' aus (9) bestimmt ist. Die Dämpfungsconstante γ der Eigenschwingungen muss nun sehr klein sein, weil mit Natriumlicht noch Interferenzen bei 200000 λ Gangunterschied beobachtet wurden. Also darf für $t = 200000\, T'$ ξ noch nicht sehr klein sein. Daher muss $200000 \cdot \gamma$ immer noch kleiner als 1 sein, d. h.

$$r \leqq 10^2. \tag{16}$$

Im Folgenden werden wir eine untere Grenze für r bestimmen.

3. Die Dämpfung der Ionenschwingungen durch ihre eigene Strahlung. Wenn zur Zeit $t = 0$ ein negativ geladenes Ion $-e$ von einem positiv geladenen Ion $+e$ um die Strecke l entfernt ist, während diese Entfernung nach Ablauf der Zeit T' sich um dl geändert hat, so ist die Aenderung $d\mathfrak{E}$ der elektrostatischen Energie:

$$d\mathfrak{E} = \frac{e^2}{l^2} \cdot dl. \tag{17}$$

Nun hat sich nach (14) die Amplitude der Ionenbewegung nach Ablauf einer Periode T' geändert um $dl = -\gamma \cdot l$, falls γ klein ist. Nach (1) (S. 487) ist ferner die Energieabnahme durch Strahlung in der Zeit T':

$$d\mathfrak{E}' = -\frac{16}{3} \frac{\pi^4}{\lambda^3} e^2 l^2. \tag{18}$$

Die Energieabnahme $d\mathfrak{E}$ muss nun mindestens gleich sein der Energieabnahme $d\mathfrak{E}'$ durch Strahlung. Aus (17) und (18) gewinnen wir daher, falls $dl = -\gamma l$ gesetzt wird:

$$\frac{e^2}{l} \gamma \geqq \frac{16}{3} \cdot \frac{\pi^4}{\lambda^3} e^2 l^2, \text{ d. h. } \gamma \geqq \frac{16 \pi^4}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^3. \tag{19}$$

Benutzt man den Werth (6) für l, so wird

$$\gamma \geqq 10^{-16}, \text{ d. h. nach (15):}$$

$$r \geqq 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

Wir werden nun weiter sehen, dass r sogar erheblich über der so bestimmten unteren Grenze liegen muss und dass für den benutzten Werth von l die Dämpfung der Ionenschwingungen durch ihre eigene Strahlung ganz zu vernachlässigen wäre.

Selbst wenn man l von der Ordnung des Molecüldurchmessers annehmen würde, d. h. $l = 2 \cdot 10^{-8}$ setzt, so würde $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$ folgen, während wahrscheinlich γ ziemlich viel grösser ist.

4. Die Strahlung der Ionen bei äusserer Einstrahlung. Wenn eine äussere Kraft X von der Periode $T = 2\pi\tau$ und der Amplitude A wirkt, so nehmen die Ionen eine Bewegung gleicher Periode an, deren Amplitude sich nach (8) mit Benutzung der Abkürzungen (12) schreibt:

$$l = A \cdot \frac{\vartheta}{4\pi e \sqrt{\left[1 - \left(\frac{b}{\tau}\right)^2\right]^2 + \frac{a^2}{\tau^2}}} \,. \tag{20}$$

Die in der Zeiteinheit von einer Schicht der Dicke dx und der Grundfläche 1 ausgestrahlte Energie ist also nach Formel (2) auf (S. 487):

$$dL = \frac{1}{3}\, \pi^2 c\, N\, dx \,\frac{A^2\, \vartheta^2}{\lambda^4 \left\{\left[1 - \left(\frac{b}{\tau}\right)^2\right]^2 + \frac{a^2}{\tau^2}\right\}} \,. \tag{21}$$

Andererseits strömt in die betrachtete Schicht pro Zeiteinheit die Energie $\frac{c}{4\pi} A^2$ ein (cf. S. 417; es ist die elektrische Energie gleich der magnetischen Energie), dagegen strömt die Energie $\frac{c}{4\pi}\, A'^2$ aus, falls A' die Amplitude der einfallenden elektrischen Kraft nach Durchlaufen der Schicht dx bezeichnet. Es ist daher

$$A' = A \cdot e^{-2\pi\, n\varkappa \frac{dx}{\lambda}} .$$

Die in der Schicht pro Zeiteinheit absorbirte Energie beträgt daher:

$$d\mathfrak{E} = \frac{c}{4\pi}\left(A^2 - A'^2\right) = \frac{c}{4\pi}\, A^2 \cdot 4\pi\, n\varkappa \frac{dx}{\lambda} \,. \tag{22}$$

Nun ist aber nach (11) auf S. 490 in der Nähe der Eigenschwingung:

$$2n^2 \varkappa = \frac{\mathfrak{N}\, \vartheta\, a/\tau}{\left(1 - \frac{b}{\tau^2}\right)^2 + \frac{a^2}{\tau^2}}\,. \tag{23}$$

Unter Berücksichtigung hiervon schreibt sich das Verhältniss der ausgestrahlten zur absorbirten Energie:

$$\frac{dL}{d\mathfrak{E}} = \frac{2\pi^2}{3}\,\frac{\vartheta\tau}{\lambda^3 a}\,n = \frac{4\pi^2}{3}\cdot\frac{n}{c\lambda^2 r}\,. \tag{24}$$

Dieses Verhältniss wird also um so grösser, je kleiner r ist. Für $n = 1$ ergiebt sich bei $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-5}$ aus (24):

$$\frac{dL}{d\mathfrak{E}} = \frac{0{,}126}{r}\,.$$

Da dies Verhältniss jedenfalls bedeutend kleiner als 1 sein muss, da sonst eine Umkehrung der Natriumlinie (cf. oben S. 459) unmöglich wäre, so muss in Anbetracht der Ungleichung (16) für r etwa der Werth gelten:

$$r = 10 \text{ bis } 100\,. \tag{25}$$

5. Ueber Fluorescenz. Wenn beim Natriumdampf r den Werth 1 besässe, so müsste eine merkbare Lichtstrahlung durch äussere Einstrahlung hervorgerufen werden. Dies ist bisher nicht beobachtet (allerdings auch nicht genau geprüft) worden. Bei den sogenannten fluorescirenden Körpern wird nun in der That durch Belichtung eine merkliche Eigenstrahlung hervorgerufen. Man könnte versucht sein, diese Erscheinung durch kleine Werthe von r zu erklären. Der Character der Absorption des Körpers kann dabei noch sehr wechselnd sein, da derselbe durch die Grösse a, d. h. das Product $r\vartheta$ bestimmt wird. Indess ist der Versuch, auf Grund der Bewegungsgleichung (8) der Ionen eine Theorie der Fluorescenz geben zu wollen, von vornherein als aussichtslos zu bezeichnen. Jene Differentialgleichung ergiebt nämlich allemal, dass im stationären Zustande die Ionen Schwingungen von gleicher Periode ausführen, wie die einfallende elektrische Kraft X. Dadurch wird aber gerade eine characteristische Erscheinung, dass nämlich das Fluorescenzlicht fast stets eine andere Farbe als das am stärksten absorbirte Licht besitzt, nicht erklärt.

Man muss nothwendig die Fluorescenz auffassen als eine

Luminiscenz, die durch besondere (eventuell chemische) Vorgänge erregt wird, deren Ursache in der Belichtung zu suchen ist. Der bisherige mathematische Ansatz wäre also wesentlich zu erweitern.[1])

6. Die Verbreiterung der Spectrallinien nach dem Doppler-schen Princip.[2]) Wenn die Ionen völlig ungedämpfte Eigenschwingungen besässen, so würden sie trotzdem nur dann völlig scharfe Spectrallinien ergeben, wenn ihr Schwingungscentrum in Ruhe bliebe. Da dieses aber an das Molecül geknüpft ist und die Molecüle nach der kinetischen Gastheorie mit beträchtlichen Geschwindigkeiten im Raume hin- und herfliegen, so müssen nach dem Doppler'schen Princip die von den Ionen erregten Schwingungen etwas wechselnde Perioden haben, d. h. die Spectrallinien können nicht völlig scharf sein.

Wenn ein Ion, welches die Periode T besitzt, sich mit der Geschwindigkeit v gegen den Beobachter bewegt, so erhält derselbe nach dem Doppler'schen Princip (cf. S. 435) Licht der Periode:

$$T' = T\left(1 \pm \frac{v}{c}\right), \tag{26}$$

falls c die Lichtgeschwindigkeit in dem Raume zwischen dem Ion und dem Beobachter ist. Da der Brechungsindex der Gase und der Luft nicht merklich von 1 abweicht, so kann man $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. setzen. Wenn wir daher zunächst annehmen, dass alle Molecüle die gleiche Geschwindigkeit v besitzen, so würden die entsendeten Wellenlängen in den Grenzen $\lambda\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$ liegen. Die Breite $d\lambda$ der Spectrallinie würde daher betragen

$$d\lambda = \lambda \frac{2v}{c}. \tag{27}$$

1) Eine befriedigende Theorie ist bisher nicht aufgestellt worden. — Die von Lommel (Wied. Ann. 3, S. 113, 1878) gegebene Theorie hat G. C. Schmidt (Wied. Ann. 58, S. 117, 1896) näher mit dem Experiment verglichen und nicht bestätigt gefunden.

2) Diese Frage wurde zuerst von Ebert in Wied. Ann. 36, S. 466, 1889 behandelt. Nach seinen Rechnungen sollte sich die Interferenzfähigkeit der Spectrallinien zu niedrig ergeben, wenn man das Doppler'sche Princip auf die leuchtenden Gasmolecüle anwendet. — Durch vollständigere Discussion hat indess Lord Rayleigh (Phil. Mag. (5) 27, S. 298, 1889) diesen Widerspruch im Wesentlichen gehoben.

Nach der kinetischen Gastheorie[1]) ist nun der Mittelwerth des Quadrats der Geschwindigkeiten der Molecüle gegeben durch

$$\text{Mittel } (v^2) = \frac{248 \,.\, 10^6 \,.\, \vartheta}{M}, \tag{28}$$

wobei M das Moleculargewicht des Gases, ϑ seine absolute Temperatur bedeutet. Setzen wir daher:

$$v = \sqrt{\text{Mittel } (v^2)} = 15{,}8 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{\vartheta}{M}}, \tag{29}$$

so würde z. B. für Wasserstoff ($M = 2$) bei 50° Cels. ($\vartheta = 323$) folgen $v = 2010 \cdot 10^2$ cm/sec = 2010 m/sec. Die Breite einer Spectrallinie müsste also nach (27) sein: $d\lambda = \lambda \cdot 1{,}34 \cdot 10^{-5}$. — Nach (27) müssen die Spectrallinien im rothen Theile des Spectrums mehr verbreitert sein, als im blauen Theile. Dies entspricht thatsächlich der Erfahrung.[2])

Die Breite einer Spectrallinie hängt, wie wir früher auf S. 143 sahen, zusammen mit dem grössten Gangunterschied, bei welchem das Licht der Spectrallinie noch interferenzfähig ist. Wenn man aus der Spectrallinie zwei Strahlen bildet, welche einen Wegunterschied von d cm besitzen, so können nach Formel (28) auf S. 143 diese Interferenzenfransen bilden, deren Sichtbarkeit V für den Fall, dass die Lichtstärke in der ganzen Breite der Spectrallinie dieselbe ist, gegeben wird durch

$$V = \frac{\sin 4\pi\, d\, a}{4\pi\, d\, a}. \tag{30}$$

Dabei hängt nach den dortigen Formeln (22) und (20) die Grösse a mit der Breite $d\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ der Spectrallinie in folgender Weise zusammen:

$$2a = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \tag{31}$$

Die Sichtbarkeit V der Interferenzenfransen ist nach der dortigen Gleichung (26) definirt. Nach Rayleigh kann man nun noch Interferenzen wahrnehmen, wenn das Verhältniss $J_{Min} : J_{Max}$ der Lichtstärken an den Stellen grösster Dunkelheit und Helligkeit den Werth 0,95 besitzt. Daraus würde V folgen zu 0,025. Setzt

1) Vgl. z. B. L. Boltzmann, Gastheorie I, S. 14.

2) Vgl. Winkelmann, Handb. d. Physik. Optik, S. 424 (Autor Kayser).

man diesen Werth in (30) ein und berücksichtigt (27) und (31), so würde die maximale Wegedifferenz d, bei welcher noch Interferenzen zu erhalten sind, folgen aus

$$(32) \qquad 0{,}025 = \frac{\sin(4\pi\, {}^{d}/_{\lambda} \,.\, {}^{v}/_{c})}{4\pi\, {}^{d}/_{\lambda} \,.\, {}^{v}/_{c}} = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

wobei zur Abkürzung $4\,\frac{d}{\lambda}\cdot\frac{v}{c} = x$ gesetzt ist. Da die rechte Seite von (32) klein ist, so ist die kleinste Wurzel von x in der Nähe von 1 zu suchen. Setzt man $x = 1 - \varepsilon$, so folgt aus (32):

$$0{,}025 = \frac{\pi\varepsilon}{\pi\,(1-\varepsilon)} = \varepsilon\,.$$

Es ergiebt sich also

$$(33) \qquad \frac{d}{\lambda} = x\cdot\frac{c}{4v} = 0{,}975\cdot\frac{c}{4v}\,.$$

Wenn man darauf Rücksicht nimmt, dass nicht alle Molecüle die gleiche Geschwindigkeit v besitzen, so wird der Werth von ${}^{d}/_{\lambda}$ noch grösser, nämlich annähernd[1])

$$(34) \qquad \frac{d}{\lambda} = 0{,}345\,\frac{c}{v}\,.$$

Wenn z. B. die Temperatur des in Geissler'schen Röhren leuchtenden Wasserstoffs 50° Cels. beträgt, so müsste die Interferenzfähigkeit seiner Spectrallinien zum ersten Male verschwinden bei dem Gangunterschied:

$$\frac{d}{\lambda} = 51\,600\,.$$

Bei Natriumdampf im Bunsenbrenner ist $M = 2\cdot 23 = 46$ zu setzen. Nehmen wir die Temperatur zu 1500° Cels. an, d. h. setzen $\vartheta = 1773$, so würde nach (29) folgen $v = 98{,}2\cdot 10^3$ und nach (34) ${}^{d}/_{\lambda} = 105\,000$.

Hier würde die Interferenzfähigkeit eine noch höhere sein, wenn die Temperatur niedriger wäre. In der That kann man durch elektrische Entladungen in einer mit Natrium beschickten Vacuumröhre Licht von höherer Interferenzfähigkeit erhalten. Bei dieser

1) Vgl. darüber Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 27, S. 298, 1889

Elektro-Luminiscenz ist die Temperatur viel niedriger. Michelson schätzt sie in einem Falle auf 250° Cels. Dann würde d/λ zu 205000 folgen. Bei 50° Cels. wäre $d/\lambda = 245000$. Die grosse Interferenzfähigkeit der Quecksilberlinien erklärt sich durch das grosse Atomgewicht (welches beim Quecksilber als einatomiges Gas gleich seinem Moleculargewicht ist). Denn nach (29) wird durch ein grosses M die Geschwindigkeit v der Molecüle gering. Für Quecksilber folgt bei $M = 200$, $\vartheta = 273 + 50 = 323$, $v = 2 \cdot 10^4$, und $d/\lambda = 517000$.

Die in dieser Weise für die Interferenzfähigkeit berechneten Zahlen stimmen annähernd überein mit den Beobachtungsresultaten von Michelson.[1]) Derselbe konnte auch direct den Temperatureinfluss auf die Interferenzfähigkeit mit Hülfe einer mit Wasserstoff gefüllten Geissler'schen Röhre nachweisen, welche durch ein umschliessendes Kupferblech auf 300° C. erhitzt werden konnte.[2]) Ohne diese Erhitzung waren die Interferenzfransen deutlicher, als mit der Erhitzung. Die Erscheinung spricht zugleich dafür, dass die Temperatur in der Geissler'schen Röhre eine niedrige ist, d. h. dass das eingeschlossene Gas luminiscirt, und nicht in Folge hoher Temperatur leuchtet. Denn eine Erhitzung der Röhre um 300° Cels. kann nach (29) nur dann auf die Moleculargeschwindigkeit v merklichen Einfluss haben, falls die Temperatur ϑ niedrig z. B. 50° Cels. ist.

Wenngleich die so erhaltenen Zahlen über die Interferenzfähigkeit sich den Thatsachen gut anschliessen, so erschöpfen dennoch die hier angestellten Betrachtungen den Gegenstand noch nicht völlig. Denn einerseits ist nach Ebert[3]) der Abstand zweier Linien des Sonnenspectrums, die noch zu trennen sind, kleiner, als sich aus dem Doppler'schen Principe ergeben würde, andrerseits würde nach Lord Rayleigh[4]) die Berücksichtigung der Rotation der Molecüle die Interferenzfähigkeit des von ihnen ausgesandten Lichtes viel mehr herabsetzen, als die Berücksichtigung ihrer translatorischen Bewegung. Die Rotation der Molecüle würde allerdings nur bei mehratomigen Molecülen zu berücksichtigen sein. Die Erklärung der grossen Interferenzfähigkeit der Quecksilberlinien würde hiernach nicht hinfällig werden.

---

1) Phil. Mag. (5) 34, S. 280, 1892.
2) Astrophys. Journ. 2, S. 251, 1896.
3) Sitz.-Ber. d. phys. med. Soc. Erlangen, 1889. — Wied. Beibl. 1889, S. 944.
4) Phil. Mag. (5) 34, S. 410, 1892.

7. Andere Ursachen zur Verbreiterung der Spectrallinien. Die Bewegung der Molecüle ist nicht die einzige Ursache zur Verbreiterung der Spectrallinien. Die zeitliche Dämpfung der Ionenschwingungen muss der Interferenzfähigkeit eine Grenze setzen und daher die Spectrallinie verbreitern,[1] da Interferenzfähigkeit und Homogenität der Spectrallinie stets einander bedingen. Die Ionen werden im Zustande stationären Leuchtens immer wieder zu Schwingungen angeregt durch Zusammenstösse der Molecüle. Je häufiger dieselben sind, um so kleiner muss wiederum die Interferenzfähigkeit sein. Da nun die Zahl der Zusammenstösse mit der Dichte des Gases grösser wird, so muss auch durch Vergrösserung der Dichte eine Verbreiterung der Spectrallinien entstehen, wie die Versuche thatsächlich bestätigen.[2] Durch alleinige Vergrösserung der Dicke der strahlenden Schicht (innerhalb gewisser Grenzen) werden die Emissionslinien dagegen nicht verbreitert, sondern nur heller.[3] Wenn allerdings die Dicke der strahlenden Schicht so beträchtlich wird, dass sie für alle Wellenlängen merkliche Absorption besitzt, so muss sie, falls reine Temperaturstrahlung vorliegt, nach dem Kirchhoff'schen Gesetz sehr verbreiterte Emissionslinien, d. h. schliesslich ein continuirliches Spectrum entsenden.[4]

1) Diese Ansicht ist von Lommel (Wied. Ann. 3, S. 251, 1877) und Jaumann (Wied. Ann. 53, S. 832, 1894; 54, S. 178, 1895) ausgesprochen und mathematisch verfolgt worden. — Vgl. auch Garbasso (Atti d. R. Acad. d. Scienc. di Torino, XXX, 1894).

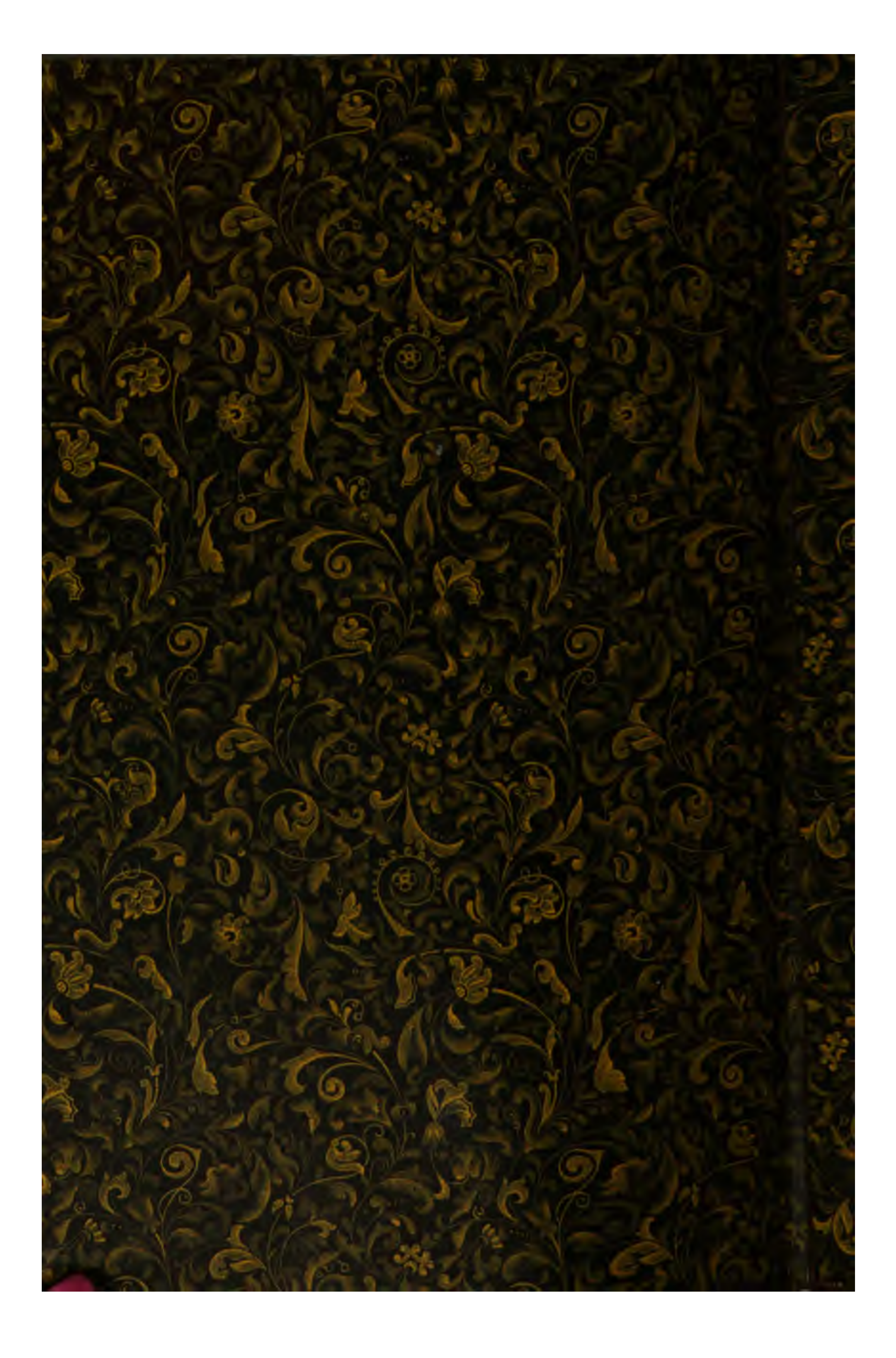
2) Vgl. hierüber Winkelmann's Handbuch d. Physik. Optik, S. 419 u. ff. (Autor Kayser). — Die Verbreiterung der Spectrallinien durch gegenseitige elektrodynamische Beeinflussung der Ionenschwingungen ist von Galitzine (Wied. Ann. 56, S. 78, 1895) theoretisch untersucht worden. (Vgl. auch hierüber C. A. Mebius, Wied. Beibl. 1899, S. 419.)

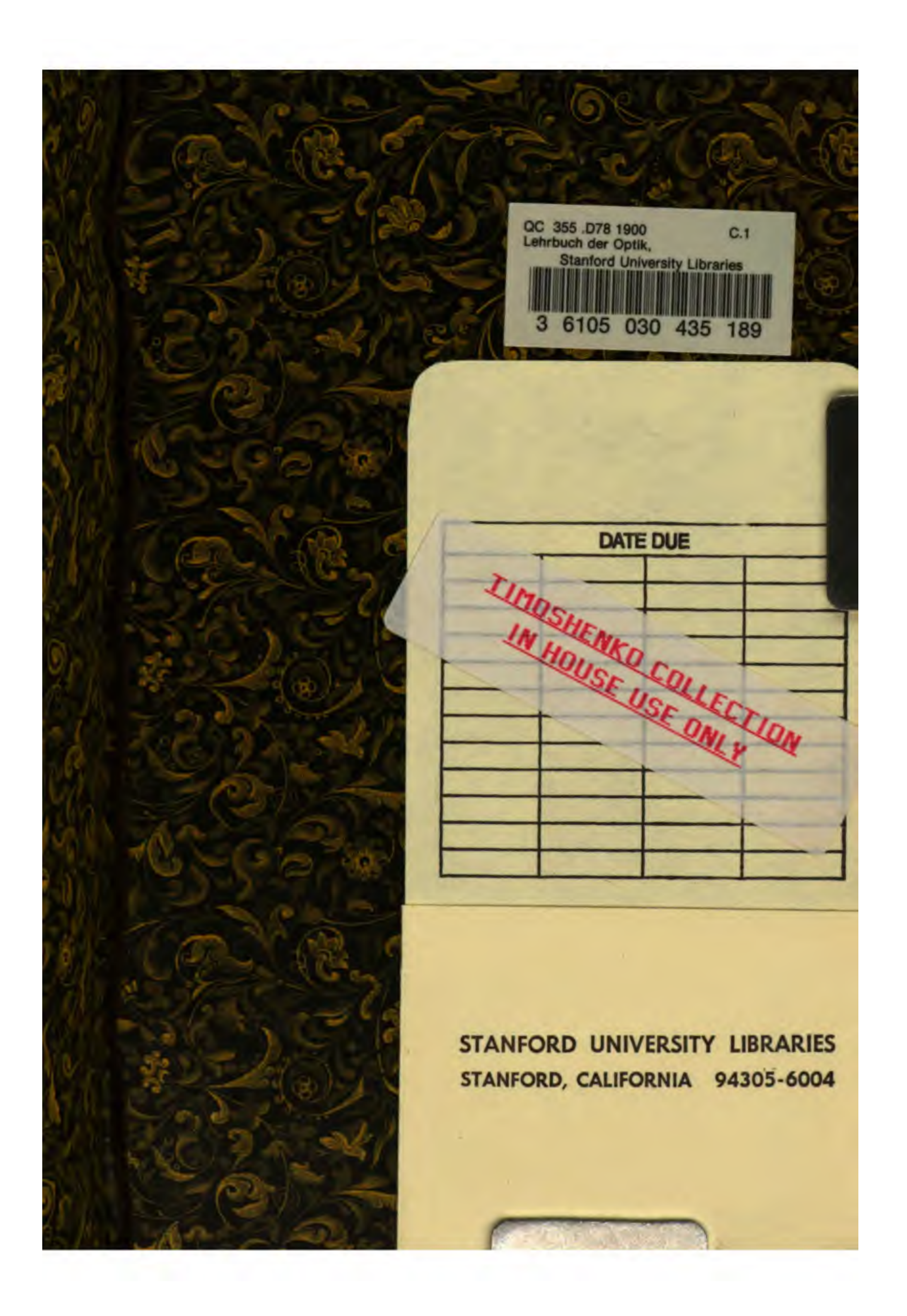
3) Vgl. hierüber Paschen, Wied. Ann. 51, S. 33, 1894.

4) Vgl. dazu H. Wanner, Wied. Ann. 68, S. 143, 1899. Derselbe beobachtete eine merkwürdige Umkehrung der Natriumlinie bei einer durch wiederholte Spiegelung erreichten Dickenvergrösserung der Natriumflamme.

Druck von August Pries in Leipzig.

10/6




QC 355 .D78 1900 C.1
Lehrbuch der Optik,
Stanford University Libraries
3 6105 030 435 189
DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

